Valószínűségszámítás 4. vizsga megoldókulcs

1. A $[0,1]$ intervallumon találomra kiválasztunk három számot. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz $\frac{1}{4}$-nél kisebb közöttük?

   Megoldás

   A 3 szám legyen X_1, X_2, X_3.

$$\mathbf{P}\left(\text{lesz} \leq \frac{1}{4} \text{ az } X_i\text{-k között}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X_1 > \frac{1}{4}, X_2 > \frac{1}{4}, X_3 > \frac{1}{4},\right) = \text{ (10 pont)}$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(X_1 > \frac{1}{4}\right) \cdot \mathbf{P}\left(X_2 > \frac{1}{4}\right) \cdot \mathbf{P}\left(X_3 > \frac{1}{4}\right) = \text{(5 pont)}$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(X_1 > \frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{37}{64} \approx 0.57812 \text{ (5 pont)}$$

2. Három egyforma doboz közül kettőben 2 piros, egyben egy-egy piros és fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból egy golyót. Ha ez piros, mennyi a valószínűsége, hogy a dobozban maradó golyó színe fehér?

   Megoldás
   a.) Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott dobozban 2 piros golyó van.
   $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{3}$. (5 pont)
   Legyen B az az esemény, hogy az első húzás piros.
   $\mathbf{P}(B \mid A) = 1; \mathbf{P}(B \mid \bar{A}) = 0,5$.(5 pont)
   A Bayes-tételből (5 pont):
   $\mathbf{P}(\bar{A} \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 0,2.$ (5 pont)

   b.) Mivel minden dobozban ugyanannyi golyó van, a hat golyó közül egyenletes eloszlás szerint választunk. A feltétel szerint piros golyót húzunk, azaz az öt piros golyó közül választunk egyenletesen. Mivel ezek közül pontosan egy olyan van, aminek a párja fehér, a kérdéses valószínűség 1/5.

3. Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Határozza meg a $Z = \max\{X, Y\}$ sűrűségfüggvényét!

   Megoldás

$$X, Y \in N(0,1)\text{, függetlenek (5 pont)}$$

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z < t) = \mathbf{P}(X < t, Y < t) = \mathbf{P}(X < t) \cdot \mathbf{P}(Y < t) = \Phi^2(t) \text{ (10 pont)}$$

$$f_Z(t) = 2\Phi(t)\varphi(t) \text{ (5 pont)}$$

   (Szokás szerint $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ és $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt$.)

4. Legyen $X \in N(-3,2)$, $Y = 3X+8$, $Z = 5-2X$. Számolja ki az $\mathrm{R}(Y,Z)$ korrelációs együtthatót!

Megoldás a.)

$$\mathrm{cov}(Y,Z) = \mathrm{cov}(3X+8, 5-2X) = 3\cdot\mathrm{cov}(X, 5-2X) = -6\cdot\mathrm{cov}(X,X) = -6\cdot\sigma^2 X \text{ (5 pont)}$$

$$\sigma^2 Y = \sigma^2(3X+8) = 9\cdot\sigma^2(X) \quad \Rightarrow \quad \sigma Y = 3\cdot\sigma X \text{ (5 pont)}$$

$$\sigma^2 Z = \sigma^2(5-2X) = 4\cdot\sigma^2(X) \quad \Rightarrow \quad \sigma Z = 2\cdot\sigma X \text{ (5 pont)}$$

$$\mathrm{R}(Y,Z) = \frac{\mathrm{cov}(Y,Z)}{\sigma Y\cdot\sigma Z} = \frac{-6\cdot\sigma^2 X}{3\cdot\sigma X\cdot 2\cdot\sigma X} = -1 \text{ (5 pont)}$$

b.) $Y = 3\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}Z\right) + 8 = -\frac{3}{2}Z + \frac{31}{2}$,
azaz Y és Z között lineáris a kapcsolat, ahol a meredekség negatív. (10 pont)
Ebből közvetlenül következik, hogy $\mathrm{R}(Y,Z) = -1$. (10 pont)

5. Legyen $X_1, X_2, ..., X_n$ a $\vartheta > 0$ paraméterű Poisson-eloszlásból származó minta! Számolja ki a ϑ paraméter maximum-likelihood becslését!

Megoldás

A likelihood függvény (5 pont):

$$L(\mathbf{x},\vartheta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\vartheta^{x_i}}{x_i!}e^{-\vartheta}\right) = \frac{\vartheta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\vartheta}$$

A log-likelihood függvény (5 pont):

$$l(\mathbf{x},\vartheta) = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln\vartheta - n\vartheta - \ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i!\right)$$

Szélsőértékek keresése (5 pont):

$$\frac{\partial l(\mathbf{x},\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}x_i - n = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

Mivel

$$\frac{\partial^2 l(\mathbf{x},\vartheta)}{\partial^2\vartheta} = -\frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i < 0,$$

ezért a kapott $\vartheta = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ szélsőérték maximumhely, tehát ez lesz a ϑ paraméter maximum likelihood becslése. (5 pont)