Matek A2✗ puska vizsgára

Rátky Marcell

2009. január 5.

Gradiens $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$

Adott pontbeli **érintősík egyenlete**

1. ∇f kiszámítása
2. $\nabla f(r_0)$, tehát $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pontot behelyettesítjük ∇f-be
3. $(r - r_0) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$
4. $< \nabla f(r_0), (r - r_0) >= 0$ egyenlet megoldása (x,y,z balra, konstans jobbra)

   $< (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) >= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
5. A felírt egyenlet az r_0 pontbeli érintősík egyenlete

Iránymenti derivált

1. ∇f kiszámítása
2. $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$

   $\|\underline{v}\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$
3. $D_v f =< \nabla f, \underline{e} >$, ez az iránymenti derivált
4. Ha kéri a feladat, helyettesítsünk be $(D_v f(P))$

Taylor-sor

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f^{''}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Speciális Taylor-sorok

Adott x_0 pont körüli Taylor-sornál: $x := (x - x_0)$

$\boxed{\frac{x^m}{1-x}} = \sum_{n=m}^{\infty} x^n$, ahol |x|<1

$$\boxed{\arctan(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\boxed{e^x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$\boxed{\ln(x)} = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x - 1)^n$$

$$\boxed{\sin(x)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\boxed{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\boxed{\sinh(x)} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\boxed{\cosh(x)} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

Függvény deriválhatósága

1. Létezzen $f(a) + \nabla f(x - a) + \varepsilon(x - a)$

   ahol $\varepsilon(x - a) \equiv f(x - a)$
2. Létezzen (és legyen véges) $\lim_{x \to a} \frac{\varepsilon(x - a)}{d(x, a)}$

   ahol $d(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$

Sorozat konvergenciája

Hányadoskritérium: $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$

Gyökkritérium: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

$$\text{Ha } q \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{konvergens} \\ > 1 & \Rightarrow \text{divergens} \\ = 1 & \Rightarrow \text{?} \to \text{integrálkritérium} \end{cases}$$

Integrálkritérium: $\sum$ jelet cseréljünk $\int$ jelre!

Konvergenciasugár: $\frac{1}{q}$