G(V,E) összefüggő gráfon Euler-út az az élsorozat, amely az összes élet pontosan egyszer tartalmazza.

Euler-kör: G összefüggő gráfban olyan zárt séta, amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

G összefüggő gráfban $\exists$ Euler kör $\Rightarrow$ G gráf $\forall$ pontjának foka páros

G összefüggő gráfban $\forall$ pont foka páros $\Leftrightarrow$ G gráfban $\exists$ Euler-kör

G(V,E) összefüggő gráf esetén 2 pont kivételével az összes pont foka páros $\Leftrightarrow$ $\exists$ Euler-út G gráfban

G(V,E) egyszerű gráf Hamilton köre az a kör, ami a gráf minden pontját tartalmazza pontosan egyszer.

G(V,E) egyszerű gráf Hamilton útja az az élsorozat, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.

G egyszerű gráfban $\exists$ Hamilton kör $\Rightarrow$ k pontot elhagyva G gráfból maximum k db komponensre eshet szét.

Dirac-tétel:
G egyszerű gráfban $\forall$ pont foka $\geq \frac{n}{2}$ $(n=|V|)$ $\Rightarrow$ G gráfban $\exists$ Hamilton kör.

Ore-tétel:
G(V,E) egyszerű gráfban $\forall (x,y) \notin E$ $d(x)+d(y) \geq n \Rightarrow$ G gráfban $\exists$ Hamilton-kör.

G(V,E) c egy jó színezés r színnel, ha:

$c: V \rightarrow \{1,2,\dots,r\}$

$(x,y) \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

G gráf kromatikus száma $\chi(G)$, a legkisebb k, hogy G k-színezhető.

G páros gráf, ha $\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow$ G csúcsai szétoszthatók 2 részre (A,B) úgy, hogy $\nexists$ él A-n, illetve B-n belül sem

G páros gráf $\Leftrightarrow$ $\nexists$ G-ben páratlan kör

Klikk: teljes részgráf. Jele: $\omega(G)$.

$\chi(G) \geq \omega(G)$

Egy ponthalmaz független, ha semelyik 2 csúcsa között nem megy él

$\alpha(G)$: a maximális független ponthalmaz mérete G-ben

$\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ $\quad \omega(G) = \alpha(\overline{G})$

$\forall$ színosztály $\leq \alpha(G) \Rightarrow$ kell $\frac{n}{\alpha(G)}$ szín. $\quad \chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

Mohó színezés:

$\Delta(G)$: maximális fokszám G-ben

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Minden lépésben az adott csúcsnak a legkisebb szóba jövő színt adjuk.

Brooks-tétel:

G összefüggő gráf, nem páratlan kör, nem teljes gráf $\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$

Mycielski-konstrukció:

$\forall k \geq 3$-ra $\exists$ olyan G_k gráf, amire $\omega(G_k) = 2$; $\chi(G_k) = k$

G síkbarajzolható $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$ (négyszíntétel)

G perfekt gráf, ha $\forall G'$ feszített részgráfjára: $\chi(G') = \omega(G')$

Lovász-tétel: G perfekt $\Leftrightarrow \overline{G}$ perfekt

G-ben $\exists$ feszített részgráfként ≥ 5 hosszú páratlan kör, vagy annak komplementere $\Leftrightarrow G$ nem perfekt. (Erős perfekt gráf tétel)

$I_1, I_2, \ldots, I_n$: $\mathbb{R}$-en korlátos és zárt intervallumok

$V(G) = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$

I_i és I_j szomszédos G-ben $\Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset$

Ha G így előáll $\Rightarrow G$ intervallumgráf

$\forall$ intervallumgráf perfekt.

Jó élszínezés: $c: E \to \{0,1,\dots,r\}$, ha e és f csatlakozó színek, akkor nem kaphatják ugyanazt a színt.

$\chi_e(G)$: élkromatikus szám

Bármilyen gráfra: $\chi_e(G) \leq 2\,\Delta(G) - 1$

Vizing-tétel: G egyszerű gráf $\Rightarrow \chi_e(G) \leq \Delta(G)+1$

Párosítás: (független élek)

Olyan élek halmaza, hogy semelyik 2-nek $\nexists$ közös csúcsa.

$\nu(G)$: független élek maximális száma.

Javító út: egy P párosítás élei felváltva P-n kívüli és P-beli, a kezdő és a végpontot P nem fedi le.

Alternáló út: felváltva tartalmaznak P-beli és nem P-beli éleket.

A javítóutak módszere megtalálja a maximális párosítást páros gráfban.

