

Méréselmélet

Összeállította: Péceli Gábor

2019.

1. Bevezetés

1.1. A Méréselmélet c. tárgy célkitűzése

A **Méréselmélet** c. tárgy arra vállalkozik, hogy rendszerezett formában áttekintse azokat a megfontolásokat és módszereket, amelyek alapvetők *mérési adatok* felhasználása és feldolgozása során. A mérési adatok a bennünket körülvevő valóság *megfigyeléséből* származnak, annak jobb *megismerését és befolyásolását* teszik lehetővé. A jobb (“pontosabb”) megismerésre és befolyásolásra irányuló törekvés valójában egy permanens folyamat, amely az előzetes, és a méréssel megszerzett ismeretek egyre finomabb ötvözése révén éri el célját.

A Méréselmélet c. tárgy keretében a mesterképzés céljait leginkább azzal szolgáljuk, hogy felidézünk azokat a megfontolásokat, amelyek a mérési adatokban rejlő információk hatékony kinyerését teszik lehetővé. Tárgyaljuk azokat a módszereket, amelyek alapján *döntéseket* tudunk támogatni, *paraméterek értékét* tudjuk *megbecsülni* és le tudjuk írni, vagyis *modellezni* tudjuk a környezetünk *valós idejű mechanizmusait*. Fél szemmel arra is figyelünk, hogy az adatok valós idejű feldolgozása miként lehetséges, és hogyan integrálhatók ezek a módszerek a különféle *CPS, IoT, Industry 4.0* rendszereink részegységeibe, ill. *autonóm* működést biztosító vezérlő mechanizmusába.

1.2. Mit tanultunk Méréstechnikából?

Emlékeztető: A Méréstechnika c. tárgy keretében megismerkedhettünk a méréselmélet alapjaival a következő címszavak, ill. témakörök mentén:

- *Mérés és modellezés*
- Modellillesztés
- *Mérési hibák* (modellezési, átviteli és műszer-hiba)
 - hibaterjedés (a teljes differenciál alkalmazása)
 - mérőeszköz struktúrák (soros, párhuzamos, visszacsatolt)
 - jelátalakítók hibái (nullpont, terhelési, hőmérsékleti, kalibrációs, stb. hibák)
 - a műszerek pontossága (analóg, digitális; alkatrész és frekvenciafüggés)
- *Elemi mérési módszerek* (differencia, közvetlen és közvetett összehasonlítás, helyettesítő, felcserélési vagy Gauss módszer)
- *Mérési sorozat kiértékelése* (megadandó a helyes érték legvalószínűbb értéke/becslője, a becslés bizonytalansága; az átlag szórása; konfidencia számítás)
- *A mérési bizonytalanság kifejezése* (a GUM módszer)

Ezen témakörök ismeretét a Méréselmélet tárgy előtanulmányi követelményének tekintjük, a fenti címszavak közül mélyebben csak a modellillesztés témakörét érintjük.

