1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra pótZH. 2024-11-27 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

*A dolgozat feladatainak **csak az eredményeit** kell erre az oldalra a keretbe írni, a **részletszámításokat** a további oldalakra, egyéb papírra ne dolgozzunk. **Eredmény melléksszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához **semmilyen segédeszköz** nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma minden kérdésre 1-től 4-ig bármennyi lehet. Ha egy kérdésre minden válasz hibátlan, az 1 pont, 1 hiba esetén 0.5 pont, több hiba esetén 0 pont.

a)
- $\mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_8[x]$ egységelemes, kommutatív gyűrű. [X]
- $\mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_8[x]$ nullosztómentes gyűrű. [ ]
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_8$ gyűrű. [ ]
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{F}_8$ test. [X]

b)
- Az egyetlen vektorból álló $\{\mathbf{v}\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. [X]
- Minden vektortérnek van bázisa, csak a zérustérnek nincs, mert a zérusvektor lineárisan összefüggő. [ ]
- Az üres vektorhalmaz lineáris kombinációja a zérusvektor. [X]
- A $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \dots\}$ végtelen vektorhalmaz lineáris függetlenségéhez elég, hogy minden véges részhalmaza lineárisan független legyen. [X]

c) Legyen $\mathbf{A}$ valós, $\mathbf{C}$ komplex négyzetes mátrix.
- Ha $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, akkor szimmetrikus! [X]
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor unitéren hasonló egy tiszta imaginárius számokból álló diagonális mátrixhoz. [X]
- Ha $\mathbf{C}$ önadjungált, akkor unitéren hasonló egy valós diagonális mátrixhoz. [X]
- Ha $\mathbf{C}$ unitér, akkor nem biztos, hogy unitéren diagonalizálható. [ ]

d) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ nem hasonlóak, de kongruensek, [X]
- van olyan L lineáris leképezés, és két olyan bázis, hogy L mátrixa az egyikben $\mathbf{A}$, a másikban $\mathbf{B}$, [ ]
- van olyan q kvadratikus alak, és két olyan bázis, hogy q mátrixa az egyikben $\mathbf{A}$, a másikban $\mathbf{B}$, [X]
- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, és hasonlóak. [ ]

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer összes optimális megoldását a minimális abszolút értékű megoldással!

$$\begin{cases} x - \ \ y = 2 \\ 3x - 3y = -4 \end{cases}$$

Az összes optimális megoldás és az összes optimális megoldás a minimális abszolút értékű megoldással:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

3. *(4 pont)* Melyik $p(x) \in \operatorname{span}(3x, 5x^3)$ polinom van legközelebb az $f(x) = 16$ konstans polinomhoz a polinomoknak abban az euklideszi terében, ahol a skaláris szorzás

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x?$$

Keressük az $f(x) = 16$ polinom $\operatorname{span}(3x, 5x^3)$ térre eső $\perp$ vetületét. A Gram-mátrixszal felírt egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{cc|c} \langle 3x, 3x \rangle & \langle 3x, 5x^3 \rangle & \langle 3x, 16 \rangle \\ \langle 5x^3, 3x \rangle & \langle 5x^3, 5x^3 \rangle & \langle 5x^3, 16 \rangle \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 24 \\ 3 & \frac{25}{7} & 20 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett polinom $15 \cdot 3x - 7 \cdot 5x^3 = 45x - 35x^3$.

4. *(4 pont)* Határozzuk meg a 2 rangú $\mathbf{B}$ mátrix $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ oszlopterére való merőleges vetítés mátrixát és az $(1, 2, 6)$ vektor merőleges vetületét e térre, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{B})$ és így a merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5. *(4 pont)* Adjuk meg a $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$ kvadratikus alakhoz azt az ortonormált bázist, melyben felírva csak négyzetes tagokat tartalmaz, és adjuk meg q kanonikus alakját!

A q mátrixszorzatos alakja és karakterisztikus polinomja

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \chi(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

és ahol $\mathbf{A}$ sajátpárjai $(0, (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$, $(1, (0, 1, 0))$, $(2, (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$, melybeli sajátvektorok a kért ortonormált bázist adják. A kanonikus alak $q(\xi, \eta, \zeta) = \eta^2 + 2\zeta^2$.

