Valószínűségszámítás vizsga
2016. június 8.

1. Az X sűrűségfüggvénye

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(t+4)^2}{6}}, t \in \mathbb{R}$$

Határozza meg a $\mathbf{P}(X < -2)$ valószínűséget!
Megoldás: $X \in N\left(-4, \sqrt{3}\right) \Rightarrow \mathbf{P}(X < -2) = \Phi\left(\frac{-2+4}{\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \Phi(1.1547) = 0.87$

2. Legyenek X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlanok, 0 várhatóértékkel és 1 szórással. Számolja ki $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3 - X_4$ korrelációs együtthatóját.
Megoldás: $\mathrm{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3 - X_4) = \mathrm{cov}(X_2, X_2) = \boldsymbol{\sigma}^2 X_2 = 1$
$\boldsymbol{\sigma}^2(X_1 + X_2) = 2, \boldsymbol{\sigma}^2(X_2 + X_3 - X_4) = 3 \Rightarrow \mathrm{R}(X_1 + X_2, X_2 + X_3 - X_4) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.40825$

3. András és Béla felváltva dobnak egy pár dobókockával egészen addig, amíg András a két kockán összesen pontosan 9-et dob, vagy Béla a két kockán összesen pontosan 6-ot dob. Találjuk meg annak valószínűségét, hogy az utolsó dobást András végzi, ha András kezdett.
Megoldás: András dobásainak száma X, Béla dobásainak száma. A választ az

$$\mathbf{P}(X = k) = \left(\tfrac{8\cdot 31}{9\cdot 36}\right)^{k-1} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{9} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{8\cdot 31}{9\cdot 36}\right)^{k-1} = \tfrac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8\cdot 31}{9\cdot 36}} = \tfrac{9}{19} = 0.47368$$

4. Két szabályos kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a második többet mutat, mint az első?
Megoldás: Jelölje X az első kocka dobott értékét, Y a második kockáét. A függetlenséget kihasználva a keresett valószínűség:

$$p = \mathbf{P}(X < Y) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=i+1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

5. Legyen $X \in U(0, 1)$, azaz a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \cos(2\pi X)$ és $Z = \sin(2\pi X)$. Számolja ki Y-nak a Z-re vett lineáris regresszióját!

Megoldás: $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}(\cos(2\pi X)) = \int_0^1 \cos(2\pi x)dx = \left[\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x\right]_0^1 = 0$

$\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(\sin(2\pi X)) = \int_0^1 \sin(2\pi x)dx = \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x\right]_0^1 = 0$

$\mathbf{E}YZ = \mathbf{E}(\frac{1}{2} \sin 4\pi X) = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin(4\pi x)dx = \left[-\frac{1}{8\pi} \cos 4\pi x\right]_0^1 = 0 \Rightarrow \mathrm{cov}(Y, Z) = 0$

$a = 0, b = 0$, azaz a lineáris regresszió $y = 0$.