

wiener @ cs. bne. hu

www.cs.bne.hu / bsc 1

2 ZH : 100 pont ; 8 feladat , 80 pont

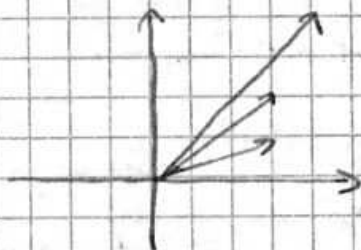
PZH , javítható de ez számít

ZH : legő jegyben 40 %

tétel, ①, fogalom ismerete, értel

bizonyítás : ~~sz~~ nem kellene a 2-eshez.Altér① : V vektortér, $W \subseteq V$ $W \neq \emptyset$ W altér, ha maga is vektortér u. azokra a műveletekre, mint V

pl: sík (ez vektortér)

 x tengelyen lévő vektort is egy altér.

• részaltér.

• a műveletek és az arányosság teljesülnek

A $\emptyset$ is altér. $\emptyset$ altér és saját maga (V) triviális altér, az összes többi pedig valódi altér

- le kell ellenőrizni a 10 axiómát, hogy altér-e

Tétel: V vt, $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha az
összeadás és a skalárszorzás nem vezet ki belőle

$$\textcircled{1} \forall u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$$

$$\textcircled{2} \forall u \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W$$

③ " $\Rightarrow$ " ha valamelyik nem teljesül, akkor már nem lenne vektortér

" $\Leftarrow$ " $\bar{O}_1$: könnyű ✓
 $\bar{O}_2$: könnyű ✓ } mert a magyarságban teljesül.
 $\bar{O}_3$: $\exists O_w$: ha $O_v \in W$, akkor létezik magyarság : $O_v + \underline{w} = \underline{w}$
~~és ha~~ $O_w = O_v$: $\underline{w} \in W$
 $O \cdot \underline{w} = O_v \in W$ ✓

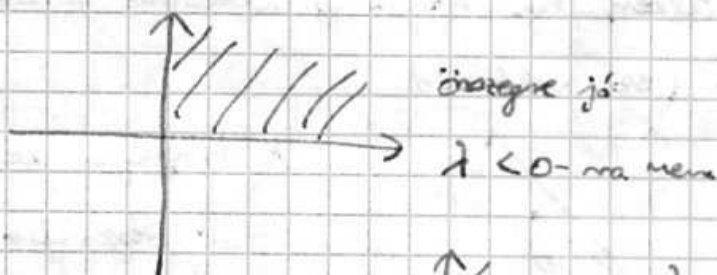
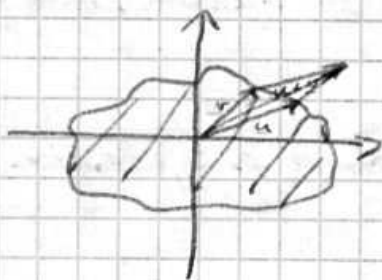
$\bar{O}_4$: $\forall \underline{w} \in W$ -hez $\exists -\underline{w}$: $\underline{w} + (-\underline{w}) = \underline{0}$
 létezik : $-\underline{w} \in W$

(2) alkalmazandó, $\lambda = -1$: $(-1) \cdot \underline{w} = -\underline{w}$ (előző óra)

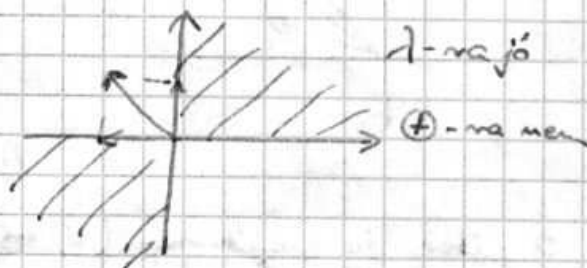
S_1
 S_2
 S_3
 S_4 } műveleti zártaság, és ha a magyarságban teljesül, akkor a halmazban is.

Pl: $x=1$ ~~to~~ egyenes nem átlós, mert $O_v \in W$

ha eleve lezár, akkor is mindig létezik négyes.



örökre jó
 $\lambda < 0$ -ra nem



λ -ra jó
 $\oplus$ -ra nem

pl: alterai : origó átlós egyenes
 (3D tdr: origó átlós egyenes, sík.)



zárt összeadás és λ -val való szorzás.

csak öt az alterai: neg.

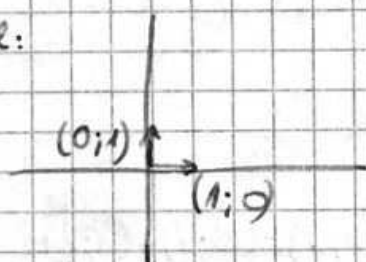
Műv: $\underline{w}, \underline{z}$ alterai λ -nak $\Rightarrow \underline{w} \cap \underline{z}$ is alter

- ⑤ Lineáris kombináció: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n \in V$ a lin. kom.

- ⑥ Generátum: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ $\mathcal{L} \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{ \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}$ az összes ilyen, ahová 2-4 tehetjük.

Pl:



$\langle (1;0); (0;1) \rangle = \mathbb{R}^2$ (szk)

$\lambda_1 \cdot (1;0) + \lambda_2 \cdot (0;1) =$
 $= (\lambda_1; 0) + (0; \lambda_2) = (\lambda_1; \lambda_2)$

$\langle (1;0) \rangle = x$ tengely

Tétel: a generátum mindig altér. ($\rightarrow$ generált altér)

Biz: $\lambda_1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \underline{v}_n$

$\mu \cdot \underline{v}_1 + \dots + \mu \cdot \underline{v}_n$

$(\lambda_1 + \mu) \underline{v}_1 + \dots + (\lambda_n + \mu) \underline{v}_n$

is benne van a generátumban, azaz lineáris kombináció

Skálával szorzás: $\mu \cdot (\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) = \mu \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu \lambda_n \underline{v}_n$

- ⑦ Generátorrendszer: ha $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \rangle = V$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$

$\uparrow$
generátorrendszer (gen.r)

pl.: a szk gen.r-e $\langle (0;1); (1;0) \rangle$

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \dots \right\}$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$

$\Rightarrow z = 3x + 2y$
 $\uparrow$
 origó átmenés

$$(1,0), (0,1), (1,1)$$

$\Rightarrow$ így együtt is gen. r.

① lineáris függetlenség

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$$

lin. ftt.-ek, ha $\nexists \underline{v}_i (i=1, 2, \dots, n)$ ami előáll a többi lin. l.-kból

$$\underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

pl: $(1;0) = \lambda \cdot (0;1) = (0;\lambda)$ nem áll elő $\Rightarrow$ lin. ftt.-ek.

$$\begin{pmatrix} 1;0;0 \\ 0;1;0 \\ 0;0;1 \end{pmatrix} \} \text{ lin. ftt. a. r.}$$

$(1;0), (0;1), (1;1)$ nem lin. ftt. r., mert $(1;1) = (0;1) + (1;0)$

② kicsit rájáig tanultuk leellenőrizni, hogy ftt. r. - e $\Rightarrow$ másként def.

① : $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin. ftt., ha

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

triviális lin. l.

A két def. ekvivalens:

① $\Rightarrow$ ② Tfk $\exists$ nem triv. lin. l., ami 0-t ad:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = 0$$

$$\lambda_1 \neq 0$$

$$\lambda_1 \underline{v}_1 = -\lambda_2 \underline{v}_2 - \lambda_3 \underline{v}_3 - \dots - \lambda_n \underline{v}_n$$

$$\underline{v}_1 = \frac{-\lambda_2 \underline{v}_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_3 \underline{v}_3}{\lambda_1} - \dots - \frac{\lambda_n \underline{v}_n}{\lambda_1}$$

először $\underline{v}_1$ a többi lin. l.-jéből.