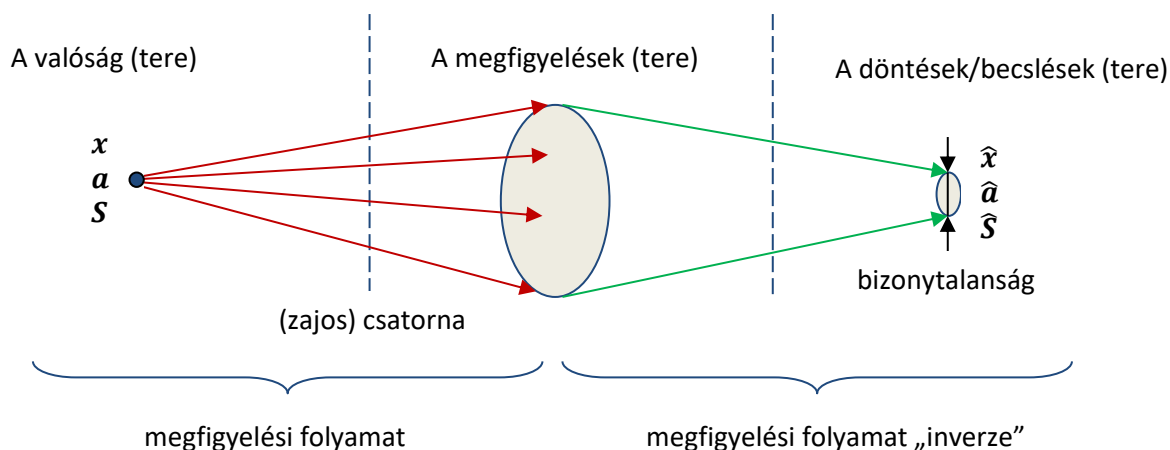
1.3. A mérési eljárás sajátosságai

A mérési eljárás a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük. Az **1. ábra** ennek a folyamatnak az interpretálását segíti. A mérés során a valóság jelenségeit szeretnénk megragadni. Ezt a „megragadást” előszeretettel végezzük olyan jellemzőkre építve, amelyek valamilyen értelemben stabilitást mutatnak. Ilyen jellemzőkhöz (is) absztrakció révén jutunk. Kiemelt szerephez jutnak

- az *állapotváltozók* (x), amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.)

Méréselmélet: 1. Bevezetés

- a *paraméterek* (\mathbf{a}), amelyek a kölcsönhatások intenzitásvizonyait ragadják meg, és
- a *struktúrák* (\mathbf{S}), amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.



1. ábra. A mérési eljárás

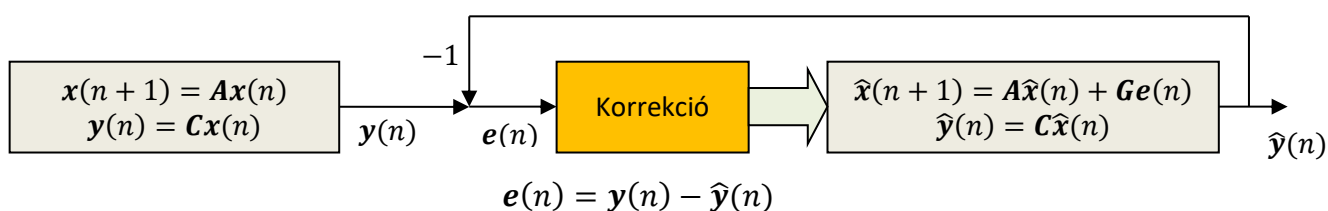
A valóság „tere” egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg. A mérés előtt a pont koordinátáit nem ismerjük. A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – csak közelítőleg lehetséges, mivel a mérés hibával terhelt. További nehézség, hogy a mérendő mennyiséghez sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképzéséből tudunk kiindulni. Ezt a leképzést nevezzük megfigyelésnek. A mérendő és a megfigyelt érték közötti út a mérési/jelátviteli csatorna.

1.3.1. Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén

A **2. ábra** illusztratív példaként egy időben diszkrét megfigyelőt mutat be. A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek¹:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n), \quad (2)$$



2. ábra. Időben diszkrét megfigyelő

ahol az $\mathbf{x}(n)$ állapotvektor N dimenziós, az \mathbf{A} állapotátmenet mátrix $N * N$ dimenziós, az $\mathbf{y}(n)$ megfigyelés $M \leq N$ dimenziós vektor, a \mathbf{C} megfigyelési mátrix pedig $M * N$ dimenziós. Célunk az $\mathbf{x}(n)$ állapotvektor becslése. Ennek eszköze a megfigyelő, amely a „valóság” másolata igyekszik lenni azáltal, hogy egy korrekciós/tanuló/adaptáló mechanizmus eredményeképpen követi azt. A követés bekövetkeztével a mérés „eredménye” $\hat{\mathbf{x}}(n)$ a

¹ A jegyzetben dominálnak azok a jelölések, amelyek több megfigyelés egyidejű figyelembevételére utalnak. Az ilyen értelemben többváltozós függvények esetében ennek tényét csak esetenként hangsúlyozzuk, többnyire külön nem jelöljük, hanem kézenfekvőnek tekintjük annak következményeivel együtt. Vektorok és mátrixok esetében azonban ennek tényét a szokásos **bold** szedéssel jelezzük.

