

AZ ANYAG MÁGNESES TULAJDONSÁGAI

Az engedelmes (mágnes) acél az eleven ösztönétől vezérelve mindig az öt vonzó pólus felé fordul.

CHARLES DARWIN

33.1 Bevezetés

Eddigi tanulmányaink során feltételeztük, hogy az áramvezetőkkel létrehozott mágneses erőtérrel körülvett közeg a vákuum. Egyes anyagok jelenlétében a mágneses erőtér ettől nagyon különbözhet. A klasszikus felfogás szerint az elektronok az atomokban körpályán mozognak és így mikroszkopikus mágneses dipólusoknak tekinthetők. Bizonyos anyagokban ezek a mágneses dipólusok az erőtér irányába rendeződhetnek és az eredő mágneses erőtér tulajdonságait nagy mértékben befolyásolhatják.

Az anyagok mágneses tulajdonságainak teljes megértéséhez a kvantumelmélet ismerete szükséges; ez viszont ebben a fejezetben nem lehet célunk. Mindazonáltal, anélkül, hogy mélyen a részletekbe merülnénk, az anyagok mágneses viselkedésének három leggyakoribb típusáról: a paramágnességről, diamágnességről és ferromágnességről rövid leírást közlünk.

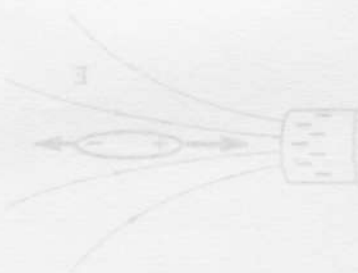
33.2 Az anyagok mágneses tulajdonságai

Az anyagok mágneses tulajdonságainak eredetét atomszerkezetükben kell keresni. Jelen céljainknak megfelel, ha az atomot pozitív töltésű atommagból és a körülötte körpályákon keringő elektronokból felépítettnek tekintjük. Az elektron keringése mikroszkopikus köráramnak felel meg, ami mágneses dipólustérrel jár együtt. Ráadásul azt is feltételezzük, hogy az elektronok pörgettyűként, tengelyük körül is forognak („spinjük” van), és ebből is származik mágneses dipólusmomentum.¹ Az atom eredő μ mágneses momentának (30-14 képlet) egyik része az elektronok keringéséből, a másik pedig az elektronok forgó mozgásából származik. Általános tendencia, hogy az atomokon belül az ellenkező irányú mágneses dipólusok párokba rendeződnek, így az atom eredő mágneses momentuma zérus is lehet. Más esetekben, az elemi mágneses momentumok nem teljesen oltják ki egymást. Például, olyan atomokban, amelyekben páratlan számú elektron van, szükségsze-

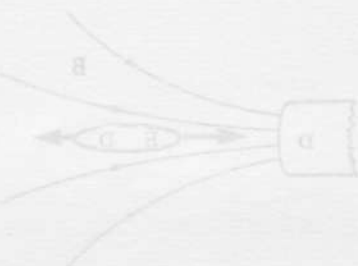
¹ A forgó elektron modellje nagyon leegyszerűsített és ezért nem szabad szó szerint venni. Az elektronok spinje és azzal kapcsolatos tulajdonságok a modern kvantumelmélet keretein belül jól értelmezhetők. Mindazonáltal a tengelye körül forgó elektron klasszikus modellje nagyon hasznos a spinrel kapcsolatos fogalmak bevezetéséhez.

33-3 ábra

A mágneses erőtérben szabadon mozgó áramhurok úgy áll be, hogy μ mágneses dipólusmomentuma az erőtér irányába mutat. Ha az erőtér erőssége az áramhurok ferdén áthalad, az áramhurok ferdén áll be, azaz a mágneses erőtér irányába mutat. Ha az erőtér erőssége az áramhurok ferdén áthalad, az áramhurok ferdén áll be, azaz a mágneses erőtér irányába mutat.



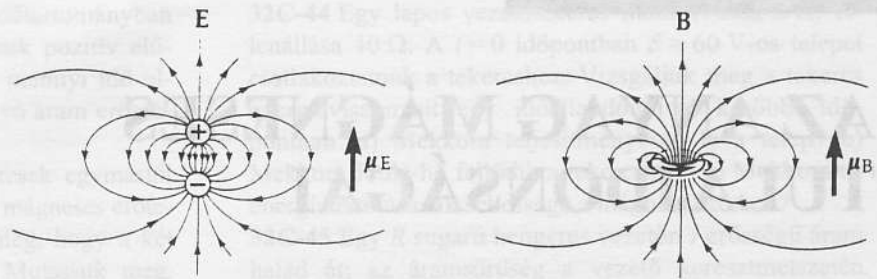
(a) Inhomogén mágneses erőtérben egy mágneses dipólus olyan erőtér felé mutat, amely a nagyobb erőtér felé mutat.



(b) Inhomogén mágneses erőtérben egy mágneses dipólus olyan erőtér felé mutat, amely a nagyobb erőtér felé mutat.

33-3 ábra

Dipólusok inhomogén erőtérben



(a) Elektromos dipólus. A középpontban az elektromos erővonal az elektromos dipólus-vektorral ellentétes irányú.

(b) Köráram, mint mágneses dipólus. A középpontban a mágneses erővonal a mágneses dipólus-vektorral azonos irányú.

33-1 ábra

Elektromos és mágneses dipólusok összehasonlítása. Mindkét dipólusvektor felfelé mutat. A dipólusoktól távol, az erővonalstruktúra hasonló; a középpont környezetében azonban a **B** és **E** vektorok ellentétes irányúak.

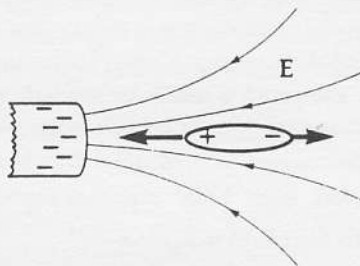
riuen van egy *pár nélküli* elektron, minek következtében az eredő mágneses momentum zérustól különbözik.

A paramágnesség

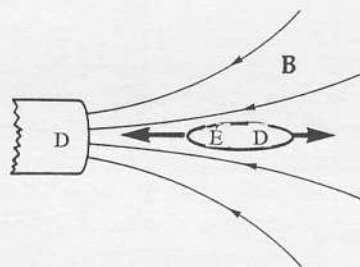
A hőmozgás következtében a mágneses dipólussal rendelkező atomok nem rendeződnek, ezért az atomi mágneses dipólusok iránya véletlenszerű és a makroszkopikus anyag eredő dipólusmomentuma zérus. Külső mágneses erőtér hatására azonban, a 30. fejezetben tárgyaltak szerint, a mágneses dipólusokra forgatónyomaték hat, ami azokat az erőtér irányába igyekszik beforgatni. Mágneses erőtér jelenlétében egyes anyagokban eredő *mágneses dipólusmomentum* alakul ki; ez a mágneses erőtér erősségétől és a hőmérséklettől függ (a hőmozgás ugyanis „megakadályozza” a dipólusok orientációját). A mágneses erőtér megszűnése után az egyes atomi dipólusok orientációját a hőmozgás megszünteti, és az anyag elveszíti mágneses dipólusmomentumát. Azokat az anyagokat, amelyek mágneses erőtérben így viselkednek, **paramágneseknek** nevezzük.