Lefogó ponthalmaz: $\forall$ élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza

$\tau(G)$: a minimális lefogó ponthalmaz mérete

$\nu(G) \leq \tau(G)$

König-tétel: páros gráfban: $\nu(G) = \tau(G)$

Hall-tétel: $G=(A,B,E)$ páros gráf

$\exists$ A-t fedő párosítás $\Leftrightarrow |N(X)| \geq |X| \quad \forall X \subseteq A$-ra

Frobenius-tétel:

$\exists$ $G=(A,B,E)$ páros gráfban teljes párosítás

$\Updownarrow$

$|A|=|B|$ és $\forall X \subseteq A$: $|N(X)| \geq |X|$

Tutte-tétel:

G-ben $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ bármely k csúcsot elhagyva ($k \in \mathbb{N}$) a kapott gráf páratlan komponenseinek száma $(C_p(G \setminus X)) \leq k$

$\rho(G)$: lefogó élek minimális száma ($\nexists$ izolált pont)

Gallai-tétel:

1.) $\forall$ G-re : $\alpha(G) + \tau(G) = n$

2.) $\forall$ G-re : $\nu(G) + \rho(G) = n$

Ford-Fulkerson-tétel:

$$\max_{f \text{ folyam}} m(f) = \min_{v \text{ vágás}} c(v)$$

Edmonds-Karp-tétel:

Ha mindig a legrövidebb út mentén javítunk akkor az algoritmus polinom időben lefut.

G <u>k-élösszefüggő</u>, ha $\leq k-1$ élet elhagyva összefüggő marad.

G <u>k-összefüggő</u>, ha $\exists$ $k+1$ csúcsa és $\leq k-1$ csúcsot elhagyva összefüggő marad.

Az E' <u>élhalmaz lefogja az u-v utakat</u>, ha E'-t elvéve már nem lesz u-v út.

$\lambda'(u,v)$:= minimális méretű u-v utakat lefogó élhalmaz mérete.

$\lambda(u,v)$:= u és v közötti éldiszjunkt utak maximális száma.

A V' <u>csúcshalmaz lefogja az u-v utakat</u>, ha V'-t elhagyva $\nexists$ u-v út $(u,v \notin V')$.

$\mathcal{K}'(u,v)$:= u-v utakat lefogó csúcshalmazok minimális elemszáma.

$\mathcal{K}(u,v)$:= u és v közti pontdiszjunkt utak maximális száma.

<u>Menger I. tétele:</u>

G irányított gráf, $u,v \in V(G)$ $\lambda(u,v) = \lambda'(u,v)$

<u>Menger II. tétele:</u>

G irányítatlan gráf, $u,v \in V(G)$ $\lambda(u,v) = \lambda'(u,v)$

<u>Menger III. tétele:</u>

G irányított gráf $u,v \in V(G)$ $(u,v) \notin E(G) \Rightarrow \mathcal{K}(u,v) = \mathcal{K}'(u,v)$

<u>Menger IV. tétele:</u>

G irányítatlan gráf $u,v \in V(G)$ $(u,v) \notin E(G) \Rightarrow \mathcal{K}(u,v) = \mathcal{K}'(u,v)$

<u>Menger V. tétele:</u>

G k-élösszefüggő $\Leftrightarrow \forall u,v \in V(G)$: $\lambda(u,v) \geq k$

<u>Menger VI. tétele:</u>

G k-összefüggő $\Leftrightarrow \forall u,v \in V(G)$: $\mathcal{K}(u,v) \geq k$

$a|b$ "a osztja b-t", ha $\exists k \in \mathbb{Z}: a \cdot k = b$

$a, b \in \mathbb{Z}$

Prímszám: $\forall a$: $a|a$; $-a|a$; $1|a$; $-1|a$

$0; 1; -1$ nem prímek!

$p|a \cdot b \Rightarrow p|a$ vagy $p|b$

Összetett számok: nem prím, nem $0, 1, -1$

Számelmélet alaptétele:

$\forall$ szám $\neq 0, 1, -1$ felírható prímek szorzataként és ez a szorzat sorrendtől és az esetleges (-1)-es szorzóktól eltekintve egyértelmű.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \qquad \alpha_i \geq 1, \quad p_i \text{ prím}$$

Euklideszi algoritmus:

lnko $(120, 18)$

$$120 = 6 \cdot 18 + 12$$
$$18 = 1 \cdot 12 + \boxed{6} \longrightarrow \text{legnagyobb közös osztó}$$
$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

Osztók száma: $d(n)$ (csak pozitív)

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \qquad d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_r + 1)$$

Egy lineáris kongruencia megoldható: $\Leftrightarrow$ $(a, m) | b$

$$a x \equiv b \quad (m)$$

Megoldások száma: (a, m)

Euler-féle φ fv:

$\varphi(n) :=$ n-hez relatív prímszámok száma 1-től n-ig

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha - 1} \qquad n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$(a,b)=1 \Rightarrow \varphi(a,b)=\varphi(a)\varphi(b)$

Lemma: $a \equiv b \ (m) \Rightarrow (a,m)=1 \Leftrightarrow (b,m)=1$

Teljes maradékrendszer:

A számhalmaz teljes maradékrendszer modulo n, ha

- $|A|=n$
- $x,y \in A$, $x \neq y$: $x \not\equiv y \ (n)$

pl.: teljes maradékrendszer mod 10 : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Redukált maradékrendszer:

A redukált maradékrendszer

- $|A|=\varphi(n)$
- A elemei relatív prímek n-hez
- $x,y \in A$ $x \neq y$: $x \not\equiv y \ (n)$

pl.: redukált maradékrendszer mod 10 : 1,3,7,9

Euler-Fermat tétel:

$(a,m)=1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (m)$

Kis-Fermat tétel:

$p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ VAGY $a^p \equiv a \ (p)$

p prím