VIIIAB05 - Szabályozástechnika
Állapotteres analízis folytonos időben

Dr. Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. április 13.

MŰEGYETEM 1782

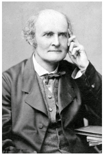
Az előadás célja

A hallgató

1. megismeri az állapotegyenlet alakját, a mátrixok méreteit, az alapmátrix fogalmát és az állapotegyenlet megoldását,
2. érti az állapotegyenlet geometriai interpretációját,
3. képes figyelembe venni a bázis-transzformáció hatását,
4. tisztában van az állapotegyenlet és az átviteli mátrix kapcsolatával,
5. megismeri az irányíthatóság koncepcióját,
6. képes az irányíthatóság meghatározására a Kálmán-kritérium alapján.
7. megismeri az megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság definícióit és a hozzá kapcsolódó kritériumokat LTI rendszer esetén,
8. megérti az Ackermann-képletet és a mögöttes algebrai feladatot,

Háttértudás matematikából

Mátrixokkal, vektorterekkel, sajátértékekkel, alterekkel, vektorokkal dolgozunk: lineáris algebra. (Matematika A2a)




Cayley- Hamilton tétel

Adott egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix. Karakterisztikus egyenlete:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét:

$$\det(\lambda I - A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

A Cayley-Hamilton tétel használata a mai előadáson

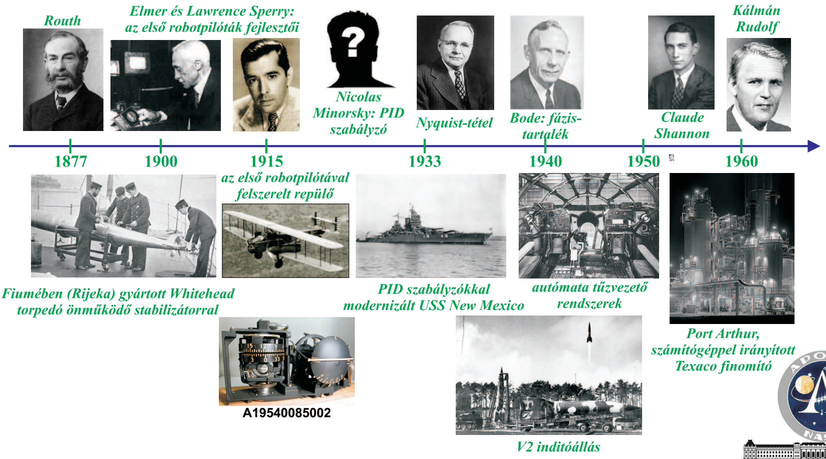
Bármely A mátrix n. és annál nagyobb hatványai kifejezhetők a kisebb hatványok (A^i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$) súlyozott összegével.

Tartalom

Apollo program (1961-1972)

Tartalom

Kronológia


Routh
Elmer és Lawrence Sperry: az első robotpilóták fejlesztői
Nicolas Minorsky: PID szabályzó
Nyquist-tétel
Bode: fázis-tartalék
Claude Shannon
Kálmán Rudolf
1877
1900
1915
1933
1940
1950
1960
az első robotpilótával felszerelt repülő
Fiumében (Rijeka) gyártott Whitehead torpedó önműködő stabilizátorral
A19540085002
PID szabályzókkal modernizált USS New Mexico
automata tűzvezető rendszerek
V2 inditóállás
Port Arthur, számítógéppel irányított Texaco finomító

Vissza az időtartományba

(Lineáris) Állapotegyenlet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ az állapotvektor
- $u \in \mathbb{R}^m$ a bemenetek vektora
- $y \in \mathbb{R}^p$ a kimenetek vektora

Általában $m \leq n$ és $p \leq n$.

SISO rendszer

$p = m = 1$

Mátrixok méretei

Első index az sorok, második az oszlopok száma.

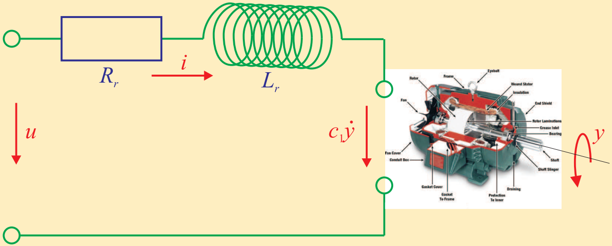
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$
$$C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Állapotok

Adott dinamikus rendszer esetén azon változók halmaza, amelyek ismeretében (deriváltjaik ismerete nélkül) bármely pillanatban „mindent” tudunk a rendszerről.