Amikor a mágneses dipólusok az erőtér irányába rendeződnek, akkor saját mágneses erőtérük az adott erőtérhez hozzáadódik és kis mértékben megnöveli annak a térerősségét. Ezt illusztrálандó, a 33-1 ábrán összehasonlítunk egy elektromos és egy mágneses dipólust: noha a dipólustól távol az erővonalstruktúra nagyon hasonló, a középpont környezetében a **B** és **E** vektorok éppen *ellentétes* irányúak. Tehát, amikor az erőtér elektromos dipólusokat rendez (27.3 fejezet), a dipólus töltései közötti erőtérben a dipólus erővonalainak az iránya és az erőtér iránya ellentétes; ennek következményeként az anyagban az eredő elektromos térerősség csökken. A mágneses erőtérben rendeződő mágneses dipólusok közepén a dipólusok erővonalainak és a mágneses erőtér iránya megegyezik; ezért az anyag belsejében a mágneses fluxussűrűség megnő. Az effektus kicsi, ugyanis a hőmozgás miatt a mágneses dipólusoknak mindig csak igen kis hányada rendeződik a mágneses erőtér irányába.

Inhomogén mágneses erőtér jelenlétében a mágneses dipólusokra a *nagyobb térerősségű hely felé mutató eredő erő hat*. A jelenség hasonlít az elektromos dipólusok esetén tapasztaltnak: a 33-2a ábra szerint inhomogén elektromos erőtérben egy elektromos dipólusra a nagyobb térerősségű hely felé mutató eredő erő hat. Bár túlzott egyszerűsítés a mágneses dipólusokról azt képzelni, hogy kicsi rúd-mágnesek, déli és északi pólusokkal (33-2b ábra), mégis ez az egyszerűsítő modell teszi érthetővé a fellépő vonzóerőt. A 33-3 ábrán ugyanezt az effektust egy másik modellel illusztráltuk: a mágneses dipólus mint köráram széttartó mágneses erőtérben a 33-2b ábra mágneseihez hasonlóan viselkedik.



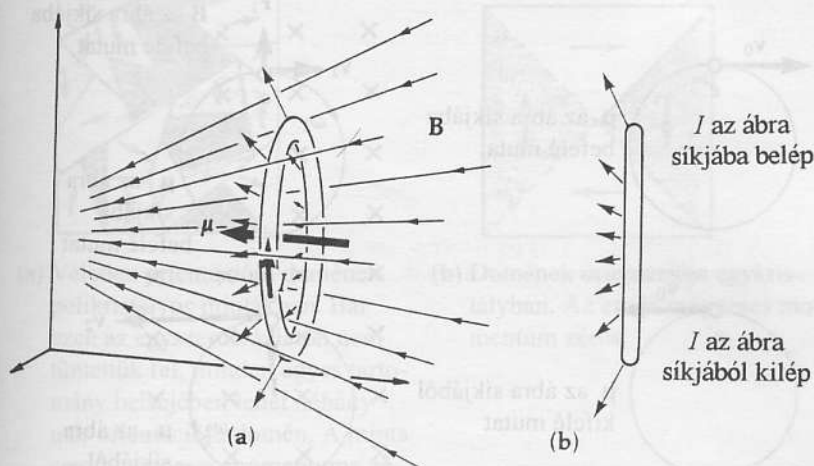
(a) Inhomogén elektromos erőtérben egy elektromos dipólusra olyan eredő erő hat, amely a nagyobb térerősségű tartomány felé húzza.



(b) Inhomogén mágneses erőtérben egy mágneses dipólusra olyan eredő erő hat, amely a nagyobb térerősségű tartomány felé húzza.

33-2 ábra

Dipólusok inhomogén erőtérben.



33-3 ábra

A mágneses erőterben szabadon mozgó áramhurok úgy áll be, hogy μ mágneses dipólusmomentuma az erőter irányába mutasson. Ha az erőter inhomogén, az áramhurokra ferdén kifelé, ható mágneses erők eredője olyan irányú (lásd a (b) ábrán), hogy a hurok a nagyobb térerősségű tartomány felé mozdul el.

33-1 PÉLDA

A Bohr atommodell szerint a $(-e)$ töltésű, m tömegű elektron v sebességgel r sugarú körpályán mozog, így köráramnak is tekinthető. a) Számítsuk ki e körpályának megfelelő μ_l pályamomentumot.² b) A kvantumelmélet szerint a pályához tartozó mvr impulzusmomentum kvantált, nagysága csak $h/2\pi$ egész számú többszöröse lehet (ahol h a Planck állandó; bővebben lásd a 42. és 44. fejezetekben). Mekkora a legkisebb (azaz $h/2\pi$) impulzusmomentumú pályához tartozó mágneses dipólusmomentum? Fejezzük ki μ_l dipólusmomentumot h és m függvényében.

MEGOLDÁS

(a) A mágneses pályamomentum $\mu_l = IA$, ahol A az áramhurok területe. Az áramerősség $I = q/T$, ahol $T = 2\pi r/v$ a mozgás periódusideje. Így:

$$\mu_l = IA = \left(\frac{e}{2\pi r/v} \right) (\pi r^2) = \frac{evr}{2}$$

(b) Az impulzusmomentum $L = mvr = h/2\pi$. Így:

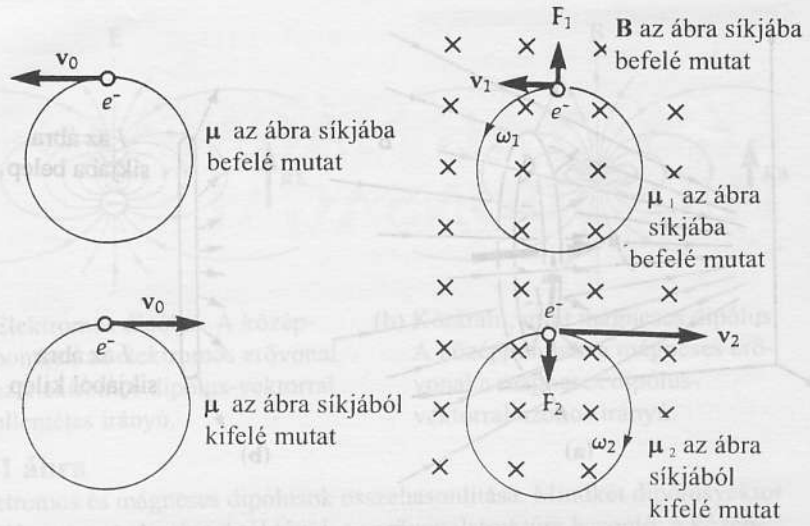
$$\mu_l = \frac{evr}{2} = \left(\frac{e}{2m} \right) (mvr) = \frac{eh}{4\pi m}$$

Ez a mennyiség, a *Bohr magneton*, az atomelméletben a mágneses momentum alapegysége

A diamágnesség

Néhány anyagot (kémiai elemet) a permanens mágnesek *taszítanak*, ezeket **diamágneses** anyagoknak nevezzük. Michael Faraday bizmuton észlelte ezt a jelenséget; de az ezüst is diamágneses. Az effektus meglehetősen gyenge.

² A mágneses pályamomentumnak μ_l és a mágneses spinmomentumnak μ_s jelölését a modern kvantumelmélet is alkalmazza.



