Logikai szita:

$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$
$\mathbf{P}(A+B+C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC)$

Boole-egyenlőtlenségek:

$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) \le \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3)$
$\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) \ge 1 - \mathbf{P}(\bar{A}_1) - \mathbf{P}(\bar{A}_2) - \mathbf{P}(\bar{A}_3)$

Feltételes valószínűség, szorzási szabály:

$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$, „$A$ feltéve B", mekkora eséllyel következik be A, ha B-t tudjuk, hogy bekövetkezett.
$\mathbf{P}(A_1A_2A_3A_4) = \mathbf{P}(A_4|A_1A_2A_3) \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1)$

Teljes valószínűség tétele:

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ teljes eseményrendszer (pontosan egy következik be közülük), B tetszőleges esemény:
$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B|A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(B|A_3) \cdot \mathbf{P}(A_3) + \dots + \mathbf{P}(B|A_n) \cdot \mathbf{P}(A_n)$

Bayes-tétel:

Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ teljes eseményrendszer, B tetszőleges esemény:

$$\mathbf{P}(A_1|B) = \frac{\mathbf{P}(A_1B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B|A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i)}$$

Eloszlásfüggvény:

X egy valószínűségi változó: az $F_X(t) = \mathbf{P}(X < t)$ függvényt az X v.v. eloszlásfüggvényének hívjuk.
Eloszlásfüggvény tulajdonságai:
$\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} F_X(t) = 1$, $\lim\limits_{t\to x-0} F_X(t) = F_X(x)$ (=„balról folytonos"), F_X monoton nő.

Sűrűségfüggvény:

X egy *FOLYTONOS* valószínűségi változó, akkor a $f_x(t) = F'_X(t)$ az X v.v. sűrűségfüggvénye.
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$, $f_X(t) \ge 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1$.
Intervallumba esés: $\mathbf{P}(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.

Binomiális eloszlás:

$X \in B(n,p)$, $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.
Használjuk, ha n független eseményből X következik be, mindegyik p valószínűséggel.

Poisson eloszlás:

$X \in Po(\lambda)$, $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, Ha n nagy és p kicsi, $\lambda = np$-re: $B(n,p) \approx Po(\lambda)$.
Használjuk, csak ha *NAGYON* muszáj, binomiális eloszlás közelítésére.

Geometriai eloszlás:

$X \in G(p)$, $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, Örökifjú!
Használjuk, ha egy kísérletet *ADDIG* ismételgetünk, *AMÍG* egy adott p valószínűségű esemény be nem következik (először). X az, ahányadikra elsőre bekövetkezett.

Exponenciális eloszlás:

$X \in E(\lambda)$, Örökifjú!
Sűrűségfüggvény: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, Eloszlásfüggvény: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
Használjuk, ha örökifjú dolgok élettartamáról van szó. X az az *IDŐ*, amikor elromlik (először).

Normál eloszlás:

$X \in N(m,\sigma)$, Sűrűségfüggvény: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, Eloszlásfüggvény: $F_X(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$.
$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, (Φ-t táblázatból kell kinézni...)
Használjuk például a centrális határeloszlás-tételben közelítésre.

Várható érték:

Diszkrét esetben: $\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$, folytonos esetben: $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$.

$\mathbf{E}(aX + b) = a \cdot \mathbf{E}(X) + b$, tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re (linearitás).

Ha $Y = t(X)$, akkor $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(t(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \cdot f_X(x)dx$, speciális esetben: $\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx$

$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$, tetszőleges X és Y-ra. $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$, ha X és Y függetlenek.

Markov: Ha $X \geq 0$ (csak nemneg. értéket vesz fel) és létezik $\mathbf{E}X$, akkor $\mathbf{P}(X \geq \lambda \cdot \mathbf{E}X) \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.

Szórásnégyzet, szórás:

$\boldsymbol{\sigma}^2(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)^2) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}((X - c)^2) - (\mathbf{E}(X - c))^2$, tetszőleges $c \in \mathbb{R}$-re.

$\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2(X)}$ (a szórás a szórásnégyzetnek a gyöke). Mivel $\boldsymbol{\sigma}^2(X) \geq 0$, ezért ez értelmes, és $\boldsymbol{\sigma}(X) \geq 0$.

$\boldsymbol{\sigma}(aX + b) = |a| \cdot \boldsymbol{\sigma}(X)$, és $\boldsymbol{\sigma}^2(aX + b) = a^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2(X)$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re (a szórás a lineáris a-ban!).

$\boldsymbol{\sigma}^2(X + Y) = \boldsymbol{\sigma}^2(X) + \boldsymbol{\sigma}^2(Y)$, ha X és Y függetlenek (a szórásnégyzet összegződik, nem a szórás!).

Csebisev: Ha létezik $\boldsymbol{\sigma}X$, akkor $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \lambda \cdot \boldsymbol{\sigma}X) \leq \frac{1}{\lambda^2}$, $\forall \lambda > 0$.