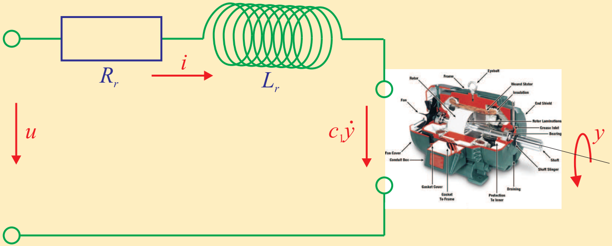
Példa: DC motor

Egy DC motor felépítése



Példa: DC motor

Egy DC motor felépítése



1. egyenlet (rotoráramra)

$$u - c_1\omega = R_r i + L_r \frac{di}{dt}$$

Egytárolós tag a feszültség és a rotoráram között.

2. egyenlet (forgó részre)

$$c_2 i = \Theta\dot{\omega} + f\omega$$

Egytárolós tag a rotoráram és a szögsebesség között. ($\omega = \dot{y}$)

Példa - állapotegyenlet

Állapotvektor

$x^T = [i, \omega, y] = [x_1, x_2, x_3]$

1. i - rotoráram
2. ω - szögsebesség
3. y - tengelyszög

A c_1 és c_2 konstansok jelentése

1. c_1: nyomaték konstans
2. c_2: feszültség konstans

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{c_1}{L_r} & 0 \\ \frac{c_2}{\Theta} & -\frac{f}{\Theta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Tartalom

Tartalom

Az állapotegyenlet geometriai interpretációja

$n = 3, p = m = 2, D = 0$

Az állapotegyenlet

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} x$$

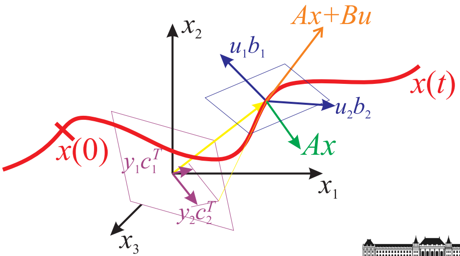
$$x(0) = x_0$$

Az Ax vektormező

1. lineáris
2. definiálja a sajátmozgást: $e^{At}x_0$
3. alapmátrix: e^{At}

Megjegyzések

1. $Ax(t) + Bu(t)$ minden időpillanatban $x(t)$ érintője.
2. A bemenetek az állapottérbeli mozgás irányát és sebességét befolyásolják.



Állapotegyenlet megoldása

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp\{A(t-\vartheta)\} Bu(\vartheta)d\vartheta$$

Lineáris, időben változó eset - LTV rendszerek

Az egyenletek továbbra is lineárisak, de az együttható mátrixok időfüggők:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$x(\tau) = x_\tau$$

Ilyenkor a megoldás

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x_\tau + \int_\tau^t \Phi(t,\vartheta)B(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta$$

és $\Phi(t,\vartheta)$ az alapmátrix.

Tartalom

Állapottér bázis-transzformációja

Új bázis az állapottérben

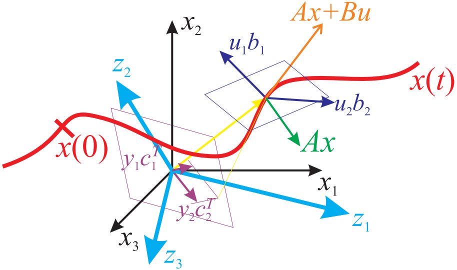
Invertálható bázis-transzformációt tételezünk fel:

$$z = Tx \qquad \exists T^{-1}$$
$$x = T^{-1}z$$

Állapotegyenlet az új bázisban

Differenciáljuk a transzformációt

$$\dot{z} = \dot{T}x + T\dot{x} = TAx + TBu$$
$$\dot{z} = T\dot{x} = TAT^{-1}z + TBu$$
$$y = CT^{-1}z + Du$$



Tartalom

Állapotegyenletből átviteli függvény

Jól ismert összefüggés

Nulla kezdeti feltételek mellett.