② $\Rightarrow$ ① Tfk: $\underline{v}_1 = \lambda_2 \underline{v}_2 + \lambda_3 \underline{v}_3 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

$$0 = -\underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

nem triv. lin. l., mert $\lambda_1 = -1 \neq 0$

Ha egy vektorm. ftt. $\Rightarrow$ egyértelmű előállítás

Alk: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ fgt

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \text{ egyenletrendszer}$$

(ha még $\underline{v} = \mu_1 \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_n \underline{v}_n$, akkor $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$)

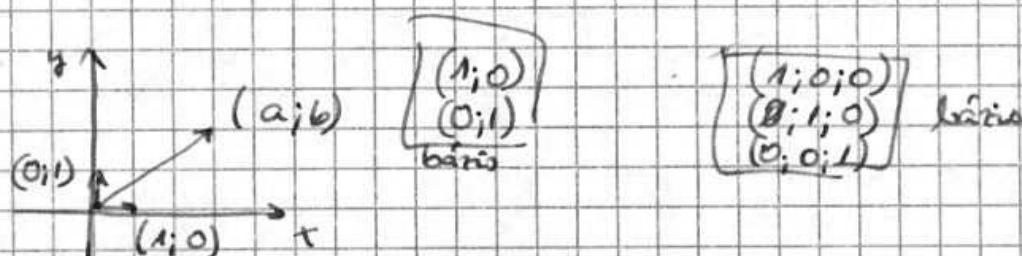
③: Hh. előzőt mindkét oldalán $\Rightarrow \ominus$

$$\underline{v} - \underline{v} = \underline{0} = (\lambda_1 - \mu_1) \underline{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) \underline{v}_n$$

triv. lin. k.

$$\lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2; \dots, \lambda_n = \mu_n$$

① $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ BÁZIS, ha generátorrendszer és fgt.



a bázis annyi eleme, ahány dimenziós a vektortér.

① dimenzió: bázis elemszáma.

Tétel: V bázisnak ugyanannyi eleme van.

Kicserélési tétel: $F = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_k\}$ fgt. vektorelemek } V -ben generátorrendszer.
 $G = \{\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_r\}$

F V eleme kicserélhető G egy elemére, így, hogy fgt rendszer maradjon.

Kör: ha többszöröse fgt. r -t és teljes. gen. r -t veszt, akkor $|F| \leq |G|$

bázis: lineárisan független generátorok

All: B_1 és B_2 bázisok V vektortérben $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Kisváltási tétel: $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ gen. r. $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ fgt. r. $\left| \begin{array}{l} \forall f_i - \text{hoz } \exists g_j, \text{ hogy } f_i \in \langle G \rangle \\ \boxed{F \setminus \{f_i\} \cup \{g_j\}} \text{ független} \end{array} \right.$

K. t. $\Rightarrow$ All.

• $|F| \leq |G|$ vagyis $m \leq k$

először, az f_1 -et, majd f_2 -t, majd a többit is megadjuk egy

G -beli $\Rightarrow$ összes elem G -beli lesz $\Rightarrow g_r \leq k$

• B_1 és B_2 bázisok: B_1 fgt., B_2 gen. r. $\Rightarrow |B_1| \leq |B_2|$
 B_2 fgt., B_1 gen. r. $\Rightarrow |B_2| \leq |B_1|$ $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Kis. t. biz.

Lemma: $f_1, f_2, \dots, f_m$ fgt.

$f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$ nem fgt.

$\Rightarrow$ f_{m+1} előáll $f_1, f_2, \dots, f_m$ lin. kombinációjaként

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1} \in \mathbb{R}$: $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{m+1} f_{m+1} = 0$
 nem mindegyik 0

Ha $\lambda_{m+1} = 0 \Rightarrow$ a maradék is 0 $\Rightarrow$ a maradék triv. lin. komb., amelyet öszero $0 \Rightarrow$ $\downarrow$

$\lambda_{m+1} f_{m+1} = -\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \dots - \lambda_m f_m \quad / : \lambda_{m+1} \quad \lambda_{m+1} \neq 0$

$f_{m+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{m+1}} f_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{m+1}} f_2 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} f_m$, tehát tényleg előáll a többi lin. kombinációjaként.

Ind: $\exists f_i$, ami nem cserélhető ki semmilyen g_j -re

pl: $g_1, f_2, f_3, \dots, f_m$ nem fgt.

$g_2, \dots, f_m$ nem fgt.

$g_k, \dots, f_m$ nem fgt.

$$F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \text{ fgt}$$

Lemma áll: $\{g_1, f_2, f_3, \dots, f_n \text{ nem fgt} \}$
 $f_2, f_3, \dots, f_n \text{ fgt}$ } $\Rightarrow g_1 \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle$
 $\vdots$
 $g_2 \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle$
 $\vdots$
 $g_k \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle$
 $\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ gen.r.
 $\langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle$ gen.r.
 $\Rightarrow$ vektorok
 $\Rightarrow$ áll as fgt
 $\Rightarrow$ lin
 $\Rightarrow$ komb.
 $\Rightarrow$ rend
 $\Rightarrow$ II)
 $\Rightarrow$ f_1 előáll a lin. kombinációval
 $(f_1 \in \langle f_2, f_3, \dots, f_n \rangle)$
 $\Rightarrow$ f_1 nem fgt

Lin. fgt. generálás $\mathbb{R}^n$ -ben.

Pl: a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ fgt} - k - e\}$

b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \rangle$

a) $\exists$ -e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nem mind 0, hogy

b) $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 & 10 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 & 11 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 & 12 \end{cases}$$

$\exists$ -e nem $(0,0,0)$ megoldás
 $\Rightarrow$ igen $\Rightarrow$ nem lin.
 $\Rightarrow$ nem lin. fgt.

az a kérdés, hogy hány megoldás van?

Ezer a példát mind nívószereffektus lin. egy. r.-ek megoldására

Síkat mátrixai is lin. egy. r.-ekre vonatkozó.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ x + 4y - 10z = 0 \end{cases}$$

Van-e közös pontjuk, hány van-e megoldás

Ezt akarjuk gyorsan megoldani.

Gauss-elimináció

$$ax=b$$

$$3x=5$$

$$0x=0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$x=\frac{b}{a}$$

$$x=\frac{5}{3}$$

$$0x=5 \Rightarrow \text{mincs so.}$$

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

$$\begin{cases} cax+cby=ce \\ cax+ady=af \end{cases} \quad \ominus$$

$$(ad-bc)y=af-ce$$

$$ad-bc \neq 0 \Rightarrow y = \dots \Rightarrow x = \dots$$

$$ad-bc=0 \text{ és } af-ce=0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$$

$$ad-bc=0 \text{ és } af-ce \neq 0 \Rightarrow \text{mincs so.}$$

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+9y=9 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{7}$$

$\Rightarrow$ egy valódi lehetőség

$$\begin{cases} x+0y=5 \\ 2x+0y=10 \end{cases}$$

Ált. $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}$$

$$\mathbb{R}: \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

$$x=2, y=3, z=7$$

ilyen alakba lehet írni az összeget

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}$$

1. eset: $a_{11} \neq 0$ az első soron van a 1-es együttható

2. eset: $a_{11} = 0$ megkeresem az első sorban a nem 0, vagy ha nincs, lépem egyet jobbra

$\lambda \neq 0$ -val szorozom a sort
- ha 1 sor
- egy sorhoz egy másikat adok hozzá
- csupa 0 sort el lehet dobni
- két sor felcserélhető

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \dots & \vdots & \end{array}$$

- cél: a_{11} alatt csak 0 legyen $\Rightarrow$ 2. sor - 1. sor: a_{12}

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & \vdots & \\ 0 & \dots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}$$

- a keretből lépünk jobbra és az

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

- cél a keret alattiakat kinullálni

ha az ^{az oszlop} oszlop ^{az oszlop} oszlop 0, akkor még egyet jobbra lépünk

- ugyanígy elvágunk a keretből jobbra - le ezt részben

- addig csinálunk, míg a sorok vagy oszlopok aligra elváltak.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

lépés alatt

Ha a jobb méltó elvétel,

de az aligát nem, akkor az adott

osztály alatt oszlop 0 van $\Rightarrow$ elhagyhatunk, ha a

jobb oldali is 0

Ellentmondás, min

na, ha a jobb oldali

van nem 0

mindig így érkeztünk hozzá
a feladatot aligát elvétel

- innen már kért meggyűnt: pl: $z = \frac{2}{3} \Rightarrow y + \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

$$\textcircled{1} x + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Itt is lehet 0-zni az 1-esét felvétel:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 & 0 & \frac{5}{3} \\ \hline 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

redukált lépés
alatt (RLA)

végeredmények

Amikor nem minden ilyen lép:

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 6 & 8 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 4 & 6 & 8 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 0 & 2 & 6 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ \hline 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ x & y & z \end{array}$$

$$\begin{cases} x - \frac{5}{2} z = 2 \\ y + 3z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{5}{2} z \\ y = -\frac{1}{2} - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ez a megoldás

Ha van olyan sor, amikor nincs vezéregyes, akkor az megoldás van
vagy nincs megoldás (tilos: jobb 0, bal nem 0)

0) Lineáris egyenlet $\rightarrow$ RLA-ra lehet hozni

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

egyetlenes
matrix, A

röviden: $A|b$

kitérített egyen. matrix

1) $\exists$ ma $\Leftrightarrow$ nem jön létre tilos sor

(~~men~~) tilos sor: $0000...0 \mid \text{nem } 0$

2) Egyértelmű megoldhatóság $\Leftrightarrow$ nem jön létre tilos sor és

$\forall$ oszlopban van vezéregyes

Vagy: a négyes RLA-ban n.a. sor van, mint oszlop.