Nevezetes eloszlások várható értéke, szórásnégyzete stb.:

Diszkrét eloszlások ($q = 1 - p$ rövidítéssel) és folytonos eloszlások ($a < b$ és $\lambda > 0$):

Név:	Indikátor	Binomiális	Poisson	Geometriai
Jel:	$X \in I_A(p)$	$X \in B(n, p)$	$X \in Po(\lambda)$	$X \in G(p)$
Képlet:	$\mathbf{P}(X = 0) = q$ $\mathbf{P}(X = 1) = p$	$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$	$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$	$\mathbf{P}(X = k) = p \cdot q^{k-1}$ $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbf{E}(X)$	p	np	λ	$\frac{1}{p}$
$\boldsymbol{\sigma}^2(X)$	pq	npq	λ	$\frac{q}{p^2}$
$\boldsymbol{\sigma}(X)$	$\sqrt{pq}$	$\sqrt{npq}$	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$

Név:	Egyenletes	Exponenciális	Standard normál	Normális
Jel:	$X \in U(a, b)$	$X \in E(\lambda)$	$X \in N(0, 1)$	$X \in N(m, \sigma)$
$f_X(x)$:	$\frac{1}{b-a}$, ha $x \in (a, b)$	$\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-m}{\sigma})$
$F_X(x)$:	$\frac{x-a}{b-a}$, ha $x \in (a, b)$	$1 - e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$	$\Phi(x)$	$\Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
$\mathbf{E}(X)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	0	m
$\boldsymbol{\sigma}^2(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	σ^2
$\boldsymbol{\sigma}(X)$	$\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\lambda}$	1	σ

Együttes eloszlások:

Együttes eloszlásfüggvény: $F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X < x \text{ és } Y < y)$.

Folytonos esetben sűrűségfüggvény: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} F_{X,Y}(x, y)$. $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)dvdu$.

Peremeloszlás (sűrűségfüggvény): $f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$ (a többi változó szerint kell integrálni!).

Függetlenség: $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$. Folytonos esetben elég: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Összeg eloszlása ($Z = X + Y$):

Diszkrét: $\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i \in R_X} \mathbf{P}(X = i, Y = k - i)$, folytonos: $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, t - u)du$.

Konvolúció (X és Y független, $Z = X + Y$):

Diszkrét: $\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{i \in R_X} \mathbf{P}(X = i) \cdot \mathbf{P}(Y = k - i)$, folytonos: $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t - u)du$.

Speciális esetek (X és Y nevezetes eloszlásúak és függetlenek, $Z = X + Y$):

Ha $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu)$, akkor $Z \in Po(\lambda + \mu)$.

Ha $X \in B(n_1, p)$, $Y \in B(n_2, p)$, akkor $Z \in B(n_1 + n_2, p)$. (Azonos p-k esetén!)

Ha $X \in N(m_1, \sigma_1)$, $Y \in N(m_2, \sigma_2)$, akkor $Z \in N\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$. (Hiszen $\boldsymbol{\sigma}^2 X + \boldsymbol{\sigma}^2 Y = \boldsymbol{\sigma}^2 Z$.)

Kovariancia, korrelációs együttható:

Kovariancia: $\text{cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}X)(Y-\mathbf{E}Y)) = \mathbf{E}(X\cdot Y) - (\mathbf{E}X)\cdot(\mathbf{E}Y)$.
$\boldsymbol{\sigma}^2(X+Y) = \boldsymbol{\sigma}^2(X) + \boldsymbol{\sigma}^2(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$, $\quad \text{cov}(X,X) = \boldsymbol{\sigma}^2 X$, $\quad cov(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$,
$\text{cov}(aX+bY,Z) = a\cdot\text{cov}(X,Z) + b\cdot\text{cov}(Y,Z)$.
Korrelációs együttható: $R(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma X\cdot\sigma Y}$, $\quad -1 \le R(X,Y) \le 1$,
$R(X,Y) = \pm 1 \Longleftrightarrow Y = aX+b$, $\quad a<0$ esetben van a -1, $\quad$ (1 valséggel) lineáris kapcsolat van köztük.
$R(X,Y) = \text{cov}(\tilde{X},\tilde{Y})$, ahol $\tilde{X}$ és $\tilde{Y}$ rendre X és Y standardizáltjai, azaz $\tilde{X} = \frac{X-\mathbf{E}X}{\boldsymbol{\sigma}X}$ és $\tilde{Y} = \frac{Y-\mathbf{E}Y}{\boldsymbol{\sigma}Y}$.
Ha X és Y függetlenek, akkor $\text{cov}(X,Y) = R(X,Y) = 0$, fordítva nem következik!