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Bázis-transzformáció hatása

Továbbra is nulla kezdeti feltételek mellett.

$$CT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}TB + D = CT^{-1}\left(T(s - A)T^{-1}\right)^{-1}TB + D =$$
$$= CT^{-1}T\left(s - A\right)^{-1}T^{-1}TB + D = C(sI - A)^{-1}B + D = W(s)$$

ahol kihasználtuk, hogy $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Megjegyzés

A bázis cseréje az $u \mapsto y$ átvitelt nem változtatja meg.

Tartalom

Tartalom

Irányíthatóság

Megjegyzés

A definíciók nem csak a lineáris és időinvariáns rendszerek (Linear Time Invariant - LTI) esetében alkalmazhatók. Sőt, bizonyos definíciók bár különböznek, LTI rendszerek esetében egyenértékűek.

Definíciók

1. Legyen a rendszer a τ időpontban egy x_τ állapotban. A (τ, x_τ) páros nullába irányítható, ha létezik olyan véges $T \geq \tau$ idő és egy $u : [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$ irányítás, hogy azt alkalmazva $x(T) = 0$.
2. A rendszer τ időpontból teljesen nullába irányítható, ha minden $x_\tau \in \mathbb{R}^n$-re a (τ, x_τ) páros nullába irányítható.
3. A rendszer teljesen nullába irányítható, ha minden τ időpontból teljesen nullába irányítható.

Elérhetőség

Definíciók

1. Legyen a rendszer a τ időpontban az állapottér origójában. Egy x_1 állapot elérhető, ha létezik olyan véges $T \geq \tau$ idő és egy $u : [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$ irányítás, hogy azt alkalmazva $x(T) = x_1$.
2. A rendszer τ időpontból teljesen elérhető, a τ időpontból minden $x_1 \in \mathbb{R}^n$ elérhető.
3. A rendszer teljesen elérhető, ha minden τ időpontból minden $x_1 \in \mathbb{R}^n$ elérhető.

Megjegyzés

Időinvariáns esetben a definíciók egyszerűsödnek, továbbá a teljes irányíthatóság és a teljes elérhetőség definíciói ekvivalensek.

Tartalom

Hogyan ellenőrizhető az irányíthatóság?

Megjegyzés

1. A kritériumot csak időinvariáns esetre adjuk meg.
2. Csak a teljes irányíthatóságra (elérhetőségre) adunk kritériumot.
3. Elegendő a $\dot{x} = Ax + Bu$ egyenletet vizsgálni.

Tétel (Kálmán-kritérium)

Adott az $\dot{x} = Ax + Bu$ LTI állapotegyenlettel adott rendszer. Ez a rendszer akkor és csak akkor irányítható, ha az

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}$$

ún. irányíthatósági mátrix rangja maximális, azaz n.

Bizonyítás

Segítség

Fel fogjuk használni az ún. irányíthatósági Gram-mátrixot:

$$\mathcal{G} = \int_0^T \exp\left\{A(T-t)\right\} BB^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\} dt$$

Megjegyzés

LTI esetben a definíciók ekvivalenciája miatt elegendő az elérhetőség bizonyítása, azaz $x_0 = 0$ lehet.

Jorgen Pedersen Gram, dán matematikus, (1850-1916)

Bizonyítás menete: két lemmával

(A, B) irányítható $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{G}$ invertálható $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}(M_c) = n$

Bizonyítás - 1. lemma

(A, B) irányítható $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ invertálható

- $\mathcal{G}$ invertálható $\Rightarrow (A, B)$ irányítható. Ehhez legyen a keresett bemenet

$$\bar{u}(t) = B^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\} \mathcal{G}^{-1} x_T$$

Ezt behelyettesítve az állapotegyenlet megoldásába

$$\begin{aligned} x(T) &= \exp(At)x_0 + \int_0^T \exp\left\{A(T-t)\right\} BB^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\} \mathcal{G}^{-1} x_T dt \\ &= 0 + \int_0^T \exp\left\{A(T-t)\right\} BB^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\} dt \mathcal{G}^{-1} x_T \\ &= \mathcal{G}\mathcal{G}^{-1} x_T = x_T \end{aligned}$$

- (A, B) irányítható $\Rightarrow \mathcal{G}$ invertálható. A fentiek alapján közvetlenül adódik.