All: kevesebb egyenlet, mint ismeretlen (pl 3×5 -ös), akkor $\nexists$ egyértelmű m.

Dis: minden oszlopban kéne vezéregyes, de több oszlop, mint sor, ~~sz~~ csak foghat

$$ax = b \quad a \neq 0$$

$$\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}$$

$\exists$ egyértelmű m. $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

Hifejzés, ami csak az ek-matrixtól függ, de eldönti, hogy van-e egyért. m.

Determináns

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{array}{c} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} & \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \end{array}$$

max hány bolya? $\rightarrow 5$

húnyféleképpen? $\rightarrow 5!$

det: $n!$

1 3 2 4 5

$\rightarrow$ permutáció (sorrendezés) : $1, 2, \dots, n$ rendű sorrendezés

az első sorbeli hányadik oszlopban van.

$n!$ perm

determínálása csak $n \times n$ -es mátrixoknál van (négyzetes mátrixok)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{maga a mátrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \rightarrow \text{a determináns}$$

$$\det A = |A| = \sum_{\pi \text{ perm.}} I(\pi) \cdot a_{1\pi_1} \cdot a_{2\pi_2} \cdot a_{3\pi_3} \cdot \dots \cdot a_{n\pi_n}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \pi: & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \end{matrix}$$

$$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55}$$

Éljük fig. a mátrix elemaitől, csak a π -től függ.

Inverziónál: Az összes pár közül orárat a száma, amelyet nem korrekcióban van (magaság szerint)

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 13 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \quad \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ pár}$$

$$\text{|||||} = 7$$

inverziónál $I(\pi) = 7$

Ha a permutáció inverzionálma $(\pi \Rightarrow)$ a tag $(+)$, ha $(-)$, akkor $(-)$

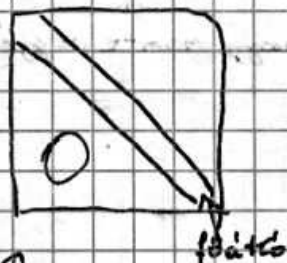
$$|3| = 3$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ez a módszer hasonl a determinánsal

Gyors módszer

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 7$$



↑ felső Δ -mátrix

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

csak azok az elemek érdekesek, amik nem 0-k $\Rightarrow$

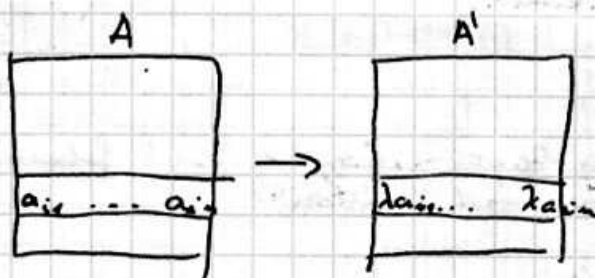
minden sorból egyenként kiválasztás



← alsó Δ -mátrix

felső vagy alsó Δ -mátrix: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

2.)



$$\det A' = \lambda \cdot \det A$$

Biz: minden sorban 1 elem λ -szorosra változott, a többi változatlan $\Rightarrow$ sorokat is λ -szorosra $\Rightarrow$ összegük is.

$$\lambda \cdot \text{sor nagy sorok} \Rightarrow \lambda \det A$$

3.) egy sor / oszlop $\Rightarrow$ csupa 0 $\Rightarrow \det A = 0$

$$4.) \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \dots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

ACI: ha valamelyik sor / oszlopból 0 áll össze $\Rightarrow$ a det. is összeáll összeáll

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} \cdot (\alpha_{1\pi_1} + \beta_{1\pi_1}) \cdot \alpha_{2\pi_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{m\pi_m} =$$

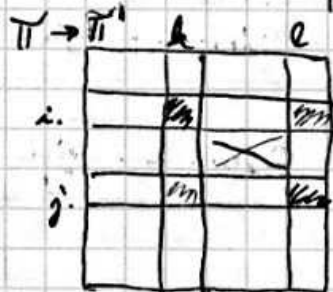
$$= \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} \cdot \alpha_{1\pi_1} \cdot \alpha_{2\pi_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{m\pi_m} + \sum_{\pi} (-1)^{I(\pi)} \cdot \beta_{1\pi_1} \cdot \alpha_{2\pi_2} \cdot \alpha_{3\pi_3} \cdot \dots \cdot \alpha_{m\pi_m}$$

$$= \det B + \det C$$

Eddig az előjelezési szabály nem számolt.

5.) $\exists$ két azonos sor / oszlop $\Rightarrow \det = 0$

$$R: \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 0$$



próbát csinált, hogy kijelölje egymást

$\pi: \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_j, \dots, \pi_m$
 $\pi': \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots, \pi_i, \dots, \pi_m$
 mindig lehet két elemet cserélni, mert l és l közül π' helyén π van
 csak a k -t és l -t cseréltem ki.

$$a_{ik} \cdot a_{je} = a_{ie} \cdot a_{jk}, \text{ met u.a. } a_{ii} = 1.$$

A két sorozat azonos

$I(\pi)_{ps} \Rightarrow I(\pi)_{pte}$ (mert így kapunk, hogy 2 elemet felszereltem)
(pte számmal váltottam)

$$I(\pi)_{\text{ptl}} \Rightarrow I(\pi)_{\text{ps}}$$

ex a 2 object credit

Biz: 1.) $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n)$

$$\vec{\pi}' = (\vec{\pi}_1, \dots, \vec{\pi}_{i-1}, \vec{\pi}_i, \dots, \vec{\pi}_n)$$

ez a két nem a
váltott inverzió
szempontjából

cosk itt vektorize 1-gyd

2) i -edik és j -edik csomópont helyett, $(i < j)$

$$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_i, \dots, \pi_j, \dots, \pi_n)$$
$$k_{\text{ab}} \text{ lépés } (k=j-i-1)$$
$$\tilde{H}^1 = (\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_j, \dots, \tilde{H}_i, \dots, \tilde{H}_n)$$

À l'épave: ... , $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1}, \tilde{u}_{n+2}, \dots$

A. T_j-t keedjü k mæzgetni:

$$(+1 : \pi_i, \sigma_i \rightarrow \pi_j, \sigma_j)$$
$$T_j - T_i \quad \text{e} \quad \text{diferença}$$
$$\Sigma = 2x+1 \quad \text{g.c.d.}$$

Oxlophus reganus.

(6.) $\text{row/overlap} + 2 \cdot \text{row/stride} \Rightarrow \text{det nem váltva}$

$$\begin{bmatrix} i & a_{i1} & \dots & a_{in} \\ j & a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix}$$

2) heit wort/ovalpot kiezandlinn $\Rightarrow$ det(-) - reagering verlet

$$\begin{array}{c} i \\ \hline \hline j \end{array} \xrightarrow{\substack{6-12 \\ \text{row}}} \begin{array}{c} \hline \hline i+j \end{array} \xrightarrow{\lambda=-1} \begin{array}{c} -j \\ \hline j \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} -j \\ \hline \hline \end{array} \xrightarrow{\substack{2 \cdot \text{row} \\ \text{row}}} \begin{array}{c} -j \\ \hline \hline \end{array} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \hline \end{array} \Rightarrow \lambda \right) \begin{array}{c} a_{j+1} \dots a_{jn} \\ \hline a_{j+1} \dots a_{jn} \end{array}$$

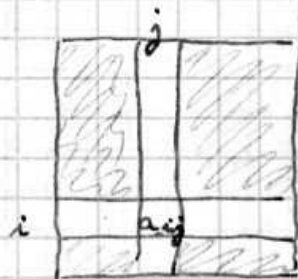
$$= -1 \cdot \begin{array}{c} \hline \hline j \end{array} = -\det.$$

- 4 -

Det. kiszámítása

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \dots$$

Def: előjeles aldetermináns



előjeles aldetermináns

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

salátaábrák

All: $\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$

Kifejtési tétel $\rightarrow$ (akkor jó, ha $a_{ii} \neq 0$ valahol)

Biz: $\det A = a_{i1}(\dots) + a_{i2}(\dots) + \dots + a_{in}(\dots)$

$\uparrow$
m=0! az összeg

itt pont a raktározott rés szerepel.

