Zárthelyi dolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Az A, B és C eseményekről tudjuk, hogy legalább az egyikük mindig bekövetkezik, továbbá A és B függetlenek, B és C pedig egymást kizáróak. Határozzuk meg a fenti események valószínűségét, ha $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$, valamint $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ is teljesül!

Megoldás:
(2 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$
(1 pont) így az első megadott feltételes valószínűségből $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{4}$
A második feltételes valószínűségből pedig
(2 pont)

$$\frac{3}{4} = \frac{\mathbb{P}((A \cup C) \cap C)}{\mathbb{P}(A \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A \cup C)},$$

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(A \cup C) = \dfrac{4}{3}\mathbb{P}(C)$.
(1 pont) A Poincaré-formulát alkalmazva
(2 pont) $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C)$,
(1 pont) azaz $\dfrac{4}{3}\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{4} + \mathbb{P}(C) - \dfrac{1}{12}$,
(1 pont) ahonnan $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2}$
(1 pont) Mivel $A \cup B \cup C = \Omega$, így $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1$
A Poincaré-formulát alkalmazva
(2 pont)

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(2 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, tehát $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(B)$
(2 pont) B és C események egymást kizárók tehát $B \cap C = \emptyset$, tehát $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$
(1 pont) és $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$
(1 pont) mindezeket behelyettesítve $\mathbb{P}(B) = \dfrac{4}{9}$

2. Aladár és Bea kártyáznak. Először Aladár húz két lapot egy megkevert magyarkártya-pakliból, majd ezután (a kihúzott lapok ismerete nélkül) Bea húz egy lapot Aladár kezéből.
(a) Mennyi a valószínűsége, hogy Beánál piros színű lap van?
(b) Mennyi a valószínűsége, hogy az Aladárnál maradt 1 darab lap is piros, feltéve, hogy Beánál piros színű lap van? (Egy magyarkártya-pakliban 32 lap van, melyekből pontosan 8 piros.)

Megoldás:
Tekintsük a következő eseményeket:
(2 pont) B=Beánál piros lap van, A_i=Aladár i darab pirosat húzott, $i = 0, 1, 2$

(a)
A kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(B)$
(1 pont) A teljes valószínűség tételéből
(2 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_0)\,\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1)\,\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)$
(1-1-1 pont) $\mathbb{P}(B|A_0) = 0$, $\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 1$
(2-2 pont) $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{24 \cdot 8}{\binom{32}{2}} = \dfrac{12}{31}$, $\mathbb{P}(A_2) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{7}{124}$
(Nincs szükségünk $\mathbb{P}(A_0) = \dfrac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}}$ kiszámolására, ezért külön pont nem jár érte, de ha valamiért csak ez szerepel és a másik kettő nem, akkor lehet rá pontot adni.)
(1 pont) Behelyettesítve: $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{31} + 1 \cdot \frac{7}{124}$
(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

(b)
(1 pont) A kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(A_2|B)$
(1 pont) Bayes-tételből
(2 pont) $\mathbb{P}(A_2|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_2)\,\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B)}$
(2 pont) behelyettesítve: $\mathbb{P}(A_2|B) = \dfrac{1 \cdot \frac{7}{124}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{7}{31}$

3. Válasszunk egy-egy számot egymástól függetlenül véletlenszerűen a $[0, 2]$ és $[0, 4]$ intervallumon. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az összegük 3 és 5 közé esik?

Megoldás:
(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy pont választásával a $[0, 2] \times [0, 4]$ téglalapon.
(2 pont) Ez az Ω eseménytér.
(2 pont) A kedvező terület ezen téglalapnak az $x + y = 3$ és az $x + y = 5$ egyenes közé eső része.
(3 pont) jó ábra
(4 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség$= \dfrac{T_{kedvezo}}{T_\Omega}$
(2 pont) $T_\Omega = 2 \cdot 4 = 8$
(3 pont) $T_{kedvezo} = \dfrac{7}{2}$ (tetszőleges módon kiszámolva)
(2 pont) A kérdezett valószínűség tehát $\dfrac{7}{16}$

4. Sándor egy n hosszú bitsorozatot szeretne elküldeni Tamásnak, de tudják, hogy a csatornán, amin kommunikálnak, minden átküldött bit egymástól függetlenül 1% valószínűséggel meghibásodik, azaz egy elküldött 1-esből 0, míg egy elküldött 0-ból 1 lesz. Erre a problémára azt az egyszerű megoldást találják ki, hogy Sándor minden egyes bitet egymás után háromszor megismétel, majd megy tovább a következő bitre (és így végeredményben egy $3n$ hosszú sorozatot küld), Tamás pedig az egymás utáni hármas blokkokból úgy dekódolja az üzenetet, hogy minden bithez tartozó hármasból a többször szereplő értéket veszi jónak (azaz ha például az 101 hármast kapja, akkor ezt 1-es értéknek veszi).
Milyen hosszú lehet legfeljebb az elküldött eredeti üzenet (azaz maximum mekkora lehet n értéke), ha azt szeretnék, hogy az Tamáshoz legalább 99% valószínűséggel hibátlanul jusson el?