1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra pótZH. 2024-11-27 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

A dolgozat feladatainak ***csak az eredményeit*** *kell erre az oldalra a keretbe írni, a* ***részletszámításokat*** *a további oldalakra, egyéb papírra ne dolgozzunk.* ***Eredmény mellékszámítás nélkül*** *nem kap pontot. A feladatok megoldásához* ***semmilyen segédeszköz*** *nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma minden kérdésre 1-től 4-ig bármennyi lehet. Ha egy kérdésre minden válasz hibátlan, az 1 pont, 1 hiba esetén 0.5 pont, több hiba esetén 0 pont.

a)
- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_8$ gyűrű. [ ]
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{F}_8$ test. [X]
- $\mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_8[x]$ egységelemes, kommutatív gyűrű. [X]
- $\mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_8[x]$ nullosztómentes gyűrű. [ ]

b)
- Minden vektortérnek van bázisa, csak a zérustérnek nincs, mert a zérusvektor lineárisan összefüggő. [ ]
- Az egyetlen vektorból álló $\{\mathbf{v}\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. [X]
- Az üres vektorhalmaz lineáris kombinációja a zérusvektor. [X]
- A $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \ldots\}$ végtelen vektorhalmaz lineáris függetlenségéhez elég, hogy minden véges részhalmaza lineárisan független legyen. [X]

c) Legyen $\mathbf{A}$ valós, $\mathbf{C}$ komplex négyzetes mátrix.
- Ha $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, akkor szimmetrikus! [X]
- Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor unitéren hasonló egy tiszta imaginárius számokból álló diagonális mátrixhoz. [X]
- Ha $\mathbf{C}$ önadjungált, akkor unitéren hasonló egy valós diagonális mátrixhoz. [X]
- Ha $\mathbf{C}$ unitér, akkor nem biztos, hogy unitéren diagonalizálható. [ ]

d) Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ nem hasonlóak, de kongruensek, [X]
- $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ kongruensek, és hasonlóak, [ ]
- van olyan L lineáris leképezés, és két olyan bázis, hogy L mátrixa az egyikben $\mathbf{A}$, a másikban $\mathbf{B}$, [ ]
- van olyan q kvadratikus alak, és két olyan bázis, hogy q mátrixa az egyikben $\mathbf{A}$, a másikban $\mathbf{B}$. [X]

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer összes optimális megoldását a minimális abszolút értékű megoldással!

$$\begin{cases} x - \ y = -1 \\ 3x - 3y = 2 \end{cases}$$

Az összes optimális megoldás és az összes optimális megoldás a minimális abszolút értékű megoldással:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg a 2 rangú $\mathbf{B}$ mátrix $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ oszlopterére való merőleges vetítés mátrixát és az $(1, 3, 7)$ vektor merőleges vetületét e térre, ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{B})$ és így a merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{P}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

4. *(4 pont)* Melyik $p(x) \in \operatorname{span}(3x, 5x^3)$ polinom van legközelebb az $f(x) = 16$ konstans polinomhoz a polinomoknak abban az euklideszi terében, ahol a skaláris szorzás

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x?$$

Keressük az $f(x) = 16$ polinom $\operatorname{span}(3x, 5x^3)$ térre eső $\perp$ vetületét. A Gram-mátrixszal felírt egyenletrendszer

$$\left[\begin{array}{cc|c} \langle 3x, 3x\rangle & \langle 3x, 5x^3\rangle & \langle 3x, 16\rangle \\ \langle 5x^3, 3x\rangle & \langle 5x^3, 5x^3\rangle & \langle 5x^3, 16\rangle \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 24 \\ 3 & \frac{25}{7} & 20 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -7 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett polinom $15 \cdot 3x - 7 \cdot 5x^3 = 45x - 35x^3$.

5. *(4 pont)* Adjuk meg a $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz$ kvadratikus alakhoz azt az ortonormált bázist, melyben felírva csak négyzetes tagokat tartalmaz, és adjuk meg q kanonikus alakját!

A q mátrixszorzatos alakja és karakterisztikus polinomja

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \chi(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

és ahol $\mathbf{A}$ sajátpárjai $(0, (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$, $(1, (0, 1, 0))$, $(2, (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}))$, melybeli sajátvektorok a kért ortonormált bázist adják. A kanonikus alak $q(\xi, \eta, \zeta) = \eta^2 + 2\zeta^2$.