Meg kell nézni az előjeleket is: Freund 1.4.2. tétel

$A | b$
 $\downarrow$
 $n \times n$ -es mátrix $\rightarrow$ n magas oszlop

All: $A | b$ -nek $\exists$ egyért. m. $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Biz: " $\Rightarrow$ " Gauss-elimináció $\rightarrow$ RLA $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} | b$

ha a végén nem 0 $\Rightarrow$ az elején sem volt 0 (mert ilyen lépésekkel lehetne 0-ra hozni)

" $\Leftarrow$ " $\det \neq 0$

kér: $\exists$ egyért. m.

típk. nem egyért. m.: ① $\nexists$ m. $\rightarrow$ Gauss kilev. m. $\rightarrow$ $\det A = 0$

② végtelen sok m. $\rightarrow$ csupa 0 sor kivételével $\det A = 0$
(vagy csupa 0 sor)

A Gauss-el. lépései nem befolyásolják a determináns 0-ságát!

Matrixok



valós számok! $k \times n$ -es elrendezésben

$A + B$

(Ilyen nincs.)



elemenként, a megfelelő pozíciókat összeradjuk

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

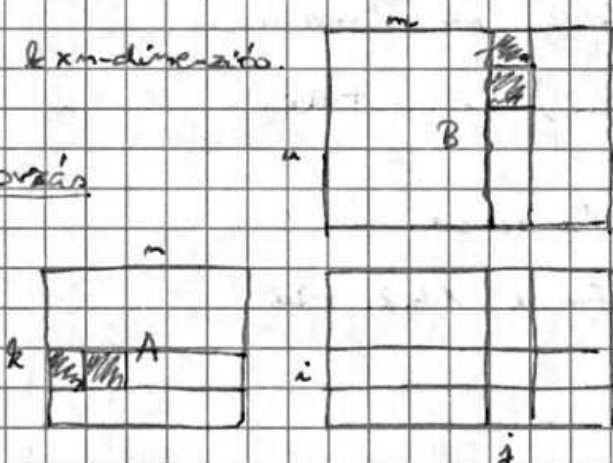
- asszociatív
- van kompoz 0 is

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$(\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda (A_{ij}) \quad (\text{szorzás skalárral})$$

valószínűleg állítottam a $k \times n$ -es mátrixok összeadása és szorzása, $k \times n$ -dimenziós.

Szorzás



$A \cdot B$ értelmezett, ha A $k \times n$ -es

B $n \times m$ -es

$(A \cdot B)$ -nek k sora és m oszlop van ($k \times m$)

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} \quad (\text{a megfelelő sor és oszlop skaláris szorzata})$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

és mégis ilyen

$$p.l.: A: 2 \times 4, B: 4 \times 5$$

$$A: 4 \times 5, B: 2 \times 4$$

$$A: 2 \times 2, B: 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A: 2 \times 3, B: 3 \times 2$$

$$A \cdot B: 2 \times 2$$

$$B \cdot A: 3 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

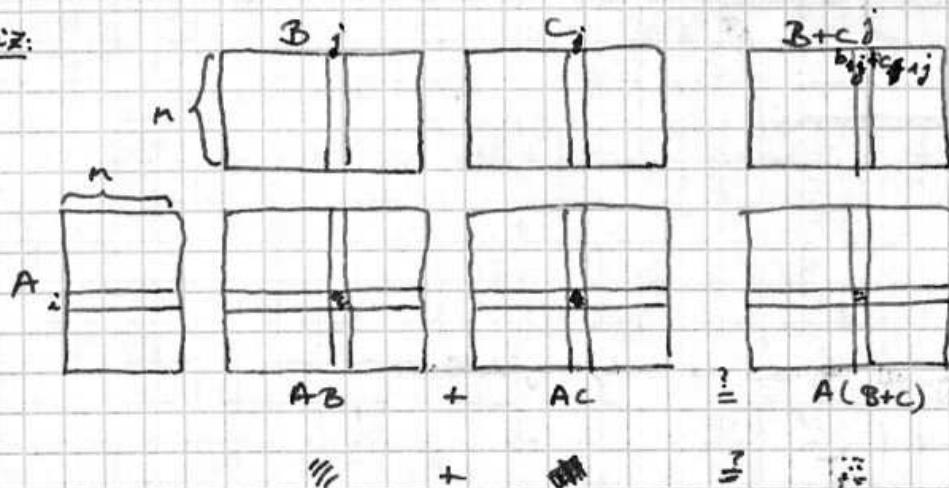
$$\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ilyen is lehet kompoz 0

$$A(B+C) = AB+AC$$

Biz:



$$\text{///} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

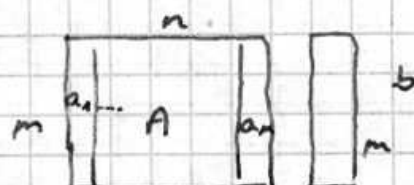
$$\bullet = a_{i1} \cdot c_{1j} + a_{i2} \cdot c_{2j} + \dots + a_{in} \cdot c_{nj} \quad (+)$$

$$\text{:::} = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj})$$

ugyanazt használjuk
tényleg asszociatív.

Miért ilyen a definíció?

$$A \cdot x = b$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 10$$

$$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 11$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12$$

lineáris egyenletrendszer megoldható.

Állítás: A egy $m \times n$ -es mtr, $b \in \mathbb{R}^m$ (oszlopvektor)

Ekvivalenciák: (1) $(A|b)$ lin. egy. rendszer ^(egyetlen) megoldható

(2) $Ax = b$ „mtr egyenlet” ^(egyetlen) megoldható

(3) A oszlopai, mint oszlopvektorokból b kifejezhető lineáris kombinációval ($b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$), azaz oszlopai egyikek képpen

Állítás: A $n \times n$ -es mtr, $b = 0$, megoldható $\Rightarrow$ egyenl. megoldható

Ekvivalenciák:

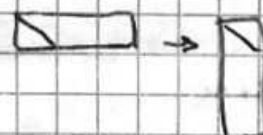
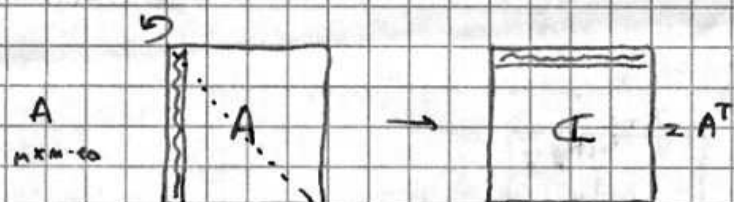
(1) $(A|0)$ ^{azaz} $\iff \det A \neq 0$
_{egyet. mo}

(2) $Ax = 0$ „mtr egyenlet” egyenl. mo.

(3) A oszlopai lin. fgt.-ek

(4) A sorai lin. fgt.-ek $\rightarrow$ Biz: $\det A = \det A^T$ miatt

Def: Transponált mátrix

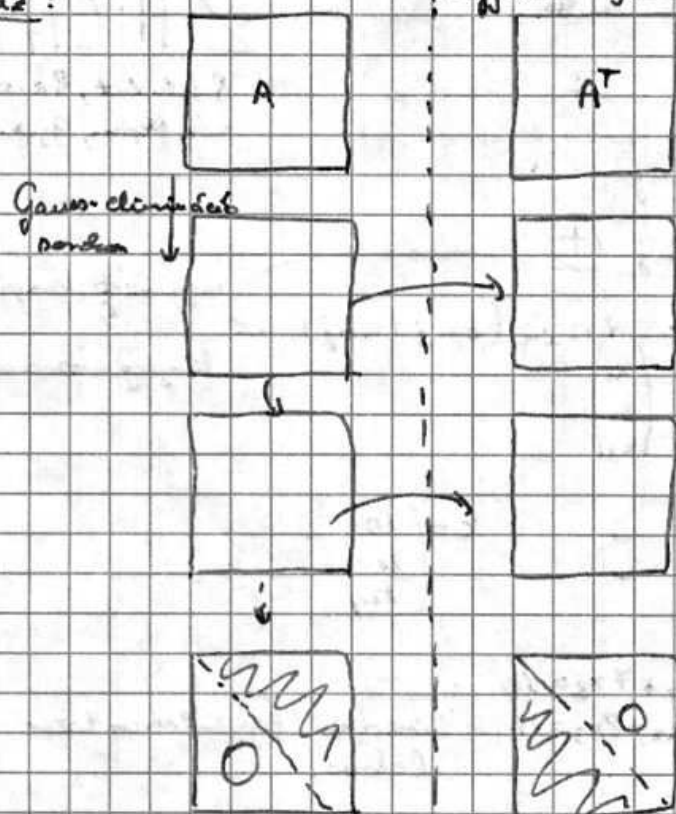


(Pl) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Tétel: $\det A = \det A^T$

Biz:

megmutatjuk az oszlop-megfordítást.