(a) A két elektron ellentétes irányban kering. Az eredő mágneses dipólusmomentum zérus, ugyanis a két dipólusmomentum ellentétes irányú és azonos nagyságú.
 (b) A külső mágneses erőtér a pályák sugarát nem változtatja meg; viszont F_1 illetve F_2 járulékos mágneses erőt kelt, ami miatt $v_2 > v_1$. Következésképpen $\mu_2 > \mu_1$, és az eredő dipólusmomentum iránya a külső erőtér \mathbf{B} vektoráéval ellentétes.

33-4 ábra
 A diamágnesesség eredete

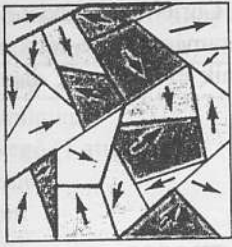
Azon anyagok, melyek atomjainak (vagy molekuláinak) eredő mágneses momentuma zérus, diamágnesek. A permanens mágneses momentummal rendelkező atomokból felépülő (nem ferromágneses) anyagok lehetnek paramágnesesek vagy diamágnesesek is, attól függően, hogy melyik hatás az erősebb. A diamágnesesség jelenségének a megértéséhez, idézzük fel a klasszikus atommodell, melyben a pozitív töltésű atommag körül keringő elektronokat elektrosztatikus kölcsönhatás tartja a pályájukon. A diamágneses atomokban egyes elektronok az egyik irányban keringenek, mások az ellenkezőben, minek eredményeként az elemi mágneses dipólusmomentumok éppen semlegesítik egymást. Tekintsünk két azonos sebességgel, ellentétes irányban keringő elektront (33-4a ábra). (A könnyebb érthetőség kedvéért külön-külön ábrázoltuk őket.) Minthogy az elektronok ellentétes irányban keringenek, eredő mágneses dipólusmomentumuk zérus. Ha az atom külső mágneses erőtérbe kerül, a keringő elektronokra sugárirányú $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ erő hat. Az egyik esetben az erő hozzáadódik az atommag és az elektron közötti sugárirányú vonzóerőhöz, a másik esetben azzal ellentétes irányú. Megmutatható, hogy a pályasugár változatlan marad, viszont az mrv^2 centripetális erő megváltozásához vezet. Így az egyik esetben a keringő elektronnak a sebessége megnő, és emiatt \mathbf{B} -vel ellentétes irányú, nagyobb mágneses momentuma lesz, a másik esetben a sebesség csökken, és ez \mathbf{B} -vel azonos irányú, kisebb mágneses momentumot eredményez. Mindkét effektus a \mathbf{B} fluxussűrűségű külső mágneses erőtérrel ellentétes irányú eredő dipólusmomentum kialakulására vezet (ellentétben a paramágneses anyagokkal, ahol a két vektor azonos irányú). Mivel a kialakult (makroszkopikus) mágneses momentum a mágneses erőtérrel ellentétes irányú, ezért ha a diamágneses anyagot állandó mágnes inhomogén erőtérébe helyezük, akkor a csökkenő erőtér irányába mutató erő hat rá. Az állandó mágnes és a diamágneses anyag taszítja egymást. Minthogy minden anyag elektronpárokat tartalmazó atomokból épül fel, a diamágneses effektus tulajdonképpen minden anyagban bekövetkezik, csak hogy a permanens dipólusoktól származó paramágneses hatás rendszerint sokkal nagyobb ennél, s az effektust elfedi. A paramágneses (vagy ferromágneses) anyagokra az erősebb mágneses erőtér irányába mutató vonzóerő hat.

33-1 ábra
 Dipólusok inhomogén erőtérben.

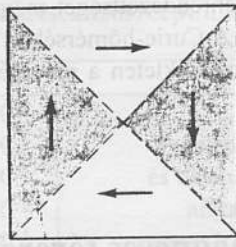
(a) Vél...
 pol...
 ez...
 tün...
 má...
 má...
 er...
 ru...
33-5
 Ferro...
 dése.

A fe

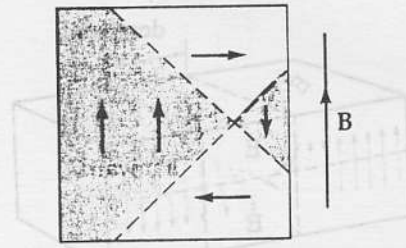
A má...
 gado...
 roma...
 dekk...
 alap...
 köve...
 a sz...
 tart...
 zód...
 aká...
 tart...
 No...
 dor...
 me...
 Kü...
 dor...
 mo...
 do...
 ses...
 dil...
 ro...
 do...
 m...
 fe...
 al...
 zé...
 ú...
 —



(a) Véletlen orientációjú domének polikristályos mintákban. Bár ezen az egyszerű vázlaton nem tüntettük fel, minden egyes tartomány belsejében lehet néhány más orientációjú domén. A minta eredő mágneses momentuma zérus.



(b) Domének orientációja egykristályban. Az eredő mágneses momentum zérus.



(c) Ha külső mágneses erőter hat a mintára, akkor azoknak a doméneknek a térfogata, amelyek mágneses momentumának iránya egybeesik a B mágneses indukcióvektor irányával, nőni kezd; a szomszédos, kedvezőtlen orientációjú doméneké pedig csökken. Ennek eredményeként a doménfal az ábrán vázolt módon eltolódik. A kristálynak B -vel azonos irányú eredő mágneses momentuma alakul ki.

33-5 ábra

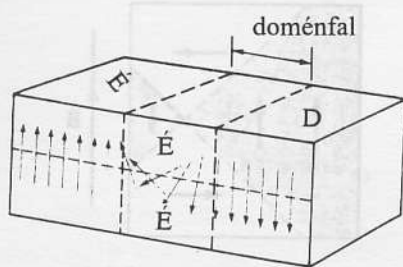
Ferromágneses anyagok mágnesesződése.

A ferromágnesesség

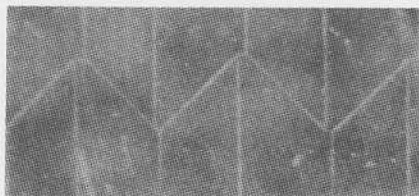
A mágneses anyagok harmadik osztályába öt elem, a vas, a kobalt, a nikkelt, a gadolínium és a diszprózium, továbbá egyes ötvözetek tartoznak. Ezeket ferromágneses anyagoknak nevezzük; rajtuk a mágneses hatások nagyságrendekkel nagyobbak, mint a paramágneses és diamágneses anyagokon. Az alapvető különbség onnan ered, hogy kvantummechanikai kölcsönhatások következményeként a **ferromágneses** atomok mágneses dipólusmomentumai a szomszéd atomok dipólusaira olyan erőt gyakorolnak, hogy az anyag egyes tartományjaiban (doménben) az összes atomi dipólusok egy irányba rendeződnek. A mágneses domének 10^{-6} – 10^{-2} cm^3 térfogatúak, így egy-egy domén akár 10^{17} – 10^{21} atomot is tartalmazhat. A különböző orientációjú dipólusokat tartalmazó tartományok közötti határrejtegeket doménfalaknak nevezzük. Noha az egyes doménekben a mágneses rendeződés teljes, szomszédos domének mágneses rendezettsége lehet különböző, és így az eredő mágneses momentum zérus: az anyag makroszkopikusan nem mágneses (33-5a ábra). Külső mágneses erőter bekapcsolásakor az erőterrel megegyező irányú domének nőni kezdenek, a szomszédos, más orientációjú domének mágneses momentuma „átrendeződik” az erőter irányába, és a doménfal eltolódik. A doménfalak a 33-6 ábrán vázolt technikával tehetők láthatóvá. Ha a mágneses térerősség elegendően nagy, a domén összes dipólusa egyszerre rendeződik át az erőter irányába.³ Ha a külső mágneses teret megszüntetjük, a makroszkopikus mágneses momentum (nagy része) megmarad, minthogy a nagy doméneket a hőmozgás nem tudja széttörni. Így a „mágnesezett” anyagoknak maradandó, permanens mágneses momentuma lesz. Permanens mágneseket ferromágneses anyagokból szokás készíteni; ilyen például a *permalloy* és az *alnico*. Ezek alumínium-nikkel-kobalt-vas ötvözetek, melyeknek a mágnesezés után nagy, permanens mágneses momentumuk marad.

