Matematika A2a
2012/13/II. U0, W0 kurzus
3. vizsga dolgozat
2013. 06. 13. 10.15–11.45

Név: ______________________

Neptun kód: ______________

Gyakorlat kurzus:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$:

1. Határozza meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2z + 2xyz + 2$ függvény $v \in \mathbb{R}^3$ iránymenti deriváltját az $(1, 2, -1)$ pontban, ahol v párhuzamos és egyállású a $(2, 1, 2)$ vektorral. *(10 p.)*

A $v = \dfrac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = \dfrac{1}{3}(2,1,2) \in \mathbb{R}^3$ vektor egyállású a $(2,1,2)$ vektorral, és $\|v\| = 1$. Mivel az f függvény

$$\partial_x f = 2xz + 2yz \qquad \partial_y f = 2xz \qquad \partial_z f = x^2 + 2xy$$

parciális deriváltjai mindenhol folytonosak, ezért a függvény mindenhol differenciálható, vagyis képezhető a

$$(\operatorname{grad} f)(a) = (-6, -2, 5)$$

vektor. Az iránymenti derivált ekkor kiszámolható az alábbi módon.

$$(\mathrm{D}_v f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v\rangle = \langle (-6,-2,5), \frac{1}{3}(2,1,2)\rangle = \frac{-12-2+10}{3} = -\frac{4}{3}$$

2. Tekinstük az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)4^n} x^n$ hatványsort. *(5+5 p.)*

   a. Számolja ki a hatványsor konvergenciasugarát.

   b. Határozza meg, hogy mely valós x értékek esetén konvergens a hatványsor.

a. Legyen $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+2)4^n}$. Ekkor a

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\sqrt[n]{n+2}} = \frac{1}{4}$$

határérték miatt a konvergenciasugát $R = \dfrac{1}{\alpha} = 4$.

b. A $-4 < x < 4$ esetben biztosan konvergens, és az $x < -4$ vagy $x > 4$ esetekben biztosan divergens a Cauchy–Hadamard-tétel miatt.

Ha $x = 4$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$ sort kapjuk, mely Leibniz-sor, ezért konvergens.

Ha $x = -4$, akkor a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ sort kapjuk, mely divergens.

Vagyis a konvergencia tartomány: $]-4, 4]$.

3. Adja meg az *(10 p.)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix legkisebb sajátértékéhez tartozó egyik sajátvektort.
Kifejtve a $\det(A - \lambda E)$ determinánst a

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 11\lambda = 0$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk, melynek gyökei: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{5}$, $\lambda_3 = 4 + \sqrt{5}$.
Legyen $v_1 = (x, y, z)$ a λ_1 sajátvektora. A

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sajátérték egyenletből a

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

lineárisan független egyenletek adódnak, ennek egy megoldása $v_1 = (2, 4, -5)$.

4. Tekintsük azt a 2π szerint periódikus függvényt, melyre minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $f(x) = |x| - \pi$ teljesül. *(10 p.)*

   a. Határozza meg az f függvény Fourier-együtthatóit.

   b. Írja fel az f függvény Fourier-sorát.

a. Felhasználva f párosságát és parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{2\pi} \cdot (-\pi^2) = -\frac{\pi}{2} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}\, x = 0 \end{aligned}$$

adódik.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cdot \cos(nx)$$

5. Számolja ki az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ függvény integrálját *(10 p.)*
az

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 9,\ 0 \le x,y,z\right\}$$

halmazon.

Gömbi koordinátákban felírva

$$\iiint_U f = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r = \frac{\pi}{2} \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin\vartheta \,\mathrm{d}\,\vartheta \,\mathrm{d}\,r =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^3 r \,\mathrm{d}\,r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9\pi}{4}.$$

6. Definíciók és tételek. *(10 p.)*
   a. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^3$ és legyen $v \in \mathbb{R}^3$ olyan, melyre $\|v\| = 1$ teljesül. Hogyan definiáltuk az f függvény a pontbeli v iránymenti deriváltját?
   b. Definíció szerint mit jelent, hogy az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés rangja k?
   c. Mit mond ki a sorok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium?

a. Az a pont belső pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak, valamint

$$(\mathrm{D}_v f)(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

b. $\dim \operatorname{Ran} A = k$.

c. Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra

– $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a $\sum_n a_n$ sor abszolút konvergens;

– $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor a $\sum_n a_n$ sor divergens.