Bizonyítás - 2. lemma

$\mathcal{G}$ invertálható $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(M_c) = n$

$\mathcal{G}$ invertálható $\Rightarrow \operatorname{rank}(M_c) = n$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G}$ nem invertálható. Akkor létezik v vektor, hogy $v^T\mathcal{G} = 0$:

$$v^T\mathcal{G}v = \int_0^T v^T \exp\left\{A(T-t)\right\} BB^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\} v dt = 0$$

Mivel $\exp\left\{A(T-t)\right\} BB^T \exp\left\{A^T(T-t)\right\}$ kvadratikus alak, csak akkor nulla, ha $v^T \exp\left\{A(T-t)\right\} B$ azonosan 0.

$$v^T \exp\left\{A(T-t)\right\} B = v^T \left(I + \sum_{i \geq 1} A^i \frac{(T-t)^i}{i!} \right) B = 0$$

ahonnan $v^T B =$, $v^T AB = 0$, $v^T A^i B = 0$, viszont mivel ezek pont M_c elemei, így $v^T M_c = 0$, azaz $\operatorname{rank}(M_c) < n$.

Bizonyítás - 2. lemma

$\mathcal{G}$ invertálható $\Leftrightarrow$ rank$(M_c) = n$

rank$(M_c) = n \Rightarrow \mathcal{G}$ invertálható. Tegyük fel, hogy rank$(M_c) < n$. Akkor létezik v, hogy

$$v^T M_c = 0$$

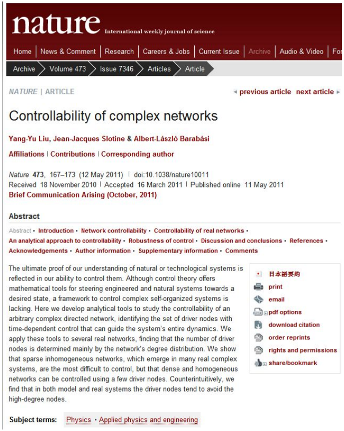
Viszont ebből a Cayley-Hamilton tétel miatt következik, hogy $v^T A^i B = 0$ teljesül minden $i \geq 0$ esetén. Tehát

$$v^T \exp\left\{A(T-t)\right\} B = v^T \left(I + \sum_{i \geq 1} A^i \frac{(T-t)^i}{i!} \right) B = 0$$

Ami az előző fólia alapján azt jelenti, hogy $\nexists \mathcal{G}^{-1}$.

QED

Egy érdekes alkalmazás


nature International weekly journal of science

Home | News & Comment | Research | Careers & Jobs | Current Issue | Archive | Audio & Video | For

Archive > Volume 473 > Issue 7346 > Articles > Article

NATURE | ARTICLE ◂ previous article next article ▸

Controllability of complex networks

Yang-Yu Liu, Jean-Jacques Slotine & Albert-László Barabási

Affiliations | Contributions | Corresponding author

Nature 473, 167–173 (12 May 2011) | doi:10.1038/nature10011
Received 18 November 2010 | Accepted 16 March 2011 | Published online 11 May 2011
Brief Communication Arising (October, 2011)

Abstract

Abstract • Introduction • Network controllability • Controllability of real networks • An analytical approach to controllability • Robustness of control • Discussion and conclusions • References • Acknowledgements • Author information • Supplementary information • Comments

The ultimate proof of our understanding of natural or technological systems is reflected in our ability to control them. Although control theory offers mathematical tools for steering engineered and natural systems towards a desired state, a framework to control complex self-organized systems is lacking. Here we develop analytical tools to study the controllability of an arbitrary complex directed network, identifying the set of driver nodes with time-dependent control that can guide the system's entire dynamics. We apply these tools to several real networks, finding that the number of driver nodes is determined mainly by the network's degree distribution. We show that sparse inhomogeneous networks, which emerge in many real complex systems, are the most difficult to control, but that dense and homogeneous networks can be controlled using a few driver nodes. Counterintuitively, we find that in both model and real systems the driver nodes tend to avoid the high-degree nodes.