4 lépéssel megmutatjuk, hogy
2 det $\Rightarrow$ ha lentebb feljelle
léphet $\Rightarrow \det A = \det A^T$

$\det = \det$ (számban)

A $n \times m$ -es mátrix: $Ax = b$

$ax = b \quad | \cdot \frac{1}{a}$

$x = \frac{b}{a}$

(mátrix esetén $\neq$)

Inverz mátrix (egység mátrixszal szorozva)

Def: Egység mátrix (E), $n \times n$ -es $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

All: $A \cdot E = A$
 $E \cdot B = B$

$Ax = b \xrightarrow{\cdot X} XAx = Xb$

Def: A $n \times n$ -es mátrix, X az A inverze, ha $A \cdot X = X \cdot A = E$

Yele: $X = A^{-1}$

22

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -5 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 0 \\ 3y_1 + 5y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$x = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Le az egy A^{-1} ?

Nem tudjuk: $A \cdot x = E$ ✓

$$y \cdot A = E \quad ? \quad y = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 1 \\ 2u_1 + 5u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -5 \\ u_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ 3v_1 + 5v_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= 3 \\ v_2 &= -1 \end{aligned}$$

Teljes $\exists$ inverz mtr.

Nincs minden mtr.-nek inverze: pl

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nem lehet, nem } E.$$

$$y = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Tétel: ~~Ha~~ A $n \times n$ -es mtr.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Biz: " $\Rightarrow$ "

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\neq 0 \quad (\neq 0)$$

most kioldva nem kapjuk t-ét

" $\Leftarrow$ " $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$\left(A \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1: A \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2: A \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x_n: A \cdot x_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

mindenképp $\exists$ egyért. mtr.-a, mert $\det A \neq 0$

$$\exists! x_1, \exists! x_2, \dots, \exists! x_n$$

Y

$$\left(A \right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 \cdot A &= (100\dots 0) \\ y_2 \cdot A &= (010\dots 0) \\ \vdots \\ y_n \cdot A &= (000\dots 1) \end{aligned}$$

lin. egy. mtr.

$\exists y_1, \dots, y_n$ mtr.,
mert $\det A \neq 0$

$$\det A \neq 0$$

$$\begin{aligned} AX &= E \\ YA &= E \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} AX &= E \\ YA &= E \end{aligned}} \right\} X = Y \quad X = EX = \underbrace{(YA)}_E X = Y \underbrace{(AX)}_E = YE = Y$$

$$X = Y$$

g.e.d.

A^{-1} meghatározása

n db egyenletrendszer megoldása, de csak kisméretű:

$$\left(A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}\right), \left(A \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}\right), \dots, \left(A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}\right) \text{ a } G\text{-el-ei egyenlőval } I\text{-en végeredmény}$$

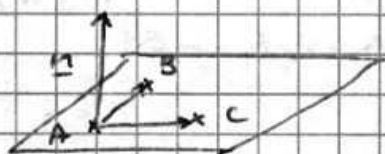
$$\left(A \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}\right) \sim \dots \sim \left(E \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}\right)$$

Csak a sorokat dolgozzuk!

Azért is jó, mert nem kell különösezt kiszámolni, hogy $\det A \neq 0$, hanem:

↑ eddig kell a ZH-ra.

Geom. szemlélet



Adott $A, B, C \rightarrow (ABC)$

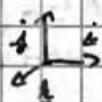
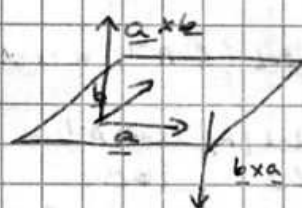
Kell $\vec{AB}, \vec{AC} \rightarrow$ ebből $n \perp \vec{AB}$ és $n \perp \vec{AC}$

Def: vektoris szorzás $\underline{a} \times \underline{b}$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\angle \underline{a}, \underline{b})$$

$$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a} \text{ és } \underline{b} \text{ is}$$

jellemzői $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$



$$\underline{a} (a_1, a_2, a_3)$$

$$\underline{b} (b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\lambda_1) i + (\lambda_2) j + (\lambda_3) k$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Mátrixok rangja



Def: A térsz. mátrix

- sorrangja: a fgt sorok max száma: $\rho(A)$

(az ρ , ha $\exists$ ρ fgt sor, de $\nexists \rho+1$ fgt. sor)

- oszloprangja: a fgt. oszlopok max. száma: $\sigma(A)$

A

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	4	7	10
2	2	5	8	11
3	3	6	9	12

$$\left. \begin{array}{l} \rho(A) \geq 2 \\ \rho(A) < 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(A) = 2$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 - \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 - \sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A) = 2 \quad (\sigma_3 \text{ és } \sigma_4 \text{ is felírható})$$

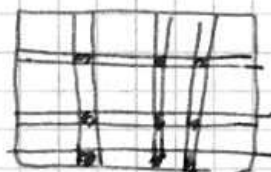
Determináns rang: $n \times m$ -es mátrixból k sort és k oszlopot kiválasztunk $\rightarrow$ méretű $k \times k$ -es mátrixt lehet kiválasztani

$\exists k \times k$ -s mátrix, am. $\det \neq 0$

$\downarrow$
max k : det-rangja az A mátrixnak: $\det(A)$

Áll: $\forall$ A mátrix-ra

$$\rho(A) = \sigma(A) = \det(A)$$



$k \times k$
 $\det(A)$

Biz: ① $\rho(A) = \sigma(A) \rightarrow \sigma(A) = \det(A) = \rho(A)$

Biz. $\forall k \quad \sigma(A) = \det(A)$

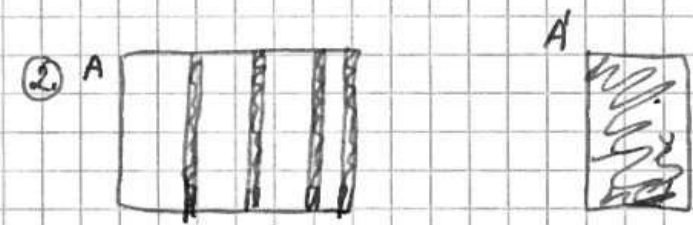
~~$\rho(A)$~~

(Def: $n \times m$ -es mátrix transzponáltja: főátlóra tükrözés $\rightarrow A^T$)

$$\rho(A) = \sigma(A^T) = \det(A^T) = \det(A) = \sigma(A)$$

Biz: $\sigma(A) = \sigma(A^T) = d(A^T) = d(A)$

- ② $\sigma(A)$ -t a Gauss-el. nem változtatja meg
- ③ $d(A)$ -t -1 $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$
- ④ RLA-ra az oszloprang és a det. rang egyenlő.



Biz: ha A oszlopai fgt-é volt $\Rightarrow$ G-el után is fgt-é
 ha nem $\Rightarrow$ G-el után sem fgt-é
 $\forall$ részelmátrix igaz $\Rightarrow$ az egésze igaz

$A' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - nek $\exists!$ no-a $\Leftrightarrow A'$ oszlopai fgt-é.

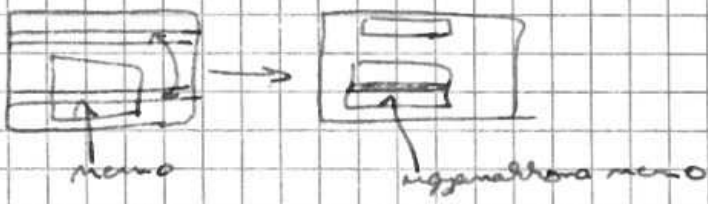
$\uparrow$
 ezt a G-el nem változtatja meg
 (RLA) $\Uparrow$
 A-ből kapott G-el utáni RLA-ra is igaz (ez a biz. első felj)

- ③ G-el lépései:
- ① $\lambda \cdot \underline{\hspace{2cm}}$
 - ② $\underline{\hspace{1cm}} \cdot \lambda + \lambda \cdot \underline{\hspace{1cm}}$
 - ③ sorcsere
 - ④ $\underline{\hspace{1cm}} - \underline{\hspace{1cm}}$ -t elhagyhatjuk

①

ha a sor nincs benne $\Rightarrow$ nem vált
 ha benne van $\Rightarrow$ λ -szorosra változtatja, de att nem, hogy 0 vagy nem.