Centrális határeloszlás-tétel (CHT):

$X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ páronként független, azonos eloszlású valségi változók, közös $m = \mathbf{E}X_i$ és $\sigma^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X_i$.
Ekkor a $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot m}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}}$ valószínűségiváltozó-sorozathoz van olyan $Z \in N(0,1)$, hogy: $Z_n \xrightarrow{e} Z$,
(„Z_n eloszlásban tart Z-hez”), azaz $F_{Z_n}(x) \to \Phi(x)$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Speciális esete a Moivre–Laplace tétel, „nagyon nem precízen”: $X \in B(n,p)$ és n nagy: $\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1)$.

Feltételes várhatóérték, regresszió:

Regresszió esetén a feladat, hogy egy Y valószínűségi változó értékét „megbecsüljük”, egy X valószínűségi változó értékéből. Erre a „legjobb” (legkisebb négyzetes hibájú) becslés: $r(X) = \mathbf{E}(Y|X)$.
Diszkrét esetben: $\mathbf{E}(Y|X=x_i) = \sum\limits_j y_j \cdot \mathbf{P}(Y=y_j|X=x_i) = r(x_i)$, regressziósorozat.

$\mathbf{P}(Y=y_j|X=x_i) = \dfrac{\mathbf{P}(X=x_i, Y=y_j)}{\mathbf{P}(X=x_i)}$ (Y-nak az X-re vonatkozó feltételes eloszlása.)

Folytonos esetben: $\mathbf{E}(Y|X=x) = \displaystyle\int_{y=-\infty}^{\infty} y\cdot f_{Y|X}(y|x)dy = r(x)$, regressziós görbe.

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (Y-nak az X-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye.)
Feltételes várhatóérték tulajdonságai:
$\mathbf{E}(h(Y)\cdot X|Y) = h(Y)\cdot\mathbf{E}(X|Y)$, $\quad$ (ha Y a feltétel, a csak Y-tól függő részt ki lehet emelni).
$\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$, ha X és Y függetlenek, $\quad$ (független változótól nem függ az X várható értéke).
$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X|Y)\right) = \mathbf{E}X$, $\quad$ (mivel $\mathbf{E}(X|Y)$ is egy valószínűségi változó, ennek is lehet várható értéke).
$\mathbf{E}(X|X) = X$, $\quad$ (egy változó magától úgy függ, hogy önmaga marad, *NEM* $\mathbf{E}X$ lesz!)
($\mathbf{E}(X|Y)$-t ugyanúgy kell kiszámolni, mint $\mathbf{E}(Y|X)$-et, csak *MINDEN* képletben felcserélve X és Y szerepét.)

Lineáris regresszió:

Itt is a feladat, hogy egy Y változó értékét megbecsüljük, egy X valószínűségi változó függvényében, *DE* itt csak lineáris függvényt használhatunk, azaz $\hat{Y} = aX+b$ alakban kereshetünk jó $\hat{Y}$ becslést ($a,b \in \mathbb{R}$).
Ennek megjegyezhető alakja: $\frac{\hat{Y}-\mathbf{E}Y}{\boldsymbol{\sigma}Y} = \frac{X-\mathbf{E}X}{\boldsymbol{\sigma}X}\cdot R(X,Y)$, $\quad$ (a törtek kb. pont a változók standardizáltjai),
könnyen számítható (ekvivalens) alakja ($\hat{Y} = aX+b$): $\quad a = R(X,Y)\frac{\boldsymbol{\sigma}Y}{\boldsymbol{\sigma}X} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\boldsymbol{\sigma}^2 X}$, $\quad b = \mathbf{E}Y - a\mathbf{E}X$.
Kiszámításához kell (legalább): $\text{cov}(X,Y)$, $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\boldsymbol{\sigma}^2 X$, ezekhez pedig célszerű: $\mathbf{E}XY$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$.
2dim. normális eloszlás esetén $\hat{Y} = r(X)$, tehát ott a regressziós görbe pont a lineáris regresszió egyenese!

Polinomiális eloszlás:

Adott egy teljes eseményrendszer: $A_1, A_2, \ldots, A_r$, $\quad \mathbf{P}(A_i) = p_i$.
Elvégzünk egy kísérletet n-szer, legyen X_i, hogy A_i hányszor következett be $i \in \{1,2,\ldots,r\}$.
Ekkor az $X_1, X_2, \ldots, X_r$ változók együttes eloszlását polinomiálisnak nevezik, képlete:
$\mathbf{P}(X_1=k_1, X_2=k_2, \ldots, X_r=k_r) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}$.
Tulajdonságai: $X_i \in B(n,p_i)$, $\quad X_1+X_2+\ldots X_r = n$, $\quad \text{cov}(X_i,X_j) = -np_ip_j$, $\quad (i \ne j)$.
Használata: ha egy kísérletet n-szer végzünk el, és *CSAK* kizáró eseményekre (teljes eseményrendszerre).

Kétdimenziós normális eloszlás:

Ha $(X,Y)^T$ kétdimenziós normális eloszlású és $X \in N(m_1,\sigma_1)$, $Y \in N(m_2,\sigma_2)$ és $\mathrm{R}(X,Y) = \rho$, akkor:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Használata: emberek ijesztgetése vele…