日本語要約 · print · email · pdf options · download citation · order reprints · rights and permissions · share/bookmark

Subject terms: Physics • Applied physics and engineering

Nature 2011 októberi számának cikke:

Komplex hálózatok irányíthatósága

Nagy hálózatok irányítása

Szociális hálózatok és szervezetek (vállalatok, kormányzati szervek, hadsereg) irányítása és megfigyelése.

- Hány irányítható csomópont kell a befolyásoláshoz?
- Hány csomópont megfigyelése kell a követéshez?

Tartalom

Tartalom

Megfigyelhetőségi osztályok

Az általános definíciók időben változó rendszerekre vonatkoznak

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad y = C(t)x + D(t)u \tag{1}$$

Definíció

Legyen adott két pár: (τ, x_1) és (τ, x_2). Legyen $y_1(t)$ $(t \geq \tau)$ az (1) rendszer kimenete x_1 állapotból τ időpillanatban indítva és legyen $y_2(t)$ $(t \geq \tau)$ az (1) rendszer kimenete x_2 állapotból τ időpillanatban indítva (azonos bemenetet alkalmazva). Amennyiben $y_1(t) \equiv y_2(t)$ $(\forall t \geq \tau)$, úgy (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos megfigyelhetőségi osztályba tartoznak (a kimenetek a jövőben nem különböztethetők meg egymástól).

Megjegyzés

Ha (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos megfigyelhetőségi osztályba tartoznak valamely $u(t)$ bemenő jelre, akkor ez igaz $u(t) \equiv 0$ esetén is.

Rekonstruálhatósági osztályok

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad y = C(t)x + D(t)u \tag{2}$$

Definíció

Legyen adott két pár: (τ, x_1) és (τ, x_2). Legyen $y_1(t)$ $(t \leq \tau)$ az (2) rendszer korábbi kimenete x_1 állapotba τ időpillanatban eljutva és legyen $y_2(t)$ $(t \leq \tau)$ az (2) rendszer korábbi kimenete x_2 állapotba τ időpillanatban eljutva (azonos bemenetet alkalmazva). Amennyiben $y_1(t) \equiv y_2(t)$ $(\forall t \leq \tau)$, úgy (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos rekonstruálhatósági osztályba tartoznak (a kimenetek a múltban nem különböztethetők meg egymástól).

Megjegyzés

Ha (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos rekonstruálhatósági osztályba tartoznak valamely $u(t)$ bemenő jelre, akkor ez igaz $u(t) \equiv 0$ esetén is.

Megfigyelhetőség

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad y = C(t)x + D(t)u \tag{3}$$

Definíciók

1. Egy (τ, x_1) pár nem megfigyelhető, ha létezik egy olyan (τ, x_2) pár, melyre $x_1 \neq x_2$ és azonos megfigyelhetőségi osztályba tartoznak.
2. A (3) rendszer a τ időpillanatban megfigyelhető, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a (τ, x) pár megfigyelhető.
3. A (3) rendszer tejesen megfigyelhető, ha $\forall \tau$ időpillanatban megfigyelhető.

Megjegyzés

Ha (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos megfigyelhetőségi osztályban vannak, akkor $(\tau, x_1 - x_2)$ egy megfigyelhetőségi osztályban van $(\tau, 0)$-val.

Rekonstruálhatóság

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad y = C(t)x + D(t)u \tag{4}$$

Definíciók

1. Egy (τ, x_1) pár nem rekonstruálható, ha létezik egy olyan (τ, x_2) pár, melyre $x_1 \neq x_2$ és azonos rekonstruálhatósági osztályba tartoznak.
2. A (4) rendszer a τ időpillanatban rekonstruálható, ha $\forall x \in \mathbb{R}^n$ a (τ, x) pár rekonstruálható.
3. A (4) rendszer tejesen rekonstruálható, ha $\forall \tau$ időpillanatban rekonstruálható.

Megjegyzés

Ha (τ, x_1) és (τ, x_2) azonos rekonstruálhatósági osztályban vannak, akkor $(\tau, x_1 - x_2)$ egy rekonstruálhatósági osztályban van $(\tau, 0)$-val.