③ nagy remény: ~~ami~~ nem volt benne mindkettő benne volt: det-é -det volt az egyik

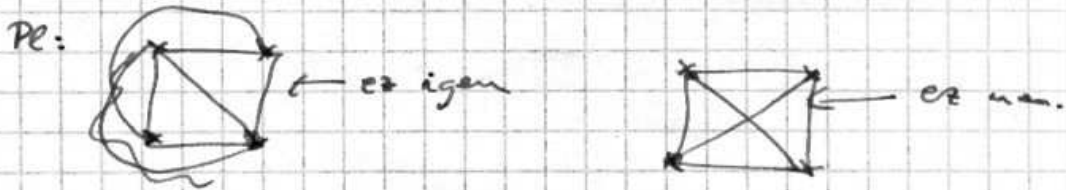


pl:

most $\rightarrow$ az a 3×3 -as ami nem 0 $\Rightarrow$ kétféle $\exists$

Síkba rajzolható gráfok

Síkba rajzolt gráf: síkban az élei nem keresztezik egymást



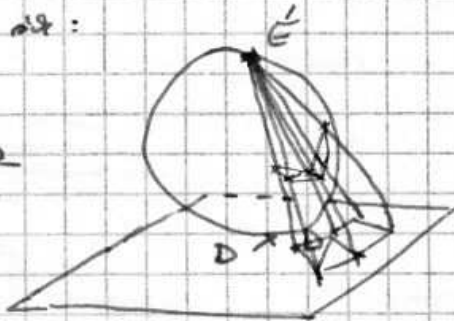
Síkba rajzolható, ha $\exists$ síkba rajzolása

Gömbre rajzolható gráfok: ^{gömbre} ~~élek~~ le rajzolva nem keresztezik az élei egymást

(1) A kettő ugyanaz:

(2) sík $\rightarrow$ gömb: nem nagy ügy

gömb $\rightarrow$ sík:



D-i pont: érinti a síkot.

Síkba rajzolt gráf

Csak az összekötőt az E-i ponttal.

még 1 metséspont az egyenessel a körrel. (most nem érinti)

Csak az és éleket felváltatva a gömbre

Ha a síkon az éleket nem volt mp-juk, akkor a gömbön sem

Fordítva is működik. (belső az észleli sokkal: mincs képe $\rightarrow$ elforgatva)

Euler-féle polidrom

(1) Tartomány (síkba rajzolt gráfok): maximális terület, amit Euler határozza meg.



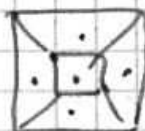
n : csúcsok száma

e : él száma

t : tartományok száma

(2) polidrom ^{síkba} rajzolható: gömbre is rajzolható

• Példa:



$t=6$
 $n=8$
 $e=12$



$t=4$
 $n=4$
 $e=6$

G: síkba rajzolt összefüggő gráf: $e+2 = n+t$

Ötlet: ha: n

$e=n-1$
 $t=1$

(3) o. n. g.: mincs ha nem hár, eldote egyit élet-öf. ^{mincs} $t=t-1$

$e=e-1$

addig völk, amíg fa nem lesz

- # V lin. tér-met sajátvektora is sajátértéke.

Def: M $n \times n$ -es mtr

$\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértéke M -nek, ha $\exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n : M \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$
 $\neq 0$

$0 \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ sajátvektor, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R} : M \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v}$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

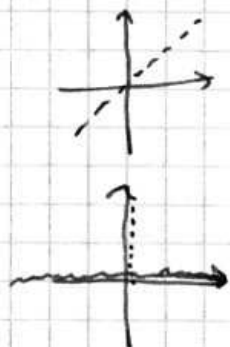
Pé:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 5y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = \lambda x \\ 5y = \lambda y \end{cases}$$

I. $y \neq 0 : \lambda = 5 \quad 2x+3y = 5x$
 $y = x$

sajátvektorok: $(x; x)$ sajátérték: $\lambda = 5$

II: $y = 0 \quad \lambda x = 2x \quad x \neq 0$
 $\lambda = 2 \quad (x; 0)$



Áll: Azonos λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok ~~altalán~~ (a 0 -val kiegészítve) altérnek alkotnak V -ben

Biz: $\underline{u}, \underline{v}$ s.m. λ s.é.-kél $A(\underline{u}) = \lambda \cdot \underline{u}$
 $A(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$

$$\boxed{\lambda(\underline{u} + \underline{v}) = A(\underline{u} + \underline{v}) = A(\underline{u}) + A(\underline{v}) = \lambda \underline{u} + \lambda \underline{v} = \lambda(\underline{u} + \underline{v})}$$

Áll:

$A : V \rightarrow V$ lin. lef., B bázis V -ben

$$\begin{aligned} \underline{u} : A \text{ s.m.-a} & \Leftrightarrow [\underline{u}]_B \text{ s.m.-a} \\ \lambda : A \text{ s.é.-e} & \Leftrightarrow \lambda \text{ s.é.-e} \end{aligned} \quad [A]_{B,B} \text{ - nek}$$

Biz: $A(\underline{u}) = \lambda \underline{u} \Leftrightarrow [A(\underline{u})]_B = [\lambda \underline{u}]_B \Leftrightarrow [A]_{B,B} \cdot [\underline{u}]_B = \lambda [\underline{u}]_B \Leftrightarrow$
 $[\underline{u}]_B \text{ s.m.-a } \lambda \text{ s.é.-e } [A]_{B,B} \text{-ben}$

Tétel: λ s.é.-e M $n \times n$ -es mtr-met $\Leftrightarrow \det(M - \lambda E) = 0$



$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(5-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \lambda = 5$$

Ⓢ
Nagyon egyszerű, más példák vannak

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \underline{N_1}$$

$$\begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \rightarrow \underline{N_2}$$

Biz: $\exists v \neq 0 (v \in \mathbb{R}^n) : M \cdot v = \lambda v \Leftrightarrow Mv - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Mv - \lambda E \cdot v = 0$

$$\Leftrightarrow Mv - (\lambda E) \cdot v = 0 \Leftrightarrow (M - \lambda E)v = 0 \Leftrightarrow M - \lambda E = \text{null matrix}$$

Ⓢ
vagy: $\det = 0$

$x^2 = 2$
 $x^2 = -1$

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a + bi) + c + di = a + c + (b + d)i$

$z = a + bi \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = a \\ \operatorname{Im} z = b \end{cases}$

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

$$\text{Re: } \frac{2+4i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2 \cdot 1 - 2i + 4i - 4i^2}{2} = 3+i$$

$a+bi$: algebrai alak

$$(a+bi)^{250} \quad (1-\sqrt{3}i)^{300}$$

Not aig bent

$$\sqrt{a+bi} = ?$$

$$z^2 = a + bi$$

$(c+d_i)^2 = a + b_i$ $\rightarrow$ 2 ismeretlenes ^{ismeretlen} egyenletrendszer

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{c-di}{c-di}$

conjugate values

$$(c+di)(c-di) = c^2 + d^2 \quad \text{a vektor hosszának négyzete}$$

$$x \cdot \bar{x} = (x)^2$$

$$|z| = \sqrt{c^2 + d^2} \quad (\text{for } z = c + di)$$

konjugiert

$$1) \quad x_{1,2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$2) \left(\frac{x}{y} \right)' = \frac{x' y - x y'}{y^2}$$

$$3) |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$h.) \quad \frac{M_2}{M_3} = \frac{1}{3}$$

Bsp: 1) $z = a + bi$
 $w = c + di$

$$\underline{z_{nw}} = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\overline{w} = a - bi$$

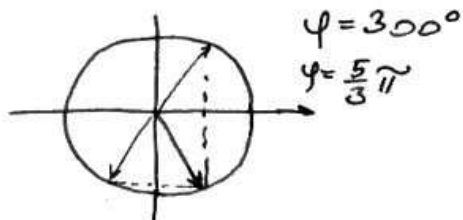
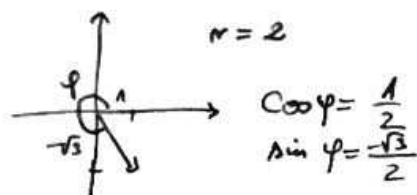
$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{zw}$$

$$3.) |zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

Trigonometrikus alak

$$z = 1 - \sqrt{3}i$$



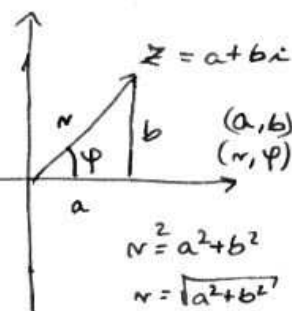
$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$(\tan \varphi = \frac{b}{a})$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$$