Méréselmélet: 1. Bevezetés

megfigyelőből olvasható ki. A megfigyelőben megvalósuló „másolat” állapot, ill. megfigyelési egyenletei:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}\mathbf{e}(n), \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(n), \quad (4)$$

ahol a \mathbf{G} korrekciós mátrix $N \times M$ dimenziós, $\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)$. A \mathbf{G} mátrixot úgy tervezzük meg, hogy $\hat{\mathbf{x}}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n)$. (1) és (3) különbségét képezve:

$$\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) - \mathbf{G}\mathbf{e}(n) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)). \quad (5)$$

Bevezetve az $\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = \mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)$, valamint az $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}$ jelöléseket, az ún. hibarendszer állapotátmenet mátrixa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = \mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}(n). \quad (6)$$

A \mathbf{G} korrekciós mátrixot úgy kell megtervezni, hogy $\|\boldsymbol{\varepsilon}(n)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, aminek érdekében célszerűen $\|\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\| < \|\boldsymbol{\varepsilon}(n)\|$, $\forall n$ -re, azaz \mathbf{F} csökkenti $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ hosszát minden lépésben, vagyis idegen szóval „kontraktív”.

Megjegyzések:

1. Az $\boldsymbol{\varepsilon}(n)$ hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség értelemszerűen a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skalár esetben pedig a hiba abszolút értékére.
2. A hiba eltűnéséhez természetesen nem kell megkövetelnünk a csökkenés monotonitását, csak a hibarendszer stabilitását, azaz külső gerjesztés nélküli esetben a nullához konvergálását. Ez interpretálható úgy is, hogy a hibarendszer a belső energiáját a stabil állapot elérése érdekében leadja, idegen szóval disszipálja. Ha ez a disszipáció az iteráció minden lépésében fennáll, akkor a hibavektor hosszának csökkenése monoton folyamat lesz.

Esetek:

1. $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Ebben az esetben $\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$. Ez akkor lehetséges, ha \mathbf{C} négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor. Így aztán nem is csoda, hogy iteráció nélkül, egyetlen lépésben meg tudjuk határozni az állapotvektor értékét. Ez azt jelenti, hogy a megfigyelő, ezen belül a „másolat”, egyetlen lépés után követni képes a megfigyelt (fizikai) rendszert.
2. $\mathbf{F}^N = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^N = \mathbf{0}$. Ebben az esetben a hibarendszer N lépésben konvergál:

$$\mathbf{x}(N) - \hat{\mathbf{x}}(N) = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^N(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Az $\mathbf{F}^N = \mathbf{0}$ tulajdonságú mátrixok, az ún. nemderogatórius nilpotens mátrixok, amelyek sajátja, hogy valamennyi sajátértékük nulla. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek véges impulzusválaszúak (ún. *FIR* rendszerek), hiszen a kezdeti hiba véges lépésben eltűnik. (Megjegyzés: ha $\mathbf{F}^M = \mathbf{0}$, ahol $M < N$, akkor \mathbf{F} ún. derogatórius nilpotens mátrix, ilyenkor a konvergencia kevesebb, mint N lépésben bekövetkezik.)

3. Ha $\mathbf{F}^N = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^N \neq \mathbf{0}$, akkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának hossza exponenciális jelleggel fog csökkenni. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz stabil, ha összes sajátértéke az egység sugarú körön belül helyezkedik el. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek végtelen impulzusválaszúak (ún. *IIR* rendszerek), mert a kezdeti hiba csak végtelen lépésben tűnik el.

Példák:

1. *Példa:* Adott $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hogyan állítsuk be G -t?