Egyszerűsítés időinvariáns esetre

Megjegyzés

Időinvariáns rendszerek esetében a megfigyelhetőség és a rekonstruálhatóság ekvivalens fogalmak, mert a mátrixok időben állandók.

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du \tag{5}$$

Definíciók

1. Egy x_0 állapot megfigyelhető, ha a (5) rendszert $x(0) = x_0$ kezdeti állapotból indítva és $0 < T$ véges ideig megfigyelve az $y(t)$ kimenetet és $u(t)$ bemenetet, azokból x_0 meghatározható.
2. Az (5) rendszer megfigyelhető, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ állapot megfigyelhető.

Megjegyzés

Mivel

$$x(t) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp\left\{A(t-\vartheta)\right\} Bu(\vartheta)d\vartheta$$

így x_0 akkor és csak akkor megfigyelhető $u(t)$ bemenet mellet, ha

$$x_0 - \int_0^t \exp\left\{A(t-\vartheta)\right\} Bu(\vartheta)d\vartheta$$

megfigyelhető 0 bemenet mellet.

Megjegyzés

A fentiekből következik, hogy a megfigyelhetőséget elég lenne 0 bemenet mellett vizsgálni.

Tartalom

Hogyan ellenőrizhető az megfigyelhetőség?

Megjegyzés

1. A kritériumot csak időinvariáns esetre adjuk meg.
2. Csak a teljes megfigyelhetőségre adunk kritériumot.

Tétel (Kálmán-kritérium) megfigyelhetőségre

Adott az $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ egyenletekkel adott rendszer LTI. Ez a rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető, ha az

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T$$

ún. megfigyelhetőségi mátrix (observability matrix) rangja maximális, azaz n.

Bizonyítás

Kiindulás: az állapotegyenlet megoldása a kimenetre

$$y(t) = C\exp(At)x_0 + \int_0^t C\exp\{A(t-\vartheta)\}Bu(\vartheta)d\vartheta + Du(t)$$

Bizonyítanunk kell, hogy x_0 kifejezhető $y(t)$ és $u(t)$ ismeretében.

Egy átrendezés

Minden olyan tagot, amelyben x_0 nem szerepel a bal oldalra rendezünk (az számítható)

$$y(t) - \int_0^t C\exp\{A(t-\vartheta)\}Bu(\vartheta)d\vartheta - Du(t) = C\exp(At)x_0$$

Jelöljük a bal oldalt $\tilde{y}(t)$-vel.

Bizonyítás - folytatás

Fejtsük a jobb oldalt Taylor-sorba

$$\tilde{y}(t) = C\left(I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \cdots \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots\right)x_0$$

A Cayley-Hamilton tétel miatt a „nagy” hatványokat kifejezhetjük, így

$$\tilde{y}(t) = \left(\alpha_0(t)C + \alpha_1(t)CA + \alpha_2(t)CA^2 + \cdots \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}\right)x_0$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \cdots & \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

Bizonyítás - befejezés

Észrevesszük az M_o mátrixot

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \cdots & \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} M_o x_0$$

Ha $\operatorname{rank}(M_o) < n$, akkor $\ker(M_o)$ nem üres és $\forall x_0 \in \ker(M_o)$ esetén $\tilde{y}(t) \equiv 0$ azaz őket a kimeneten nem tudjuk megkülönböztetni.

x_0 visszaszámítása

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(t_1) \\ \tilde{y}(t_2) \\ \vdots \\ \tilde{y}(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0(t_1) & \alpha_1(t_1) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_1) \\ \alpha_0(t_2) & \alpha_1(t_2) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0(t_n) & \alpha_1(t_n) & \cdots & \alpha_{n-1}(t_n) \end{bmatrix} M_0 x_0$$

Mivel megfelelő $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < T$ mellett az első mátrix invertálható, így x_0 meghatározható. (SISO eset.)

Tartalom

Megfigyelhető és irányítható alterek

Kérdésfelvetés

1. Milyen következményei vannak annak, ha egy rendszer nem irányítható vagy nem megfigyelhető?
2. Van-e olyan bázisválasztás, ahol ezek a tulajdonságok triviálisan „látszanak”?
3. Mikor baj, ha egy rendszer nem irányítható?
4. Mikor baj, ha egy rendszer nem megfigyelhető?