Megoldás:
(2 pont) Egy hármasból meghibásodó bitek száma $\sim B(3, 0.01)$
(2 pont) Egy adott bitet Tamás, akkor dekódol jól, ha az átküldött hármasból legfeljebb egy hibásodik meg.
Jelölje ennek valószínűségét p_{hb} (helyes bit valószínűség)
(2 pont) $p_{hb} = 0.99^3 + 3 \cdot 0.01 \cdot 0.99^2$
(2 pont) $p_{hb} = 0.999702$
(1 pont) Tamás helyesen dekódolja az üzenetet, ha minden bitjét jól dekódolja
(2 pont) ennek valószínűsége $(p_{hb})^n = (0.999702)^n$
(1 pont) mert függetlenül hibásodnak meg.
(2 pont) Azt szeretnénk tehát, hogy $(0.999702)^n \geq 0.99$
(2 pont) Logaritmusát véve a két oldalnak $n \cdot \ln 0.999702 \geq \ln 0.99$
(2 pont) Ahonnan $n \leq \dfrac{\ln 0.99}{\ln 0.999702} \approx 33.7209$
(2 pont) Tehát az üzenet hossza legfeljebb 33 lehet.

5. Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9}, & \text{ha } x \in (1; c) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

hozzárendeléssel megadott függvényt, ahol $c > 1$ egy valós paraméter.
(a) Határozzuk meg a c értékét úgy, hogy a fenti függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen!
(b) Legyen X egy olyan valószínűségi változó, amelynek $f(x)$ a sűrűségfüggvénye. Mennyi X várható értéke?

Megoldás:
(a)
(1 pont) f nemnegatív
(2 pont) az előadáson tanult tétel szerint pontosan akkor sűrűségfüggvény, ha $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$
(2 pont) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^c \frac{(x-1)^2}{9}\,dx$
(2 pont) $= \frac{1}{9}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^c = \frac{(c-1)^3}{27}$
(2 pont) Azaz $(c-1)^3 = 27$, tehát $c - 1 = 3$,
(1 pont) ebből pedig $c = 4$.

(b)
(2 pont) $\mathbb{E}\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$
(2 pont) $\mathbb{E}\,X = \int_1^4 x \frac{(x-1)^2}{9}\,dx$
(2 pont) $= \int_1^4 (x-1)\frac{(x-1)^2}{9}\,dx + \int_1^4 \frac{(x-1)^2}{9}\,dx$ (akkor is nyilván jár pont, ha a számolásnak nem ezt az útját választja)
(2 pont) $= \frac{1}{9}\left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^4 + 1$

(2 pont) $= \dfrac{13}{4}$

6.* Legyen X egyenletes eloszlású a $[0,2]$ intervallumon és $Y = \frac{1}{(1+X)^2}$.
(a) Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét és várható értékét!
(b) Hasonlítsuk össze a $\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{(1+\mathbb{E}\,X)^2}\right)$ és a $\mathbb{P}\left(Y < \mathbb{E}\,Y\right)$ valószínűségeket!

Megoldás:
(a)
(1 pont) $X' = X + 1$ egyenletes eloszlású az $[1,3]$ intervallumon
(1 pont) eloszlásfüggvénye: $F_{X'}(t) = \frac{t-1}{2}$, ha $t \in [1,3]$
(1 pont) Y eloszlásfüggvénye: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{(1+X)^2} < y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{(X')^2} < y\right)$
(1-1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{1}{X'} < \sqrt{y}\right)$ (hiszen X' nemnegatív)
(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} < X'\right) = 1 - F_{X'}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$
(1 pont) $= 1 - \dfrac{\frac{1}{\sqrt{y}} - 1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$
(1 pont) ha $y \in \left[\frac{1}{9}, 1\right]$
(1 pont) Y sűrűségfüggvénye deriválással adódik: $f_y(y) = \dfrac{1}{4y^{3/2}}$
(1 pont) ha $y \in \left[\frac{1}{9}, 1\right]$, különben 0
(3 pont)

$$\mathbb{E}\,Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_{\frac{1}{9}}^{1} y \frac{1}{4y^{3/2}}\,dy = \int_{\frac{1}{9}}^{1} \frac{1}{4y^{1/2}}\,dy = \frac{1}{4}\left[2y^{1/2}\right]_{\frac{1}{9}}^{1} = \frac{1}{3}$$

(a transzformáltra vonatkozó várható értékkel is kiszámolható)
(ebben a feladatban a várható érték definíciójáért önmagában nem jár pont)

(b)
(1 pont) $\mathbb{E}\,X = 1$
(2 pont) az első valószínűség tehát $F_Y\left(\frac{1}{4}\right)$
(1 pont) a második valószínűség $F_Y\left(\frac{1}{3}\right)$
(2 pont) az $F_Y(y)$ eloszlásfüggvény esetünkben szigorúan monoton növő
(1 pont) ezért a $\mathbb{P}\left(Y < \mathbb{E}\,Y\right)$ valószínűség nagyobb.