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. *Példa:* Adott $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{C} = [1 \quad 1]$. Hogyan állítsuk be \mathbf{G} -t? $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = ?$

$$\mathbf{G}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} g_0 & g_0 \\ g_1 & g_1 \end{bmatrix}. [\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}]^2 = \mathbf{0}$ alapján határozzuk meg \mathbf{G} -t:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 - 2g_0 + g_0^2 + g_0g_1 & -g_0 + g_0^2 + g_0 + g_0g_1 \\ -g_1 + g_1^2 + g_1 + g_0g_1 & 1 + 2g_1 + g_1^2 + g_0g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A mellékátló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk: $1 - 2g_0 = 0$, illetve $1 + 2g_1 = 0$, amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$. Ellenőrzésképpen:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Példa:* Határozzuk meg $[\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}]$ sajátértékeit a 2. *Példa* eredményének felhasználásával:

$$\begin{aligned} \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}] = 0 &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} = (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5) + 0.25 \\ &= \lambda^2 - 0.25 + 0.25 = 0. \end{aligned}$$

Mindkét sajátérték nulla.

Megjegyzések:

1. Ez a tulajdonság általánosan igaz véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.
2. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek valamennyi pólusa az origóban van:

$$H(z) = a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N} = \frac{a_N + a_{N-1}z + a_{N-2}z^2 + \dots + a_1z^{N-1}}{z^N} \quad (8)$$

Ezek az ún. véges impulzusválaszú (*FIR*) szűrők. (8) időtartománybeli megfelelője:

$$y(n) = a_1x(n-1) + a_2x(n-2) + \dots + a_Nx(n-N), \quad (9)$$

ahol a valós idejű kiszámíthatóság miatt csak $x(n)$ korábbi mintái szerepelhetnek.

3. A 3. *példában* a sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a g_0 és a g_1 értékek meghatározására:

$$\begin{aligned} \det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}] = 0 &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 + g_0 & g_0 \\ g_1 & \lambda + 1 + g_1 \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 = \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Ebből: $g_0 + g_1 = 0$, ill. $g_0 - g_1 = 1$, amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$.

1.3.2. Megfigyelés zajos csatorna esetén

Ebben az esetben nem $\boldsymbol{\varepsilon}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{0}$ az elvárásunk, hanem az, hogy a négyzetes hiba $E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n)] = \text{tr}E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \min$ legyen. Ezzel egyidejűleg a hibarendszer (6) állapotegyenletét az

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)] = \mathbf{F}E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]\mathbf{F}^T \quad (10)$$

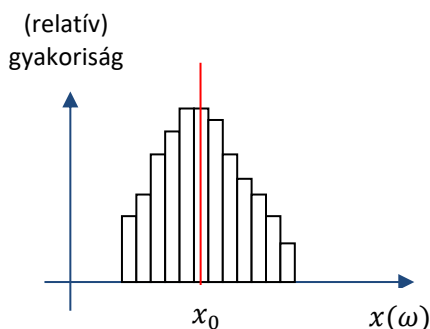
összefüggés váltja fel. Az itt szereplő hiba-mátrix központi szerepet kap a híres Kalman prediktor, ill. szűrő esetében. (R.E. Kalman világhírű, 2016-ban elhunyt magyar származású tudós.) Ezzel az esettel részletesebben is foglalkozunk a “4. Szűréselmélet alapjai” című fejezetben.

Megjegyzések:

1. A 2. ábrán látható elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel. Mivel a modellek lineárisak, a szuperpozíció értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.
2. A 2. ábra szerinti megfigyelőt Luenberger megfigyelőnek nevezzük. Luenberger szerint majdnem minden rendszer megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.
3. Egy ellenállás- vagy impedancia-mérő híd ismeretlen elemet tartalmazó hídága a valóság fizikai modellje, a kiegyenlítő elemet tartalmazó ága pedig a megfigyelőben felépülő, beállítható/hangolható modell. A hídágak osztópontján megjelenő feszültségek különbsége vezérli a hangolást, és a végén a két feszültség megegyezik, a beállítható elemről leolvasott érték segítségével meghatározható az ismeretlen. Ez az áramkör, a hangolást végző operátor részvételével megvalósítja a megfigyelőt.