Minden ferromágneses anyagra jellemző egy kritikus hőmérséklet, az ún. **Curie-hőmérséklet**, amely felett a hőmozgás energiája elegendő ahhoz,

³ Amikor egy domén mágneses orientációja megváltozik, a domén maga nem fordul el, hanem a kvantummechanikai erők hatására az összes atom mágneses momentuma fordul át szinte egyidejűleg. Ha sokmenetű tekercset helyezünk a mágneses minta köré, és érzékeny erősítőn keresztül hangszóróhoz kötjük, az egyes domének átbillenésekor hirtelen kicsit megváltozó fluxus által létrehozott „áramtűskéket” a hangszóróban sercegésként hallhatóvá lehet tenni. Ezt felfedezőjéről (1919) *Barkhausen-effektusnak* nevezik.



- (a) Az egyes domének közötti határreteg néhány száz atomréteg szélességű; itt a dipólusok iránya fokozatosan változik a két doménre jellemző dipólus-irány között. Ennek következményeként mágneses anyag felületén, a doménfalak környékén a dipólusok iránya a felületből kifelé mutat, és emiatt a felület felett lokalizált, nagyon intenzív mágneses erőtér jelenik meg. A felületre nagyon finom magnetit (vasoxid) szuszpenziót vékonyan felkenve a falak helyét láthatóvá tehetjük, ugyanis a magnetit-szemcsék a nagy térerősségű helyeken ülednek le.



- (b) 3,8 % szilíciumot tartalmazó vasból készült egykristály doménfalai.

33-6 ábra
Mágneses domének



- (a) A légmagos szolenoid egy menetében folyó I áram B_0 mágneses indukcióvektort hoz létre.

hogy a doménrendezettséget megszüntesse. (A vas Curie-hőmérséklete például 770°C) A Curie-hőmérséklet felett az anyag paramágnessé válik; még nagyobb hőmérsékleten a paramágnesség is eltűnik és az anyag diamágneses lesz.

33.3 A mágneses térerősség és a mágneses indukcióvektor

A mágneses anyagok három alaptípusának – *paramágneses*, *diamágneses* és *ferromágneses* anyagok – megismerése után megvizsgáljuk, hogy milyen hatása van annak, ha szolenoid belsejébe paramágneses anyagot helyezünk (33-7 ábra). Tekintsünk egy hosszú szolenoidot, melynek belsejében, (a paramágneses anyag távollétében) a mágneses erőtér fluxussűrűsége a (31-7) egyenlet szerint $B = \mu_0 nI$. Minthogy az egységnyi hosszra jutó menetek száma: $n = N/l$, a tekercs belsejében lévő B_0 fluxussűrűség csak az adott tekercsben folyó I áramerősségtől függ:

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

Ez a képlet vákuumra vonatkozik (és jó közelítéssel igaz az ún. légmagos tekercsre is). Ha a tekercsben valamilyen anyag van, akkor járulékos mágneses tér alakul ki, paramágneses anyagok esetén az orientálódott dipólusok, a diamágneses anyagok esetében az indukált dipólusok következtében. Ez a járulékos B' mágneses tér az eredeti, a tekercsben folyó áram által létrehozott $B_0 = \mu_0 NI/l$ fluxussűrűséggel arányos:

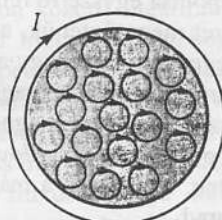
$$B' = \chi \left(\mu_0 \frac{NI}{\ell} \right), \quad (33-1)$$

ahol a χ arányossági tényezőt **mágneses szuszceptibilitásnak** nevezzük. Ennek értéke nagyon kicsiny, 10^{-5} nagyságrendű, pozitív a paramágneses és negatív a diamágneses anyagok esetében. A teljes fluxussűrűség tehát:

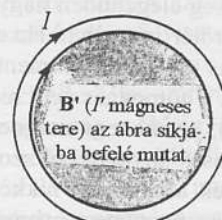
$$B = B_0 + B'$$

$$B = \left(\mu_0 \frac{NI}{\ell} \right) + \chi \left(\mu_0 \frac{NI}{\ell} \right)$$

vagy egyszerűen $B = \mu_0 (1 + \chi) H \quad (33-2)$



- (b) Paramágneses anyagból készült magra tekercselt szolenoid. A B_0 mágneses indukcióvektorú erőtér a paramágneses anyag mágneses dipólusmomentumait egy irányba rendezi.



- (c) Az egy irányba rendezett mágneses momentumok olyan hatásúak, mintha a mag körül I' köráram folyna, és a B_0 mágneses indukcióvektorral azonos irányú B' fluxussűrűségű erőtere lenne.

33-7 ábra

Szolenoid keresztmetszete: a paramágneses anyagból készült tekercsmag hatása.

33-1 táblázat Néhány anyag χ (Khi) mágneses szuszceptibilitása (általában 20 °C-on)

Anyag	χ (Khi)	
Alumínium	$2,1 \times 10^{-5}$	} Paramágneses és diamágneses anyagok (a negatív χ (Khi)-jú anyagok diamágnesesek)
Levegő (1 atm)	$0,036 \times 10^{-5}$	
Bizmut	-17×10^{-5}	
Ólom	$-1,7 \times 10^{-5}$	
Ezüst	$-2,6 \times 10^{-5}$	
Folyékony oxigén (90K)	400×10^{-5}	} Ferromágneses anyagok <i>Maximális telítési értékek</i> Ezek az értékek nagy mértékben függenek a korábbi mágnesezettségtől, H-tól, a hőkezeléstől, a tisztaságtól és korábbi mechanikai feszültségektől
Hideghengerelt acél	2 000	
Vas	5 000	
45 Permalloy	25 000	
Mu-Metal	100 000	
Supermalloy	800 000	

ahol

A H MÁGNESES TÉRERŐSSÉG

(hosszú szolenoid esetében)

$$H = \frac{NI}{\ell} \quad (33-3)$$

A H mennyiséget **mágneses térerősségnek** nevezzük⁴; egysége az amper/méter (az N menetszámnak nincsen dimenziója.)

