Vizsgadolgozat

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
   (a) Hogyan definiáljuk az $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixát?
   (b) Legyen X folytonos valószínűségi változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ létezik. Fejezzük ki $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ értékét az X sűrűségfüggvényének segítségével.

2. Béla minden héten vásárol 3 sorsjegyet. Mindig két különbőző típusú sorsjegy közül választ, de mindig csak egy típusból vásárol 3 darabot. Az A típusú sorsjegyek közül átlagosan minden 12-edik nyer, míg a B típusúnál 10% a nyerési esély. Szabályos dobókockával dönti el melyik sorsjegyből vásároljon az adott héten. Ha 1-est vagy 2-est dob, akkor az A, különben a B típust választja.
   a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy Béla az adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer?
   b) Feltéve, hogy az adott héten nyert, mennyi a valószínűsége, hogy az A típusból vásárolt?

3. Hering kapitány 20 éves korában kezdett halászni a hajójával. Halásztársaival minden év végén összehasonlították az egy év alatt hajójukon fogott halak összsúlyát. Megállapították, hogy az egy halászhajón kifogott halak össztömegének átlaga 150 tonna, szórása pedig 30 tonna. Az évek során nem változott az eloszlás, és az egyes évek fogásai egymástól függetlenek. Valószínűségszámítási tudását felhasználva, a kapitány arra jutott, hogy egy adott hajó eddigi (attól az évtől kezdve, amikor ő elkezdett hajózni) összes fogásának össztömegének, szórása 150 tonna.
   a) Hány éves a kapitány?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy az eddigi évek alatt (amióta a kaptitány halászik) egy halászhajón fogott halak össztömege több, mint 3%-kal meghaladja az egy hajóra vonatkozó összfogás tömegének várható értékét?

4. A huncut manók útközben falatoztak Mikulás zsákjából, ezért az utolsó házhoz érve már csak két különböző méretű csokimikulás maradt, de a házban 4 gyerek lakott. Nem merték bevallani Mikulásnak, ezért ketten közülük gyorsan megfogták a két csokit, és egymástól függetlenül véletlenszerűen beledobták egy-egy gyerek csizmájába. A gyerekek közül ketten, Andi és Bea, mindig féltékenyen figyelték egymás ajándékát. Legyen X az Andi által kapott csokimikulások száma, és Y annak az eseménynek az indikátora, hogy ugyanannyi csokit kapott Andi és Bea.
   a) Adjuk meg X és Y együttes eloszlását. Független-e a két valószínűségi változó?
   b) Adjuk meg X és Y kovarianciáját, valamint $Z = -2X + 3$ szórását.

5. Legyen (X, Y) olyan folytonos valószínűségi vektorváltozó, aminek sűrűségfüggvénye
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-3x-2y} & \text{ha } 0 < x \text{ és } 0 < y, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   a) Határozzuk meg α értékét! **b)** Adjuk meg az $\mathbb{E}(X \cdot Y + 2 \cdot X^2 \frac{1}{Y} + 1 | Y)$ regressziót!

6.* Valahányszor Gazsi bácsi eltör egy botot, a töréspont a bot középső harmadán egyenletesen helyezkedik el. Gazsi bácsi most kézbe vesz egy 15 centiméter hosszú botot, eltöri, majd a bal kezében lévő darabot ismét eltöri. Adjuk meg a második törés után a bal kezében maradó darab hosszának sűrűségfüggvényét.

Tudnivalók: A vizsga időtartama 100 perc. Számológépet lehet használni. A számszerű megoldásokat 4 értékes jegyre kerekítsük. A teljes pontszám eléréséhez a megoldás menete is szükséges, beleértve az egyes lépéseknél felhasznált tulajdonságok és tételek jelzését. A vizsga első 30 percében nem lehet a termet elhagyni.

Eloszlás neve	Jelölés	Ran(X)	$\mathbb{P}(X=k)$ vagy $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
indikátor	$\mathbf{1}(p)$	$\{0,1\}$	$p,\ 1-p$		p	$p(1-p)$
binomiális	$\mathrm{B}(n;p)$	$\{0,1,...,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$\{0,1,...\}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$		λ	λ
geometriai	$\mathrm{Geo}(p)$	$\{1,2,...\}$	$(1-p)^{k-1}p$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
egyenletes	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponenciális	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\mathbb{R}^+$	$1-e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normális	$\mathrm{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim normális	$\mathrm{N}\left(\underline{\mu};\underline{\underline{\Sigma}}\right)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\underline{\underline{\Sigma}})}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	$\underline{\underline{\Sigma}}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998