1.4. A zajos csatorna modellezése

Véletlen események leírására valószínűségi változókat, ill. sztochasztikus folyamatokat használunk. Az $x(\omega)$ valószínűségi változó egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós számokat rendel. A véletlen jelenségekből származó mintákból hisztogramot készítve megkapjuk a valószínűség sűrűségfüggvény statisztikai jellemzését (lásd **3. ábra**). Ha a hisztogram felbontását minden



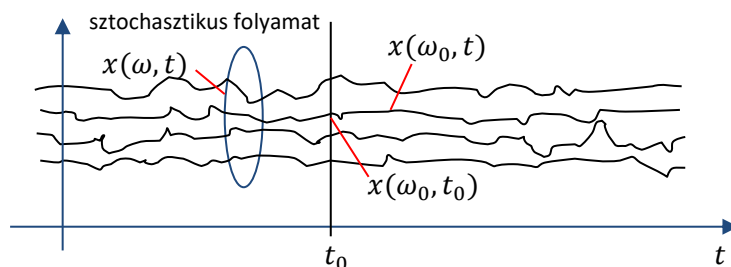
3. ábra. Véletlen eseményekhez rendelt értékek hisztogramja

határon túl finomítjuk, és végtelen számú kísérletet végzünk, akkor megkapjuk az $f(x)$ ún. valószínűség sűrűségfüggvényt. Ennek integrálja, azaz a görbe alatti területe egy adott u -ig terjedően

Méréselmélet: 1. Bevezetés

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(v)dv = P(x \leq u) \quad (11)$$

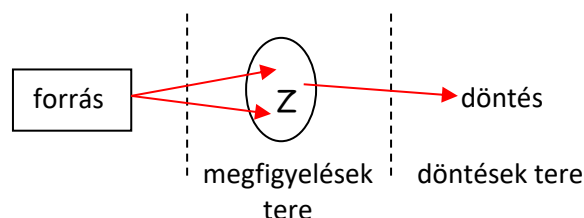
az ún. eloszlásfüggvény, ami megmondja mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke u -nál nem nagyobb. Az $x(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós időfüggvényeket rendel (lásd **4. ábra**). Ezen függvények adott időpontbeli (pl. t_0) értékei egy valószínűségi változót reprezentálnak.



4. ábra. A sztochasztikus folyamat jellemzése

2. A döntésemélet alapjai

Példa: detektálás radarral. Bináris vagy kéthipotézises döntés: eldöntendő a jelenlét vagy a jelen nem lét kérdése. A mérési eljárás sémáját az **5. ábrán** láthatjuk. A csatorna zajos, ugyanarról a jelenségről rendre eltérő értékű megfigyeléseket kapunk. El kell döntenünk, hogy – egy vagy több megfigyelésre alapozva – a két lehetséges hipotézisből melyiket



fogadjuk el:

5. ábra. A döntés sémája

H_0 hipotézis: az (ellenséges) objektum nincs jelen.

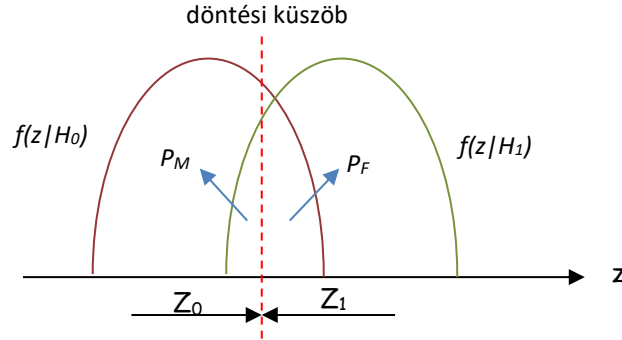
H_1 hipotézis: az (ellenséges) objektum jelen van.