Megjegyzés

A kérdéseket csak lineáris időinvariáns rendszerek esetében vizsgáljuk.

Irányíthatósági lépcsős alak

Vegyünk egy nem irányítható rendszert

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

hogy

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = k < n$$

Nem irányítható alrendszer

Legyen $L = \mathrm{IM}(M_c)$, hogy $\dim L = k$. Akkor létezik egy olyan $z = Tx$ állapottér transzformáció, hogy

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

ahol $z_1 \in \mathbb{R}^k$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Az $\dot{z}_2 = \tilde{A}_{22} z_2$ alrendszerre nem hat a bemenet.

Megfigyelhetőségi lépcsős alak

Vegyünk egy nem megfigyelhető rendszert

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx$, hogy $\mathrm{rank}(M_o) = k < n$

Nem megfigyelhető alrendszer

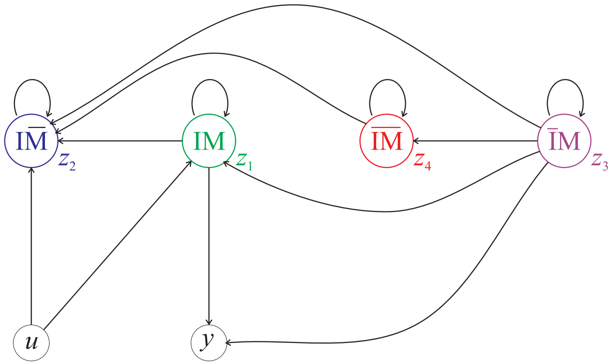
Legyen $L = \mathrm{IM}(M_o)$, hogy $\dim L = k$. Akkor létezik egy olyan $z = Tx$ állapottér transzformáció, hogy

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Du$$

ahol $z_1 \in \mathbb{R}^k$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$. Az z_2 alrendszer alakulása a kimeneten nem figyelhető meg.

Kálmán-féle dekompozíció



Kálmán-féle dekompozíció

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 & \tilde{C}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$$

Tartalom

Egy algebrai probléma

Kérdés

Adott egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix és egy $B \in \mathbb{R}^{n}$ vektor. Keressük a $K \in (\mathbb{R}^{n})^T$ sorvektort, hogy a $H = (A - BK) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sajátértékei egy előírt

$$\det(\lambda I - H) = \lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \cdots + h_{n-1}\lambda + h_n = \varphi_c(\lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei.

Megjegyzés

A BK (oszlopvektor $\times$ sorvektor) egy ún. diád. Tehát egy diád segítségével kívánjuk elmozgatni A sajátértékeit az előírt helyekre.

Ackermann-képlet

Cayley-Hamilton újra

A tétel miatt H kielégíti saját karakterisztikus egyenletét

$$0 = H^n + h_1 H^{n-1} + \cdots + h_{n-1} H + h_n I = \varphi_c(H)$$
$$0 = (A - BK)^n + h_1 (A - BK)^{n-1} + \cdots + h_{n-1}(A - BK) + h_n I$$

átcsoportosítva a tagokat

$$A^n + h_1 A^{n-1} + \cdots + h_{n-1} A + h_n I = \varphi_c(A) =$$
$$= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-2}B & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots + h_1 K H^{n-2} + K H^{n-1} \\ \cdots + h_1 K H^{n-3} + K H^{n-2} \\ \vdots \\ h_2 K + h_1 K H + K H^2 \\ h_1 K + K H \\ K \end{bmatrix}$$

Ackermann-képlet

Felismerve az M_c irányíthatósági mátrixot a jobb oldalon, majd átrendezve az egyenletet

$$M_c^{-1}\varphi_c(A) = \begin{bmatrix} \cdots + h_1 K H^{n-2} + K H^{n-1} \\ \cdots + h_1 K H^{n-3} + K H^{n-2} \\ \vdots \\ h_1 K H + K H^2 \\ h_1 K + K H \\ K \end{bmatrix}$$

Mivel mi K-t keressük, így az utolsó sort kiválasztjuk egy alkalmas egységvektorral (balról) történő szorzással

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1}\varphi_c(A)$$

ami az ún. Ackermann-képlet. (Matlab támogatás: `acker`)