Bevezetés a számításelméletbe II.

Zárthelyi feladatok — az ELSŐ zárthelyi pótlására

Pontozási útmutató

2012. május 7.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A 10 csúcsú G gráf két (közös csúcs nélküli) 5 pontú útból készült úgy, hogy az egyik út minden csúcsát összekötöttük a másik út minden csúcsával. Legföljebb hány élből állhat G-ben egy olyan élsorozat, amelyben G minden éle legföljebb egyszer szerepelhet?

* * * * *

A feladat nem mást kíván, mint a G egy lehető legtöbb élből álló, Euler-úttal bíró részgráfjának a megkeresését. Más szóval a kérdés az, hogy minimálisan hány élet kell elhagyni G-ből, hogy a maradék gráfban már legyen Euler-út. (2 pont)

G-ben 4 darab 6 fokú és 6 darab 7 fokú pont van (előbbiek a G-t alkotó két út végpontjai, utóbbiak az utak belső pontjai). (1 pont)

Mivel Euler-úttal bíró gráfban csak 2 páratlan fokú pont lehet és egyetlen él elhagyása csak két pont fokszámát változtathatja meg, ezért legalább 2 él elhagyására szükség van ahhoz, hogy a 6 helyett csak 2 páratlan fokú pont legyen. (2 pont)

Ez könnyen meg is valósítható: például ha v_2 és v_3 jelöli az egyik út (valamelyik vége felől számított) második és harmadik csúcsát és w_2 és w_3 a másik út két megfelelő csúcsát, akkor a $\{v_2, w_2\}$ és a $\{v_3, w_3\}$ élek elhagyása után G-ben már csak két páratlan fokú pont lesz. (1 pont)

Mivel a maradék gráf nyilván összefüggő is, (1 pont)

ezért (a tanult tétel szerint) van benne Euler-út. (1 pont)

Mivel G-nek 33 éle van és ebből minimálisan 2-t kell elhagyni ahhoz, hogy Euler-úttal bíró gráfot kapjunk, ezért a leghosszabb, élismétlés nélküli séta G-ben 31 élből áll. (2 pont)

2. A 30 csúcsú G gráf egy 4 pontú, egy 5 pontú, egy 6 pontú, egy 7 pontú és egy 8 pontú körből készült úgy, hogy a 4 pontú kör minden csúcsát összekötöttük a másik négy kör minden csúcsával.

a) Van-e G-ben Hamilton-út? b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

* * * * *

G-ben könnyen mutatható Hamilton-kör, például a következőképpen. Jelölje v_1, v_2, v_3, v_4 a 4 pontú kör csúcsait, a G-t alkotó 5, 6, 7, illetve 8 pontú kört pedig C_5, C_6, C_7, illetve C_8. A Hamilton-kört például v_1-ből indítva először „ugorjunk át” C_5 valamelyik csúcsába, majd a kör élei mentén sorban járjuk be C_5 összes csúcsát, végül az utolsóról lépjünk tovább v_2-re. Innen az előzőhöz hasonlóan C_6 egyik csúcsára ugrunk és bejárjuk C_6-ot; ezután v_3-on keresztül C_7, majd v_4-en keresztül C_8 összes csúcsát járjuk be. Végül C_8 legutolsónak érintett csúcsáról visszaléphetünk v_1-be. (8 pont)

Mivel G-ben van Hamilton-kör, ezért nyilván van Hamilton-út is. (2 pont)

(Ha valaki csak Hamilton-utat talál G-ben, de kört nem, az a fentiek szerint 2 pontot kaphat.)

3. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők vagy él mentén szomszédosak a sakktáblán, vagy legalább az egyikük a sakktábla szélén helyezkedik el. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A feladatbeli „vagy” nem kizáró, vagyis két csúcs akkor is szomszédos, ha mindkét feltétel teljesül. A sakktábla széle alatt a legfelső és a legalsó sor, valamint a balszélső és a jobbszélső oszlop mezőit értjük.)

* * * * *

G-ben lehet mutatni 30 pontú klikket: a széleken elhelyezkedő 28 mezőhöz vegyünk hozzá két további (tehát nem a tábla szélén található), egymással él mentén szomszédos mezőt.(4 pont)

30 színnel viszont G csúcsai könnyen megszínezhetők: a széleken lévő 28 mezőhöz használjunk el 28 különböző színt, a többi (6×6-os „sakktáblát” alkotó) mezőt pedig színezzük 2 további színnel, mégpedig a sakktáblán megszokott színezés szerint. (4 pont)

Mivel G-ben van 30 csúcsú klikk, ezért $\chi(G) \geq 30$, (1 pont)

másrészt mivel G csúcsai 30 színnel színezhetők, ezért $\chi(G) = 30$. (1 pont)

4. Egy 2012 pontú kör minden élét helyettesítettük 3 vagy 4 párhuzamos éllel; hogy éppen 3-mal vagy 4-gyel, azt minden élre véletlenszerűen döntöttük el. Mutassuk meg, hogy a kapott G gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$ teljesül (ahol $\chi_e(G)$ a gráf élkromatikus számát, $\Delta(G)$ pedig a G-beli maximális fokszámot jelöli).

