Folytonos jelek kezdeti és állandósult (azaz vég-) értéke

Tegyük fel, hogy u(t) egy folytonos belépő jel. A belépő azért kell, hogy lehessen Laplace-transzformálni. A lényeg, hogy a jel kezdeti és végértékét a Laplace-transzformáltjából tudhatjuk meg az úgynevezett végérték-tételek segítségével.

Első körben kell a jel transzformáltja: $U(s) = L\{u(t)\}$

Ha ez megvan, akkor jöhetnek a tételek:

Kezdeti érték: $u(+0) = \lim_{s \to \infty}(s \cdot U(s))$. Figyelni kell az „s" szorzóra, mert ha azt lehagyja az ember, akkor rossz eredményt kap.

Végérték: $u(\infty) = \lim_{s \to 0}(s \cdot U(s))$

Egy példát megemlítenék, amin páran fenn szoktak akadni. Ez az, amikor adnak egy rendszert, és mondjuk az átmeneti függvény kezdeti és végértékét kell kiszámolni. Ehhez első körben azt kell tudni, hogy az átmeneti függvény az, amit jelekből ugrásválasznak hívtunk, tehát az egységugrásra adott válasz. Legyen a kérdéses rendszer átviteli függvénye H(s). Adott u(t) gerjesztésre (bemenő jelre) a választ az átviteli függvény ismeretében úgy lehet számolni, hogy a jelet Laplace-transzformáljuk, azaz kiszámoljuk U(s)-t. Ezután a válasz transzformáltját sima szorzással kapjuk meg: Y(s)=U(s)H(s).

Az egységugrás transzformáltja: $U(s) = L\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$.

Az egységugrásra adott válasz transzformáltja: $Y(s) = U(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot H(s)$

Ez az ugrásválasz (vagy átmeneti függvény) Laplace-transzformáltja. Ha ez megvan, akkor az átmeneti függvény kezdeti és végértékét simán ki tudjuk számolni. (Az átmeneti függvényt v(t)-vel szokták jelölni).

Kezdeti érték: $v(+0) = \lim_{s \to \infty}(s \cdot Y(s)) = \lim_{s \to \infty}\left(s \cdot \frac{1}{s} \cdot H(s)\right) = \lim_{s \to \infty}(H(s))$.

Végérték (állandósult állapot): $v(\infty) = \lim_{s \to 0}(s \cdot Y(s)) = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot \frac{1}{s} \cdot H(s)\right) = \lim_{s \to 0}(H(s))$.

Tehát ezen a példán látni, hogy átmeneti függvény kezdeti és végérték számításánál ezért esik ki az „s"-es szorzó a tételből (ezt szokták sokan nem érteni).

Diszkrét jelek kezdeti és állandósult (azaz vég-) értéke

Tegyük fel, hogy u[k] egy diszkrét idejű belépő jel. A belépő azért kell, hogy lehessen Z-transzformálni. A lényeg, hogy a jel kezdeti és végértékét a Z-transzformáltjából tudhatjuk meg az úgynevezett végérték-tételek segítségével.

Első körben kell a jel transzformáltja: $U(z) = Z\{u[k]\}$

Ha ez megvan, akkor jöhetnek a tételek:

Kezdeti érték: $u[0] = \lim_{z\to\infty}(U(z))$. Itt nincs semmilyen szorzó.

Végérték: $u[\infty] = \lim_{z\to 1}\left(\left(1 - z^{-1}\right)\cdot U(z)\right)$. Itt a folytonos esettől van egy eltérés, méghozzá z-nek nem 0-hoz, hanem 1-hez kell tartania! Ezen kívül itt megjelenik egy „1-z^{-1}” szorzó is, amire figyelni kell.

Nézzük meg itt is a tételeket átmeneti függvényre. Legyen a rendszer impulzusátviteli függvénye G(z). Adott u[k] gerjesztésre (bemenő jelre) a választ az impulzusátviteli függvény ismeretében úgy lehet számolni, hogy a jelet Z-transzformáljuk, azaz kiszámoljuk U(z)-t. Ezután a válasz transzformáltját sima szorzással kapjuk meg: Y(z)=U(z)G(z).

A diszkrét egységugrás transzformáltja: $U(z) = L\{\varepsilon[k]\} = \dfrac{z}{z-1}$.

Az egységugrásra adott válasz transzformáltja: $Y(z) = U(z)\cdot G(z) = \dfrac{z}{z-1}\cdot G(z)$

Ez az ugrásválasz (vagy átmeneti függvény) Z-transzformáltja. Ha ez megvan, akkor az átmeneti függvény kezdeti és végértékét simán ki tudjuk számolni. (Az átmeneti függvényt v[k]-val jelölöm (diszkrétnél nem tudom, mi a hivatalos jelölés :D)).

Kezdeti érték: $v[0] = \lim_{z\to\infty}(Y(z)) = \lim_{z\to\infty}\left(\dfrac{z}{z-1}\cdot G(z)\right)$.

Végérték: $v[\infty] = \lim_{z\to 1}\left(\left(1 - z^{-1}\right)\cdot Y(z)\right) = \lim_{z\to 1}\left(\left(1 - z^{-1}\right)\cdot \dfrac{z}{z-1}\cdot G(z)\right) = \lim_{z\to 1}(G(z))$.

Tehát ezen a példán látni, hogy átmeneti függvény végértékének számításánál tulajdonképpen csak G(z) határértéke kell. Érdemes megjegyezni, hogy ilyenkor, ha G(z) folytonos z=1-ben, akkor a határérték kiszámításához tulajdonképpen csak be kell helyettesíteni z=1-et G(z) egyenletébe.