A (33-2) képletet olyan módon is felírhatjuk, hogy a mágneses indukció és mágneses térerősség vektorjellegét is kifejezze:

$$\mathbf{B} \text{ ÉS } \mathbf{H} \text{ KAPCSOLATA} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (33-4)$$

ahol

$$\mu = \mu_0(1 + \chi) \quad (33-5)$$

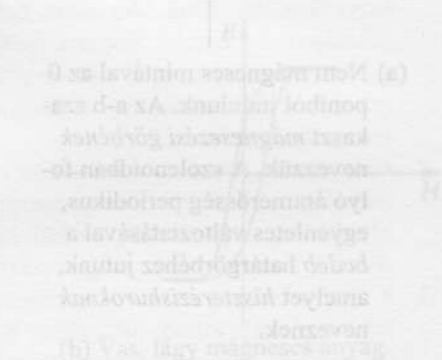
A μ -vel jelölt mennyiség a mágneses anyag **permeabilitása** és ugyanolyan dimenziójú, mint μ_0 . Tényezőként tartalmazza μ_0 -t (a vákuum permeabilitását), valamint függ a paramágneses, ill. diamágneses anyagok mágneses sajátosságaitól. χ abszolút értéke kicsi, nagyságrendje, $\sim 10^{-5}$, paramágneses anyagokra pozitív, diamágneses anyagokra pedig negatív. Néhány anyag mágneses szuszceptibilitását a 33-1. táblázat tartalmazza.

Noha a (33-4) összefüggést gyakran ferromágneses anyagokra is felírják, ebben az esetben különleges probléma merül fel. A ferromágneses anyagokat jellemző χ érték nem állandó, hanem erősen függ H értékétől, és a minta korábbi mágnesezettségétől is (ezt a következő fejezetben részletesen tárgyaljuk). A mágneses hiszterézis jelensége miatt a ferromágneses anyagokban χ zérus is lehet, vagy nagyon nagy (akár százazres nagyságrendű) is, illetve pozitív vagy negatív értékű is lehet. (A 33-1 táblázatban a ferromágneses anyagokra csak a maximális pozitív értékeket tüntettük fel.) A ferromágneses anyagokat azért alkalmazzák elektromágnesekben, transzformátorokban és egyéb eszközökben, mert felhasználásukkal, adott áramerősséggel és tekercsel sokkal nagyobb mágneses indukciót lehet létrehozni, mint nélkülük. Amint azt valaki találóan megjegyezte: „A mágneses térerősség \mathbf{H} vektora az, amit megfizetünk, a mágneses indukció \mathbf{B} vektora pedig az, amit kapunk érte.”

⁴ Néha (helytelenül) a B mágneses indukciót nevezik mágneses térerősségnek.



(a) Mágneses térerősség és mágneses indukció



(b) Mágneses térerősség és mágneses indukció

33-9. ábra

Mágneses indukció és mágneses térerősség



33-9. ábra

Mágneses indukció és mágneses térerősség

(a) Ferromágneses anyagok

(b) Diamágneses anyagok

(c) Paramágneses anyagok

(d) Ferromágneses anyagok

(e) Diamágneses anyagok

(f) Paramágneses anyagok

(g) Ferromágneses anyagok

(h) Diamágneses anyagok

(i) Paramágneses anyagok

(j) Ferromágneses anyagok

(k) Diamágneses anyagok

(l) Paramágneses anyagok

(m) Ferromágneses anyagok

(n) Diamágneses anyagok

(o) Paramágneses anyagok

(p) Ferromágneses anyagok

(q) Diamágneses anyagok

(r) Paramágneses anyagok

(s) Ferromágneses anyagok

(t) Diamágneses anyagok

(u) Paramágneses anyagok

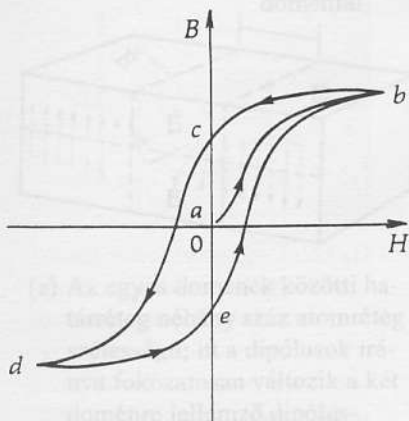
(v) Ferromágneses anyagok

(w) Diamágneses anyagok

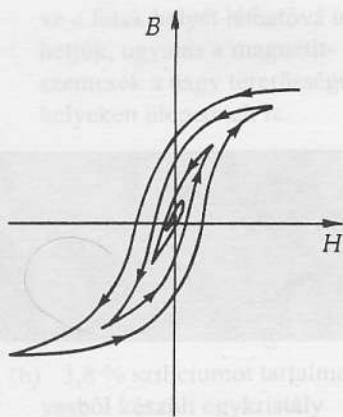
(x) Paramágneses anyagok

(y) Ferromágneses anyagok

(z) Diamágneses anyagok



(a) Nem mágneses mintával az 0 pontból indulunk. Az a-b szakaszt *mágnesezési görbéknek* nevezzük. A szolenoidban folyó áramerősség periodikus, egyenletes változtatásával a *bcdeb* határgörbéhez jutunk, amelyet *hiszterézishuroknak* neveznek.



(b) Ferromágneses anyagokat „lemágnesezni” vagy „demagnetizálni” úgy lehet, hogy az anyagokat egyre csökkenő amplitúdójú periodikus mágneses térben helyezzük el (vagyis egyre kisebb amplitúdójú hiszterézishurkon „haladunk” a zérus permanens mágneses momentumnak megfelelő origó felé).

33-8 ábra

Szolenoid vasmagjában kialakuló B fluxussűrűség a tekercsen átfolyó áram hatására kialakuló H mágneses térerősség függvényében.

33-2 PÉLDA

Hosszú, légmagos szolenoid belsejébe vasmagot helyezünk, aminek következtében az eredeti B_0 fluxussűrűség B -re nő. Számítsuk ki a B/B_0 hányadost, feltételezve, hogy az adott H térerősségnél a vas szuszceptibilitása a maximális értéknek egynegyede.

MEGOLDÁS

A vasmag nélkül a fluxussűrűség $B_0 = \mu_0 H$. Vasmaggal $B = \mu_0 (1 + \chi) H$. A B/B_0 hányados tehát

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0 (1 + \chi) H}{\mu_0 H} = (1 + \chi)$$

A 33-1 táblázat szerint χ maximális értéke 5000, ennek negyede 1250. Így

$$\frac{B}{B_0} = (1 + \chi) = (1 + 1250) \cong 1250$$

A vasmag jelenlétében a tekercs belsejében a B fluxussűrűség tehát jelentősen megnövekszik.

33.4 A mágneses hiszterézis

Ferromágneses anyag mágneses térbe helyezésekor egész sor érdekes effektus figyelhető meg. Ezek eredménye lehet rendkívül összetett, ugyanis χ értéke (amely a domének rendezettségének mértékére jellemző), nemcsak H nagyságától, hanem az adott anyag mágneses előéletétől, korábbi hőkezelésektől, mechanikai feszültségektől és további tényezőktől is függ. Helyezzünk szolenoid belsejébe olyan vasdarabot, amelyben a domének véletlenszerűen orientáltak. Növeljük fokozatosan a tekercsben folyó áramot. A B - H síkon (33-8a ábra) az a pontból indulunk. H a szolenoidon átfolyó áramerősséggel arányos ($H = NI/l$). A növekvő mágneses térerősség hatására a domének egyre inkább ebbe az irányban rendeződnek, és emiatt a \mathbf{B} mágneses indukcióvektor is nő. A görbe a b ponttól kezdve vízszintessé válik a telítődés miatt. Ekkor a domének döntő többsége a legkedvezőbb irányba áll be. Ha a telítődés teljes, az áram további növelése csak kis mértékben (a (33-2) egyenlet $\mu_0 H$ tagjának megfelelő mértékben) növelné meg a \mathbf{B} vektort. Ha az áramerősséget most zérusra csökkentjük, a B - H görbe most más úton a c pontba jut el, ugyanis néhány domén iránya állandósult marad. Az anyag permanens mágnesként viselkedik. Azt a jelenséget, hogy a mágnesezési görbe fel- és lefutó szakaszai nem esnek egybe, görög eredetű szóval *hiszterézisnek* nevezzük. A mágnesező áramot két határ között egyenletesen, periodikusan változtatva a 33-8a ábrán látható jellegzetes alakú *hiszterézishuroknak* nevezett görbéhez jutunk.