Lehetséges hibák:

Elfogadjuk H_0 -t, holott H_1 igaz. Ennek valószínűsége P_M (miss probability),

Elfogadjuk H_1 -t, holott H_0 igaz. Ennek valószínűsége P_F (false alarm probability).

A döntéshez előzetesen felvesszük a megfigyelések hisztogramját, és abból közelítőleg előállítjuk az $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$ feltételes sűrűségfüggvényeket. Ezeket csatorna-karakterisztikáknak is nevezzük. A feltétel egyik vagy másik hipotézisnek megfelelő viselkedés. (Vegyük észre, hogy ez egy információgyűjtési, azaz tanulási fázis.) A két sűrűségfüggvény egymáshoz való viszonyát a **6. ábra** mutatja be. Keressük a döntési küszöböt valamilyen optimum kritérium szerint. Mivel a sűrűségfüggvények átlapolódnak, ezért a döntési küszöb meghatározása nem triviális. Az ehhez alkalmazható konkrét stratégia a rendelkezésre álló információ függvénye.



6. ábra. A feltételes sűrűségfüggvények egymáshoz való viszonya

Kéthipotézises Bayes döntés:

- Feltételei:
1. Ismerjük az ún. a priori valószínűségeket: $H_0 \rightarrow P_0$ és $H_1 \rightarrow P_1$.
 2. Ismerjük a csatornakarakterisztikákat: $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$.

Definiáljuk a költségeket:

C_{ij} annak a költsége, hogy az i -edik hipotézist fogadtuk el, holott a j -edik igaz.

Értelmezzük a bekövetkezési valószínűségeket:

$P(H_i|H_j)$, ahol az i index a feltételezett hipotézis, a j index pedig a bekövetkezett kimenetel azonosítója. (i és j most 0 vagy 1.)

A cél: az átlagos kockázat (risk)/költség (cost) minimalizálása:

$$R = C_{00}P_0P(H_0|H_0) + C_{10}P_0P(H_1|H_0) + C_{01}P_1P(H_0|H_1) + C_{11}P_1P(H_1|H_1) \quad (12)$$

Vegyük észre, hogy az első két tag esetében a H_0 hipotézisnek megfelelő kimenetel következett be, míg a második kettőnél a H_1 szerinti. A kifejezés minimumát a döntési küszöb értékének alkalmas megválasztásával érjük el. Jelölje Z_i az elfogadás tartományát. Erre vonatkozóan határozzuk meg a bekövetkezési valószínűségeket az alábbiak szerint:

$$P(H_i|H_j) = \int_{Z_i} f(z|H_j)dz, \quad (13)$$

ezzel (12)

$$R = C_{00}P_0 \int_{Z_0} f(z|H_0)dz + C_{10}P_0 \int_{Z_1} f(z|H_0)dz + C_{01}P_1 \int_{Z_0} f(z|H_1)dz + C_{11}P_1 \int_{Z_1} f(z|H_1)dz. \quad (14)$$

Mivel a két elfogadási tartomány együttesen lefedi a teljes eseményteret, ezért a sűrűségfüggvények integráljai az egyik elfogadási tartomány felett megegyeznek az egység és a másik elfogadási tartomány feletti integrálok különbségével. A Z_1 feletti integrálokat lecserélve Z_0 feletti integrálokkal (14) a következő alakban írható:

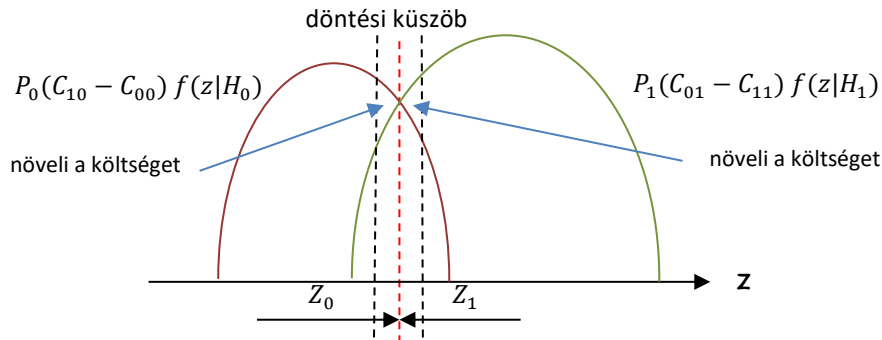
$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + P_0(C_{00} - C_{10}) \int_{Z_0} f(z|H_0)dz + P_1(C_{01} - C_{11}) \int_{Z_0} f(z|H_1)dz. \quad (15)$$

Tegyük fel, hogy $C_{10} > C_{00}$, és $C_{01} > C_{11}$, továbbá tekintsük a döntési küszöb helyét a (15) összefüggésbeli egyváltozós integrál függvény független változójának. E szerint a változó szerint keresve (15) szélsőértékét azt kapjuk, hogy az átlagos kockázat minimuma a z változó azon értékénél (a keresett döntési küszöbértéknél) van, amelyre

$$P_0(C_{10} - C_{00})f(z|H_0) = P_1(C_{01} - C_{11})f(z|H_1). \quad (16)$$

Méréselmélet: 2. A döntéelmélet alapjai

A (16) alapján kiadódó döntési küszöbértéktől akár jobbra, akár balra eltérve a (15) szerinti átlagos kockázat növekedni fog. Ennek belátását segíti a **7. ábra**, ahol azt vizsgálhatjuk, hogy miként alakulnak a (15) összefüggésbeli integrálok amikor a feltételezett döntési küszöböt az optimálisnak tekintett értéktől jobbra vagy balra képzeljük el.



7. ábra. Az optimális döntési küszöb

A (16) összefüggés átírásával kapjuk:

$$\frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)} = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} = \eta \quad (17)$$

azaz a döntési küszöb értékénél a két feltételes sűrűségfüggvény hányadosa egy előre adott konstans. (A (17) összefüggésben z a döntési küszöb értékét veszi fel.) Ha az aktuálisan megfigyelt értéket behelyettesítjük a

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)} \quad (18)$$

ún. „likelihood” arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1 , ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0 . Tömören írva:

$$\Lambda(z) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \eta \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \quad (19)$$

Ez az ún. Bayes döntési szabály vagy likelihood arány teszt.

Megjegyzések a kéthipotézises Bayes döntéshez:

1. Ha a költségeket úgy választjuk meg, hogy (17) $\eta = \frac{P_0}{P_1}$ legyen, akkor a döntési szabály

$$P_1 f(z|H_1) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P_0 f(z|H_0) \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \text{ alakban írható, ami megegyezik a } P(H_1|z) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P(H_0|z) \text{ kifejezéssel,}$$

vagyis a döntést az *a posteriori* valószínűségek alapján hozhatjuk meg. Ezt a speciális esetet maximum a posteriori (MAP) döntésnek nevezzük.

2. Szokás (19) helyett a $\lambda(z) = \ln \Lambda(z) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \ln \eta = \gamma$, ún. log-likelihood arányt használni.

1. Példa: Konstans jel detektálása zajos csatornán keresztül: jelen van-e a jel a megfigyelésekben vagy nincsen? Tegyük fel, hogy a megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel, és σ_n^2 varianciával. A H_0 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = n_k$, azaz a jel nincsen jelen, csak a zaj aktuális mintáját kapjuk. A H_1 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = a + n_k$, azaz a jel jelen van, a jel és a zaj aktuális mintájának összegét figyeltük meg. $k = 0, 1, \dots, N-1$, azaz összesen N mintát figyelünk

Méréselmélet: 2. A döntélmélet alapjai

meg egyszerre. A döntés során az együttes feltételes sűrűségfüggvényeket fogjuk használni. Egyetlen megfigyelés esetén a feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}, f(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2}} \quad (20)$$