(2. szög in lehet)



$$0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

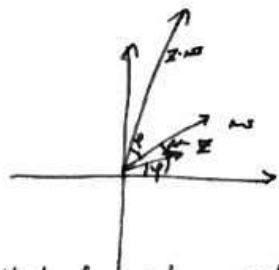
$$a + bi = r \cdot \cos \varphi + i r \cdot \sin \varphi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

trigonometrikus alak

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = \rho \cdot (\cos \mu + i \sin \mu)$$

$$z \cdot w = r \cdot \rho \cdot (\underbrace{(\cos \varphi \cos \mu - \sin \varphi \sin \mu)}_{\cos(\varphi + \mu)} + i \underbrace{(\sin \varphi \cos \mu + \cos \varphi \sin \mu)}_{\sin(\varphi + \mu)}) = r \cdot \rho \cdot (\cos(\varphi + \mu) + i \sin(\varphi + \mu))$$



$$\frac{z}{w} = \frac{r}{\rho} \cdot (\cos(\varphi - \mu) + i \sin(\varphi - \mu)) \quad / \cdot w$$

mindkét oldalra z los

Hatványozás: $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

Gyököt vonás: $\sqrt[n]{z} = ? \rightarrow x^n = z \quad x = ?$

$$x^n = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$|x| = \sqrt[n]{r}$$

$$\varphi = n\alpha = \varphi$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n}$$

$$x = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$$

← ez egy megoldás

de: $n\alpha = \varphi + 2\pi k$ is jó, α még mindig lehet $\in [0, 2\pi)$

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

több megoldás, egyiket sem különbözik ki

Pé: $\sqrt[3]{1 - \sqrt{3}i} = ?$

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos 300^\circ - i \sin 300^\circ) \rightarrow \sqrt[3]{2} (\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$$

$$\sqrt[3]{2} (\cos(100^\circ + 120^\circ) + i \sin(220^\circ))$$

$$\sqrt[3]{2} (\cos(340^\circ) + i \sin(340^\circ))$$

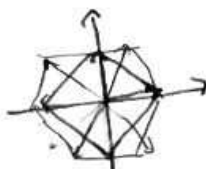
$$\varphi = 1020^\circ - 720^\circ = 300^\circ$$

Pé: $\sqrt[4]{1} = 1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$

$$\sqrt[4]{1} = 1 \cdot (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = i$$

$$1 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -1$$

$$1 \cdot (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -i$$



$$z^n = 1$$

z n-edik egységgyök

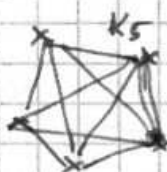
Az alapmegoldás szorozva a megfelelő egységgyökkel

Összefüggő : G öf., ha $\forall 2$ csúcs között $\exists$ út

Komponens : feszített részgráf, ami összefüggő, mely további pontot hozzáadva már nem összefüggő.

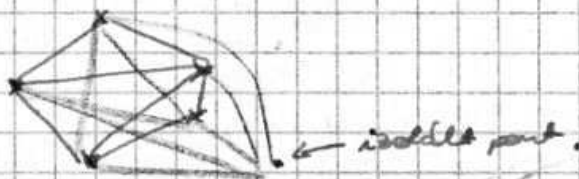
Teljes gráf : n csúcs, $\forall 2$ összekötve

K_n



Komplementum :

$$\bar{G} = K_n - G$$



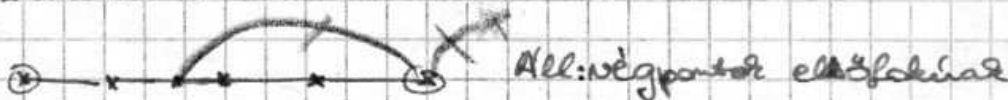
Fák : összefüggő komponens gráfok

Érdő : komponens gráf



(T) $n \geq 2$ csúcsú fában $\exists$ 2
elsőfokú pont.

(B) legrosszabb út :



- ha olyan pontba megy, ami nincs az úton és 1-gyel kapcsolódik benne
- úton belüli pontba nem lehet: kör lenne benne.



(T) n csúcsú fában $n-1$ él van.

(B) : teljes indukcióval

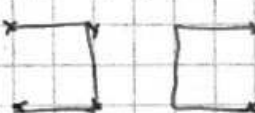
- $n=1$
- $n=2$



$n=1$ csúcsú fa $\rightarrow$ nem elsőfokú csúcs
est ellátott ($\Rightarrow n$ csúcsú fa marad)

amennyiben $\forall 2$ csúcs között van út (az ellátott nem zavart)

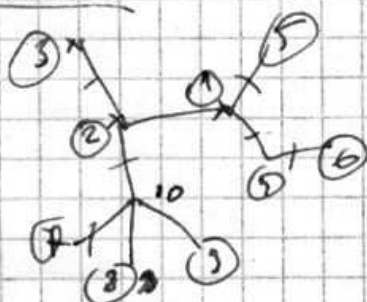
összefüggő, komponens, n csúcsú $\rightarrow$ fa $\Rightarrow$ indukció $\Rightarrow$

- n csúcsú nem irányított gráfok száma: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = K_n$ (teljes gráf éleinek száma)
- 
- $2^{\binom{n}{2}}$: $\forall$ csúcsot vagy, be nem, vagy nem

- n csúcsú fák száma (címélettel) $\leq 2^{\binom{n}{2}}$

Cayley-tétel: $a_n = n^{n-2}$

Prüfer-kód



- legkisebb sorozatú elemet kiválasztva, felírva a sorozatjához a sorozatját
- addig csinálom, míg $\emptyset$ -ig.

- mindig a legnagyobb sorozatú elemet választom

2 1 4 1 2 10 10 10 10 10
3 5 6 7 1 2 7 8 9

$n-2$ hosszú

$\Rightarrow \forall$ fát le tudunk kódolni egy $(n-1)$ hosszú sorozattal.

- $\forall$ sorozathoz van fa

- n szám kódszáma $\forall$ helyre n^{n-2}

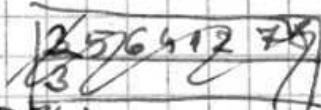
- kül. fához kül. Prüfer-kódot tartozik

- Értékelés: i csúcs fokszáma $d(i)$

$d(i)$ -t sorozatjából le kell törölni, hogy feltétel törléshoz.

i szám $d(i)-1$ szer szerepel a Prüfer-kódban

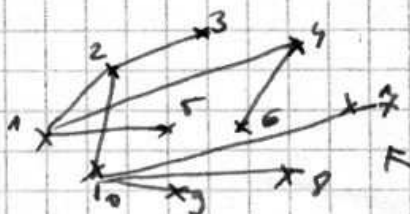
Dehídolás: ki kell találni, hogy melyik csúcsot töröltem



2 1 4 1 2 10 10 10 10 10
3 5 6 7 1 2 7 8 9

- melyik nem szerepel, a legkisebbet beírva

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 5 & 1 & 3 & 9 & 9 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$



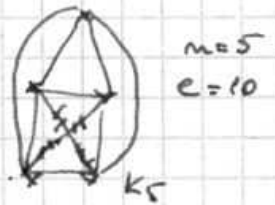
Tudni kell: kódolás, dekódolás, tényleg.

$\leftarrow$ visszaépítve a gráfot.

Síkba rajzolhatóság

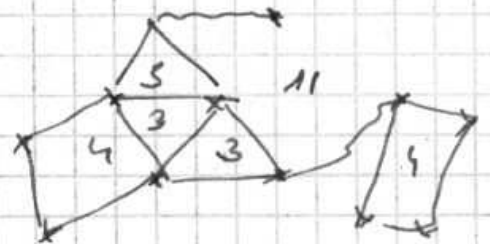
G. íf., akkorajelt $\rightarrow e+2 = m+t$

All: G egyszerű, síkba rajzolható gráf $\Rightarrow e \leq 3n-6$



Biz:

- összefüggőe teszem
- tartományokra bontom, hogy
hogy el lehet rajzolni (ci)



$$3t \leq c_1 + c_2 + \dots + c_t \leq 2e$$

$\forall t$ legkisebb $\forall$ élet min
 3 él határol $2 \times$ szomszédos

$$3t \leq 2e$$

$$t \leq \frac{2}{3}e$$

Euler-féle poliedert $\rightarrow e+2 = m+t \leq m + \frac{2}{3}e$

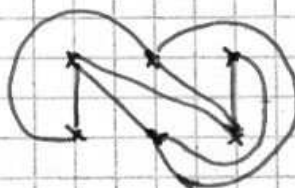
$$\frac{e}{3} \leq n-2$$

$$e \leq 3n-6$$

↓

K_5 nem síkba rajzolható, az ilyen tartalmazóban.

$K_{3,3}$ sem (páros gráf)



$n=6$
 $e=9$

$3n-6 = 12$ teljesül.