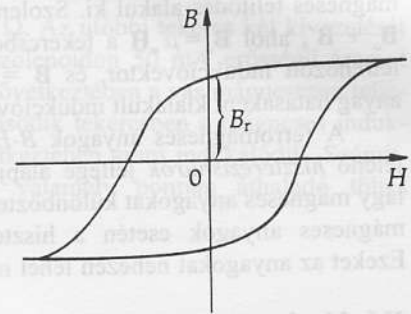
A ferromágneses anyagok aszerint osztályozhatók, hogy mágnesesen „lágyak” vagy „kemények”. A kemény mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok széles, és az áram kikapcsolása után nagy B_r fluxussűrűségű *remanens* (visszamaradó) mágneses indukcióvektorral rendelkeznek (33-9a ábra). A lágy mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok keskeny, a remanens indukcióvektor rendszerint kicsiny (33-9b ábra). Mint az a 33B-5. feladat megoldásával megmutatható, a hiszterézishurok által bezárt terület az egy

ciklus alatt az anyag egységnyi térfogatában disszipálódó (hővé alakuló), és a domének orientáltságához szükséges energia. Mivel ezt az elvesző energiát a tekercsben folyó áramot szolgáltató feszültségforrás fedezi, a váltakozó feszültséget átalakító transzformátorokban lágy mágneses tulajdonságú vasanyagokat használnak. Mágnesesen kemény anyagokból készítik pl. a hangszórókban és villanymotorokban alkalmazott állandó mágneseket.

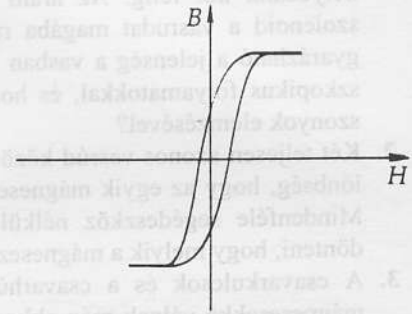
Mechanikus deformációk vagy nagy hőmérsékleti hatások miatt a permanens mágnesek elveszíthetik mágnesezettségüket. Olyan tárgyak, amelyek ilyen brutális kezelésnek nem vethetők alá (például mechanikus órák vagy magnószalagok), úgy demagnetizálhatók, hogy pl. szolenoid mágneses erőterében ciklikus, egyre csökkenő amplitúdójú mágneses térerősség hatásának tesszük ki őket (33-8b ábra).

Magnetostrikciónak nevezzük azt a jelenséget, hogy bizonyos anyagokból készült rúd alakú testek hossza a mágnesezés során kis mértékben, kb. 10^{-6} résznyivel megnő. Ennek oka az, hogy az egyes doménekben orientált mágneses dipólusmomentumok a kristályrácsot némiképp deformálják, és a mágnesezettség irányában kissé megnyújtják. Ez az oka a hálózati transzformátorok brummogó hangjának: a mágneses erőter irányának megváltozása során a transzformátor vasmagja periodikusan összehúzódik majd kitágul, ami hanghullámokat kelt. Érdekes fordított effektus: ha demagnetizált ferromágneses anyagú rudat megfeszítünk, kis mértékben mágnesessé válik.

Végezetül megemlítjük, hogy a fenti három típusba sorolhatókon kívül más mágneses tulajdonságú anyagok is vannak: közülük a *ferriteket* nagy elektromos ellenállásuk és mágneses permeabilitásuk, valamint kis remanens mágnesességük miatt elterjedten használják a nagyfrekvenciás elektronikus áramkörökben. Az *antiferromágneses* anyagokban a szomszédos mágneses dipólusok egymással ellentétes irányúak. Ezekről bővebben szakkönyvekben olvashatunk.



(a) Wolframacél, kemény mágneses anyag.



(b) Vas, lágy mágneses anyag.

33-9 ábra

Két különböző anyag mágneses hiszterézishurokja

Összefoglalás

Az anyagok mágneses viselkedésük szerint három fő csoportba oszthatók:

Diamágneses anyagok: Az ebbe a csoportba tartozó anyagok atomjainak nincs eredő mágneses dipólusmomentuma. Külső mágneses tér jelenlétében a térrel *ellentétes* irányú dipólusmomentum indukálódik. Az inhomogén mágneses tér a diamágneses anyagokat a kisebb térerősségű tartomány felé taszítja.

Paramágneses anyagok: Az ebbe a csoportba tartozó anyagoknak van eredő dipólusmomentuma; ez véletlenszerűen orientált. Külső mágneses tér jelenlétében a dipólusok a térrel megegyező irányba állnak be (*mágneses polarizáció* alakul ki). Az inhomogén mágneses tér a paramágneses anyagokat a nagyobb térerősségű tartomány felé vonzza. A paramágnesesség hőmérsékletfüggő tulajdonság, ugyanis a növekvő hőmérséklet a rendeződő dipólusokat szétszórja.

Ferromágneses anyagok: öt elem – Fe, Co, Ni, Gd és Dy – atomjai állandó mágneses momentummal rendelkeznek, és ezek *doméneknek* nevezett kis tartományokban párhuzamosan állnak. Mágneses tér hatására a térrel megegyező

irányú domének nagysága megnő; aminek következtében az eredő mágneses tér akár néhány százezerszeresére is nőhet.

A H mágneses térerősséget az elektromos áram által létrehozott **mágneses erőter** jellemzésére használjuk. Hosszú szolenoidban a mágneses térerősség:

$$H = \frac{NI}{\ell}$$

A **B mágneses indukció** vagy **mágneses fluxussűrűség** és a **H mágneses térerősség** kapcsolatát mágneses anyagok jelenlétében a következő összefüggés adja meg:

$$B = \mu H$$

ahol

$$\mu = \mu_0(1 + \chi)$$

A mágneses anyag μ permeabilitása a vákuum *permeabilitásán* (μ_0) kívül a rendeződött dipólusok hatását kifejező χ **mágneses szuszceptibilitástól** is függ. Diamágneses anyagokra χ zérushoz közeli nagyságú, negatív, paramágnesesekre ugyancsak kicsiny, de pozitív állandó. Ferromágneses anyagok esetében χ nagyon nagy értékű is lehet, ha a külső mágneses erőter hatására az összes mágneses dipólus azonos irányba áll be, azaz

mágneses telítődés alakul ki. Szolenoid belsejében $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, ahol $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ a tekercsben folyó áram által létrehozott indukcióvektor, és $\mathbf{B}' = \mu_0 \chi \mathbf{H}$ a mágneses anyag hatásaként kialakult indukcióvektor.

