1	2	3	4	5	6	$\sum$

FelsMatInf_AlkAlg 3. vizsga 19-01-15 Neptun: __________ **Név:** ____________________

A vizsga feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden papírlap jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 12.

1. *Igaz–Hamis I/H (4 pont – minden hiba −1)*

a) Egy lineáris $A : \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ vektor egyértelműen előáll A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorainak összegeként. ☐

b) Egyetlen zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix sem diagonalizálható! ☐

c) Ha két 5×5-ös mátrix mindegyikének $\{-1, 0, 1\}$ a spektruma, akkor kongruensek. ☐

d) Minden valós pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van. ☐

e) Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $\mathbb{C}^n$ előáll annyi $\mathbf{A}$-invariáns altér direkt összegeként, ahány különböző sajátértéke van. ☐

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) A Cayley–Hamilton-tétel szerint bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixra

b) Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^n$-et az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ hipersíkra merőlegesen tükröző transzformációnak?

c) Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Melyek az $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezések?

Az $x \mapsto$

d) *(2 pont)* Az alábbi táblázatban párosítsuk össze a bal felében található mátrixtulajdonságokat a jobb oldalán található hasonlóság-típusokkal, ahol néhol a diagonális alak elemeire is adunk további feltételt. A választ a számok szerint növekvő sorrendben adjuk meg, pl. 1E 2B 3C 4A 5D.

mátrix	hasonlóság	diagonálisok
1: valós szimmetrikus	A: unitér	egységnyi absz.ért.
2: önadjungált	B: unitér	
3: normális	C: unitér	imaginárius
4: ferdén önadjungált	D: ortogonális	
5: unitér	E: unitér	valós

e) Azt mondjuk, hogy a valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kongruensek ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha

f) *(2 pont)* Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot, ahol $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}$.

3. Adjuk meg a következő egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen optimális megoldását: *(4 pont)*

$$\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \\ 6x + 2y = -2 \end{cases}$$

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ mátrix Frobenius-, 2- és ∞-normáját! *(4 pont)*

5. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ mátrix Perron-vektorait és az

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n$$

határértéket! *(6 pont)*

6. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$