* * * * *

Mivel $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$ minden gráfra igaz, ezért a $\chi_e(G) = \Delta(G)$ állítás bizonyításához elegendő lesz megmutatni, hogy G élei színezhetők $\Delta(G)$ színnel. (2 pont)

$\Delta(G)$ értéke háromféle lehet: 6, 7, vagy 8.

Ha $\Delta(G) = 6$, akkor a 2012 pontú kör minden élét pontosan 3 éllel helyettesítettük, vagyis ekkor G élhalmaza felvágható 3 páronként diszjunkt körre. Ha most mindhárom kör éleit két-két színnel színezzük (mégpedig úgy, hogy a körök mentén a két színt váltogatjuk), akkor ezzel valóban G egy helyes élszínezését kapjuk 6 színnel. (2 pont)

Ha $\Delta(G) = 7$, akkor G-t felfoghatjuk úgy, hogy az a $\Delta(G) = 6$ esetben leírt gráfból keletkezett néhány további él hozzávételével. Azonban ezek közül az extra élek közül semelyik kettő nem szomszédos (mert ha két ilyen él illeszkedne a közös v csúcsra, akkor $d(v) = 8$ volna). Így az extra éleket megszínezhetjük egyetlen további színnel, amivel valóban G egy helyes élszínezését kapjuk 7 színnel. (3 pont)

Végül, ha $\Delta(G) = 8$, akkor G részgráfja annak a H gráfnak, amit akkor kaptunk volna, ha a 2012 pontú kör minden élét 4 éllel helyettesítjük. Mivel még H élei is megszínezhetők 8 színnel (a $\Delta(G) = 6$ esettel analóg módon, csak 3 helyett 4 körre bontva az élhalmazt), ezért ugyanez igaz G-re is. (3 pont)

5. A $G(A,B;E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_9\}$ és $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_8\}$. Minden $1\le i\le 9$ és $1\le j\le 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha a jobbra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális méretű párosítást!

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

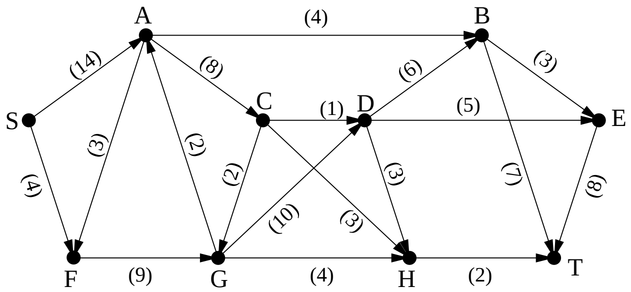
Például az $\{a_1,b_4\}$, $\{a_2,b_3\}$, $\{a_3,b_2\}$, $\{a_4,b_1\}$, $\{a_5,b_6\}$, $\{a_6,b_7\}$ és az $\{a_8,b_5\}$ élek 7 élű párosítást alkotnak G-ben. (3 pont)

Mivel az $\{a_1,a_3,a_5,a_8,b_1,b_3,b_7\}$ lefogó ponthalmaz G-ben (ez a feladatban megadott mátrixból könnyen ellenőrizhető), (5 pont)

ezért $\tau(G)\le 7$, így a $\nu(G)\le\tau(G)$ összefüggés szerint 7-nél nagyobb párosítás nem létezhet G-ben. Így a fent megadott párosítás maximális. (2 pont)

Megjegyezzük, hogy G-ben sok, a fent megadottól különböző 7 élű párosítás is van és 7 elemű lefogó ponthalmazból is van másik: $\{a_3,a_5,a_8,b_1,b_3,b_4,b_7\}$. A megadott 7 élű párosítás maximalitása mellett úgy is lehet érvelni, hogy mivel az $X=\{b_2,b_5,b_6,b_8\}$ csúcshalmaz megsérti a Hall-feltételt (mert $N(X)=\{a_3,a_5,a_8\}$) ezért G-ben nincs a B-t lefedő párosítás, vagyis nincs 7-nél nagyobb párosítás. (Hasonlóan, az $X=\{b_2,b_4,b_5,b_6,b_8\}$ is megsérti a Hall-feltételt.) De akár úgy is lehet indokolni, hogy G-ben nincs 8 élű párosítás, hogy meggyőződünk arról, hogy a megadott 7 élű párosításra nézve nem létezik javító út.

6. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy minimális vágást (S és T között)!



* * * * *

Az alábbi ábrán jelölt vágás (tehát $\{S,A,C,H\}$ és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az S,A,C,H csúcsokból a többibe futó élek összkapacitása) 16. (4 pont)

Az ugyancsak az ábrán látható folyam értéke szintén 16. (3 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)

ezért a 16 értékű folyam bizonyítja, hogy a megadott 16 értékű vágás minimális. (2 pont)

Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott vágás minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a vágás minimális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.)