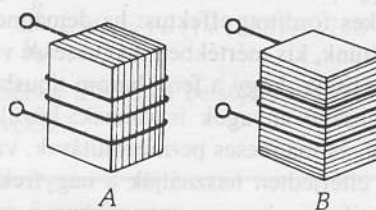
A ferromágneses anyagok B - H grafikonján megjelenő *hiszterézishurok* jellege alapján kemény, illetve lágy mágneses anyagokat különböztetünk meg. Kemény mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok széles. Ezeket az anyagokat nehezen lehet mágnesezni, viszont

Kérdések

1. Kikapcsolt szolenoidba (nem mágnesezett) vasrudat helyezünk kb. félig. Az áram bekapcsolásakor a szolenoid a vasrudat magába rántja. Hogyan magyarázható a jelenség a vasban végbemenő mikroszkopikus folyamatokkal, és hogyan az energiaviszonyok elemzésével?
2. Két teljesen azonos vasrúd között csak annyi a különbség, hogy az egyik mágnesezett, a másik nem. Mindenféle segédeszköz nélkül hogyan lehet eldönteni, hogy melyik a mágnesezett?
3. A csavarkulcsok és a csavarhúzóknak néha enyhén mágnesesekké válnak még akkor is, ha elektromos szerelésekhez nem használtuk őket. Miért?
4. Elektronikus készülék úgy szigetelhető el egy mágneses erőterétől, hogy vasból vagy speciális, nagy permeabilitású fémből készült dobozba zárjuk. Mi az ilyen mágneses árnyékolás elvi alapja?
5. A legtöbb fémdetektor érzékelő eleme tekercs. Hogyan működhet az ilyen fémdetektor? (Ilyen elven működik a közlekedési lámpák vezérléséhez alkalmazott, az úttest burkolatába épített hurok is.)
6. A 33-10 ábrán lemezelte vasmagú tekercset láthatunk. A vasmag egymástól szigetelt vékony leme-

nagy remanens mágneses terük van, és így permanens mágnesek készítésére alkalmasak. Lágy mágneses anyagok esetén a hiszterézishurok keskeny, ezek könnyen mágnesezhetőek, viszont a mechanikus vagy termikus behatások könnyen demagnetizálják őket. A hiszterézishurok által bezárt terület arányos az egy mágnesezési ciklus során egységnyi térfogatú anyagban disszipált energiával, ezért pl. transzformátorokban lágy mágneses anyagokat alkalmaznak.

zekből áll. Ha a tekercsbe váltakozó áramot vezetünk, a változó mágneses erőter a vasmagban váltakozó áramot (*örvényáramot*) kelt. Vajon az A vagy B módon kell-e a lemezeket elhelyezni ahhoz, hogy a vasmagban fejlődő I^2R hőteljesítmény csökkenjen?



33-10 ábra

A 6. kérdéshez

7. Szükségszerű-e vajon, hogy egy permanens mágnesnek egy északi és egy déli pólusa legyen? Készíthető-e vajon olyan permanens mágnes, amelynek például két északi pólusa van? És olyan, amelynek északi pólusa egyáltalán nincs?

Feladatok

33A-1 Egy 20 cm hosszú, szorosan tekercselte 700 menetű szolenoid vasmagja 1,4 cm átmérőjű. Feltételezve, hogy a vasmag a mágneses telítettség állapotában van, milyen erősségű áram hatására lesz a tekercs közepén átmenő síkon $3 \times 10^{-4} \text{ Tm}^2$ a mágneses fluxus?

33A-2 Számítsuk ki az $1,8 \times 10^{-5}$ szuszceptibilitású anyag mágneses permeabilitását!

33A-3 Amikor szupravezető anyagot mágneses térbe helyezünk, akkor a felületén olyan áramok alakulnak ki, hogy az anyag belsejében a mágneses erőter zérus legyen. (Vagyis az anyag tökéletes diamágnesként viselkedik.) Tekintsünk egy 2 cm átmérőjű korongot, amelyet $B = 0,02 \text{ T}$ fluxussűrűségű mágneses erőterbe helyezünk úgy, hogy a korong síklapjai az erővonalakra merőlegesen legyenek. Számítsuk ki, hogy mekkora a felületi áram nagysága a korong palástján.

33B-4 Egy 25 cm hosszú, sűrűn tekercselte, 600 menetű szolenoidon 30 mA erősségű áram folyik át. Számítsuk ki H és B nagyságát a szolenoid középpontjában (a) ha a szolenoid légmagos és (b) ha a szolenoid magja

45 Permalloyból készült, melynek szuszceptibilitása a maximális telítési értéknek háromnegyede.

33B-5 Mutassuk meg, hogy a B - H szorzat dimenziója energia/térfogat.

33B-6 Tekintsünk egy mágnesezhető anyagú maggal ellátott toroidtekercset (néha ezt a tekercsfajtát *Rowland-gyűrűnek* nevezik), melynek közepes sugara 10 cm, 250 menetű, vasmaggal készült, és 150 mA-es áram halad át rajta. (a) Számítsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (b) Számítsuk ki a B mágneses indukcióvektort a vasmagban, ha az 70%-ig telítődött.

33B-7 Hosszú, 2000 menet/m menetsűrűségű vasmagos szolenoidon 10 mA erősségű áram halad át. (a) Számítsuk ki a B mágneses indukciót a vasmagban, ha az 20%-ig telítődött. (b) Mekkora áramerősséggel lehetne elérni ugyanekkora indukciót vasmag nélkül?

33B-8 Egy 50 cm kerületű toroidtekercs 1000 menetű és rajta 200 mA erősségű áram halad át. A vasmag olyan anyagból készült, amelynek telítési szuszceptibilitása 3000. (a) Számítsuk ki a B mágneses indukció-

vektort a magban, ha anyaga 85%-ig telítődött. (b) Számítsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belső részében. (c) Számítsuk ki B azon részét, amely csak tekercsben folyó áramtól ered.

33C-9 Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek

teljes ellenállása 5Ω . Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidzárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágnesesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

Atomi Buddha építész utószókat a digitális komputerek áramkörében és a sebességgel foglalkozó közeli, mint a hegyek csúcsai vagy a világűrben.

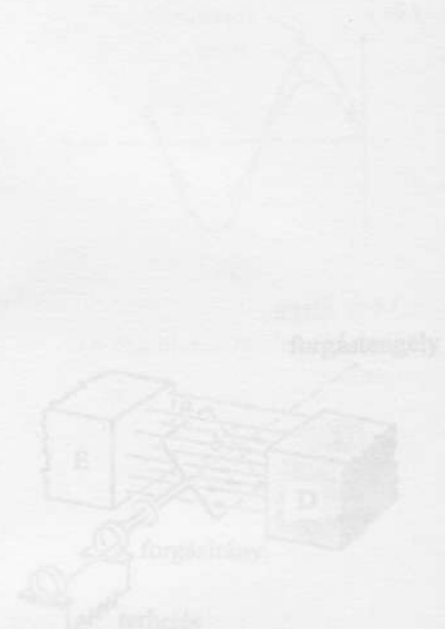
ROBERT FERIS

(Zen és a motorizáció karbantartás mérése)