Az előző tétel alapján $4t \leq 2e$ (mert mincs benne 3 hosszú tartomány)

$$e+2 \leq m + \frac{e}{2}$$

$e \leq 2n-4$ akkor, ha mincs benne Δ (pl. páros gráf)

$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ $\hookrightarrow$ nem síkba rajzolható

Nem síkba rajzolható gráfok gyűjtése:

K_5 egyik élet felvétel.



Fordítás is működik: ha van egy gráfban másodfokú pont, és az a legkevesebb
létszám, az élet megkapom $\Rightarrow$ síkba rajzolható - 1 -

G és H topologikusan izomorf, ha véges sok felosztással, ill. annak ellentettjével izomorf gráfokba (egymásba) vethetők.

G síkba rajzolható $\Leftrightarrow$ a vele topologikusan izomorf is

Pl. a K_5 és a $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorfok nem síkba rajzolhatóak, és csak ezek.

Kuratowski tétele: G síkba rajzolható $\Leftrightarrow$ nem tartalmaz K_5 tel v. $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf részgráfot ($\Rightarrow$ "nem kell", $\Leftarrow$ "nem kell")

Dualitás:



kocka $\rightarrow$ oktaéder (lapok sz-jait összelőjűt)

$$\begin{aligned} t &= 6 \\ m &= 8 \\ e &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t' &= 8 \\ m' &= 6 \\ e' &= 12 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{E-p.t.} \\ \text{E-p.t.} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

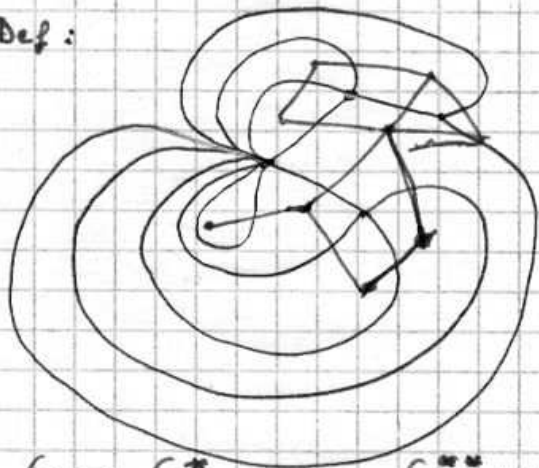


tetraéder $\rightarrow$ tetraéder

ikosaéder $\rightarrow$
dodekaéder

ikosaéder $\rightarrow$ kocka (egymásba vethető)

Def:



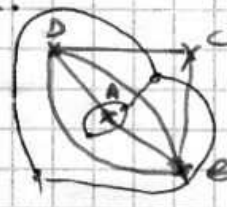
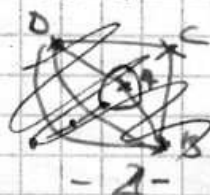
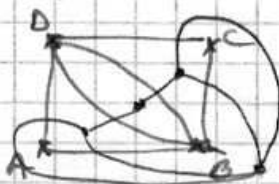
$$G \rightarrow G^* : G^{**} = G$$

$$\begin{aligned} G & & G' & \quad (\forall \text{ két elem között pontosan 1 csúcs}) \\ e &= & e' & \\ t & & t' = m & \quad (\forall \text{ csúcs tart. pontosan 1 két csúcsot egy körbe}) \\ m & & m' = t & \quad \leftarrow \text{E-p.t. -ből.} \end{aligned}$$

Probléma: nem a G -hez, hanem a síkba rajzoláshoz rendeltem a dualitást.

Az izomorf gráfoknál nem u.a. a dualisa.

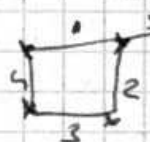
Pl.



A 2 csúcs nem izomorf.

Nem egyértelmű a G dualisa
 $G^{**} \neq G$ $G^{***} \neq G$

① gyenge izomorfia: G és H gyengén izomorf, ha $\exists f: E(G) \rightarrow E(H)$
kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.



bijektív $(f(a) \neq f(b), \text{ ha } a \neq b \text{ és } \forall x \in E(H) : \exists y \in E(G) : f(y) = x)$

így, hogy kör képe kör, nem kör képe nem kör.



(pl $\forall 2$ ha gyengén izomorf, ha u.annyi élle van)

Whitney tétele: G és H gyengén izomorf, G síkba rajzolható. $\Rightarrow$

- ① H síkba rajzolható
- ② G^* és H^* is gyengén izomorf
- ③ G^{**} gyengén izomorf G -vel.

Dualitás: gyengén izomorf gráfok közötti megfeleltetés

Osztmosság

$\{1, 2, 3\}$, $\{\text{lutya, macska, kő}\}$

Def: A és B halmazok azonos osztmosságúak, ha $\exists$ köztük bijekció.

(ha $\forall x \neq y \in A : f(x) \neq f(y)$,
 $\forall z \in B : \exists x \in A : f(x) = z$)



pl: $N: 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

$2N: 0, 2, 4, 6, 8, \dots$

~~$f(x)$~~ $f(x) = 2x$

$f: N \rightarrow 2N$ bijekció

pl: $N: 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

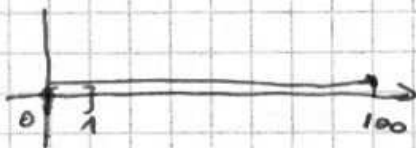
$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
 $Z: 0, 1, -1, 2, -2, \dots$

Somewhat rendezhető: N -vel azonos osztmosságúak

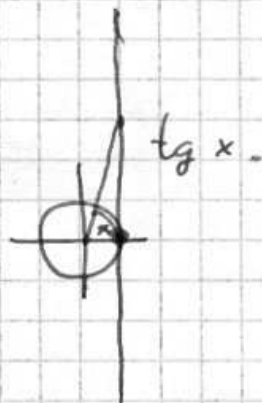
megszámlálhatók végtelen.

végek + megszámlálhatók ∞ : megszámlálhatók

$$f(x) = 100x$$



$$|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$$

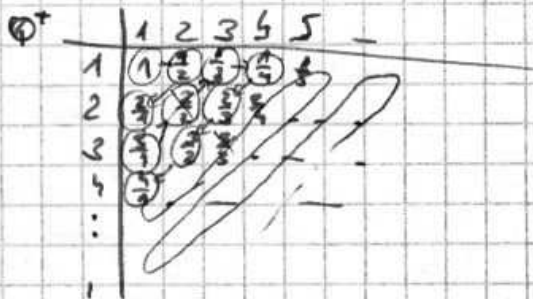


$$f(x) = \frac{1}{\pi} x$$

$$\left| \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right| = |\mathbb{R}|$$

$$|[0, 1]| = |\mathbb{R}|$$

All: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$



$$\mathbb{N} \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \dots$$

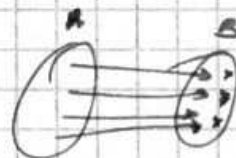
$$\mathbb{Q} \quad \frac{2}{1} \quad -\frac{2}{1} \quad \dots$$

ha valamilyen más volt,
kihagyom.

All: $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ meg lehet tanulni.
↑ megadható a végtelen $\mathbb{R}_0$ alcs.
kontinuum mérték $\mathfrak{A}_0$

Def $|A| \leq |B|$, ha $\exists f: A \rightarrow B$ injektív
(kényszerűen
elemek)

$$|A| < |B|, \text{ ha } |A| \leq |B| \text{ és } |A| \neq |B|$$



pl: $|\text{párok}| \leq |\mathbb{N}|$, de $|\text{párok}| = |\mathbb{N}|$

Kéne: $\left. \begin{array}{l} |A| \leq |B| \\ |B| \leq |A| \end{array} \right\} \Rightarrow |A| = |B|$ nem triviális, de igaz.
Cantor - Bernstein tétel.

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| < \mathcal{P}(\mathbb{R}) < \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) < \dots$$

$$x \mapsto x \text{ inj. } \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Van-e nagyobb?

Hatványozás: az összes részhatványok halmaza.

$$H = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(H) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Tétel: $\mathcal{P}(H)$ hatványozása is $|\mathcal{P}(H)| > |H|$ jó jegyet vár.

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| \text{ jó jegyet vár.}$$

$\exists - e \ H : |N| < |H| < |\mathbb{R}|$

Kontinuális hipotézis: ~~ett~~ azt mondja, hogy minél
nagyabb $\aleph_\alpha$ kardinalitás, hogy van, van azt, hogy nincs.
↓
fgt. az az. rendszám.

Alt. kont. hip.: van-e összefüggés $|H|$ és $|P(H)|$ között.