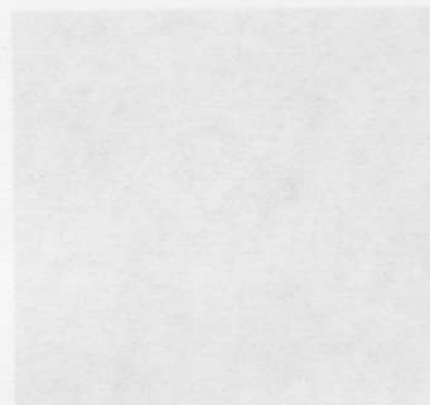
34.1 Bevezetés

A korábbiakban megfigyeltük, hogy a változó az áramerősség során kapcsoló RC-körben, ha a kört telepre kapcsoljuk. Kezdetben az áramerősség egy, ezután csak az ellenállás korlátozza, majd exponenciálisan csökken. Hasonlóképpen ha a kört a nulla állapotból áramkörre kapcsoljuk, akkor az áramerősség zérusól indulva exponenciálisan közelíti az ellenállás egyenlőséget. A megfigyelt exponenciális csökkenés és a kezdeti áramerősség a kört a kezdeti állapotból a kezdeti áramerősségig (azaz a kezdeti áramerősségig) áramot rendel. Az időbeli változások egy bizonyos ideig tart, ezután stabilizálódik az áramerősség. A következő fejezetben azt mutatja meg, hogy az exponenciális csökkenés milyen meredek.

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy milyen áram alakul ki, ha a körben folyamatosan változó feszültséget alkalmazunk. A legtöbb elektromechanikus áramfejlesztő rendszerben változó feszültséget hoz létre, amelynek hatására a különböző áramkörökben szimultán változó áram folyik. Az egyszerűség kedvéért a következőkben a rövidített (AC) áramot használva a továbbiakban az ilyen áramot, feszültséget, áramot stb. egyszerűen az „AC” jelzővel jelöljük, így például az „AC feszültség” kifejezést a „változó feszültség” szinonimájaként használjuk. (Hasonlóképpen, az egyenáramú mennyiségeket áramkörökben a „DC” (direct current) rövidítéssel jelölhetjük). Változó áramú köröket elterjedten használják energia átvitelére, hűtésre (rádió, TV, mobiltelefonok), számítógépekben, továbbá számos egyéb fontos gyakorlati alkalmazásuk van.



A forgó áramú generátorok a mágneses térben forgó vezetőhurokban $e = \epsilon \cdot \sin \omega t$ árt feszültség indukálódik.



(b) A modern változó áramú generátorok számos tekercset tartalmazó forgórészt (az ábrán nem látható) nagy elektromágneses mágneses térben forgat.

34-1 ábra A változó áramú generátor

Atomi Buddha építész utószókat a digitális komputerek áramkörében és a sebességgel foglalkozó közeli, mint a hegyek csúcsai vagy a világűrben.

- 30A-19 A válasz adott.
 30B-21 $\tau = (-1,44 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}) \hat{z}$
 30B-23 $\mu = Iab \cos \theta \hat{x} + Iab \sin \theta \hat{y}$
 30A-25 $\frac{1}{5}$
 30B-27 a) 37,7 mT b) $(4,28 \times 10^{25})/\text{m}^3$
 30A-29 0,438 μW
 30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV
 c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV
 e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem
 30C-33 A válasz adott.
 30C-35 qBt/m
 30C-37 IBR
 30C-39 $mg/\pi r B_x$
 30C-41 a) $1,05 \times 10^{-3} \text{ A}$ b) $9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
 30C-43 A válasz adott.
 30C-45 A válasz adott.
 30C-47 A válasz adott.
 30C-49 A válasz adott.
 30C-51 A válasz adott.

XXXI. Fejezet

- 31A-1 $1,43^\circ$
 31B-3 $\mu_o NI / 2\sqrt{2}R$
 31A-5 A válasz adott.
 31B-7 $\mu_o I(b-a) / 4ab$ (kifelé mutat)
 31B-9 $\Phi_B = \mu_o I l (\ln 3) / 2\pi$
 31B-11 $\mu_o I 2\sqrt{2} / \pi b$
 31A-13 a) $2,20 \times 10^{-5} \text{ Wb}$ b) 5570 menet
 31B-15 $B_{\text{belül}} = \mu_o I r / 2\pi a^2$
 31C-17 A válasz adott.
 31C-19 A válasz adott.
 31C-21 A válasz adott.
 31C-23 a) $B = -(\mu_o I a / \pi [z^2 + a^2])$
 b) $\lim_{z \gg a} B = -(\mu_o I a / \pi z^2) \hat{z}$
 31C-25 $2RB_e \text{ tg } \theta / \mu_o N$
 31C-27 a) A/m^3 b) 0 c) $\mu_o k(r^3 - a^3) / 3r$
 d) $\mu_o k(b^3 - a^3) / 3r$
 31C-29 $-(\mu I / 6\pi a) \hat{x}$ függetlenül y -tól
 31C-31 $\mu_o \sigma \omega R$
 31C-33 $(\mu_o I / 2\pi \omega) \ln(1+w/d)$
 31C-35 A válasz adott.
 31C-37 $\mu_o NI/l$

XXXII. Fejezet

- 32B-1 30 V az óramutató járása szerint
 32B-3 $\mathcal{E} = \frac{2B\pi r^2}{t}$
 32B-5 A válasz adott.
 32B-7 3,38 A/s

- 32A-9 A válasz adott.
 32A-11 $N\mu_o \pi R/2$
 32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s
 32A-15 a) $\mu_o N_1^2 A/l$ $\mu_o N_2^2 A/l$ b) $\mu_o N_1 N_2 A/l$
 32B-17 $M = \mu_o AN_1 N_2 / l$
 32B-19 a) V/L
 32B-21 A válasz adott.
 32A-23 $145 \text{ J}/\text{m}^3$
 32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J
 32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén
 32C-29 b) 0,458 mV
 32C-31 a) $b a$ b) $\Delta Q = N\Delta\Phi/R$ c) $B = QR/NA$
 32C-33 $3,08 \mu\text{C}$
 32C-35 a) $C\pi a^2 k$ b) a felső lemezének
 32C-37 $0,132 \mu\text{A}$
 32C-39 A válasz adott.
 32C-41 A válasz adott.
 32C-43 A válasz adott.
 32C-45 $\mu_o I^2 / 16\pi$
 32C-47 A válasz adott.

XXXIII. Fejezet

- 33A-1 88,6 mA
 33A-3 318 A
 33B-5 A válasz adott.
 33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A
 33C-9 1,48 mC

XXXIV. Fejezet

- 34A-1 A válasz adott.
 34A-3 A válasz adott.
 34B-5 a) $v = 24,1 \sin 377t$ b) a hurok síkja merőleges B-re
 34A-7 b) $3,2 \times 10^{-2} \text{ J}$
 34B-9 b) $v = 8,32 \sin(1000t + 33,7^\circ)$ (SI-ben)
 34B-11 a) 173 Ω b) 8,66 V
 34B-13 A válasz adott.
 34B-15 $i = 2,11 \sin(10^5 t + 71,6^\circ)$
 34A-17 100
 34A-19 46,5 pF-től 419 pF-ig
 34B-21 A válasz adott.
 34A-23 $v = 170 \sin(377t) \text{ V}$
 34A-25 122 W
 34B-27 A válasz adott.
 34B-29 A válasz adott.
 34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V
 e) 90,5 V
 34B-33 a) 211 μF b) 979 W
 34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A
 34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A
 34B-39 a) $1,82 \times 10^4 \text{ A}$ b) 909 A
 34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V
 e) 64,4 V