A megfigyelések függetlensége miatt a N megfigyelés együttes sűrűségfüggvénye az egyedi megfigyelések sűrűségfüggvényeinek szorzata. (19) aktuális alakja:

$$\Lambda(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{f(z_k|H_1)}{f(z_k|H_0)} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}} \stackrel{H_1}{>} \eta, \stackrel{H_0}{<} \quad (21)$$

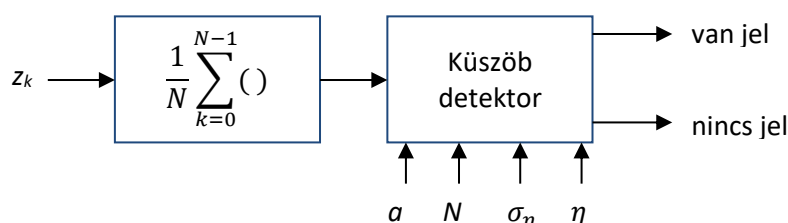
illetve az ún. log-likelihood arány:

$$\ln \Lambda(z) = \lambda(z) = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(z_k - a)^2}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} = \frac{a}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - \frac{Na^2}{2\sigma_n^2} \stackrel{H_1}{>} \ln \eta = \gamma \stackrel{H_0}{<} \quad (22)$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \stackrel{H_1}{>} \frac{\sigma_n^2}{Na} \ln \eta + \frac{a}{2} \quad (23)$$

A teszthez tehát a megfigyelések átlagát kell képeznünk, és összevetnünk egy küszöbértékkel. A „döntőkészülék” blokkvázlatát a **8. ábra** mutatja be.



8. ábra. A döntőkészülék blokkvázlata

Megjegyzések:

- Ha $\eta = 1$, akkor $\ln \eta = 0$, tehát $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \stackrel{H_1}{>} \frac{a}{2} \stackrel{H_0}{<}$, azaz a döntési küszöb a konstans jelszint fele. Ez például fennáll, ha $P_0 = P_1 = 0.5$, $C_{00} = C_{11}$ és $C_{10} = C_{01}$.
- Ha $\eta < 1$, akkor $\ln \eta < 0$, amivel a döntési küszöb a konstans jelszint fele alá csökken. Ez például fennáll, ha $P_0 < P_1$, $C_{00} = C_{11}$ és $C_{10} = C_{01}$. Ilyenkor a konstans előfordulása gyakoribb, a küszöb lecsökken, ellenkező esetben nő.
- Figyeljük meg, hogy a (23) összefüggésben milyen hatású a zaj varianciája, az együttes megfigyelések száma és maga konstans jel szintje.

2. Példa: Változó amplitúdójú jel detektálása zajos csatornán keresztül: jelen van-e a jel a megfigyelésekben vagy nincsen? Tegyük fel, hogy a megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel, és σ_n^2 varianciával. A H_0 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = n_k$, azaz a jel nincsen jelen, csak a zaj aktuális mintáját kapjuk. A H_1 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = a_k + n_k$, azaz a jel jelen van, a jel és a zaj aktuális mintájának összegét figyeltük meg. $k = 0, 1, \dots, N-1$, azaz összesen N mintát figyelünk

Méréselmélet: 2. A döntélmélet alapjai

meg egyszerre. A döntés során az együttes feltételes sűrűségfüggvényeket fogjuk használni. Egyetlen megfigyelés esetén a feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}, f(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z_k-a_k)^2}{2\sigma_n^2}} \quad (24)$$

A megfigyelések függetlensége miatt a N megfigyelés együttes sűrűségfüggvénye az egyedi megfigyelések sűrűségfüggvényeinek szorzata. (19) aktuális alakja:

$$\Lambda(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{f(z_k|H_1)}{f(z_k|H_0)} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\frac{(z_k-a_k)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}} \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \eta \quad (25)$$

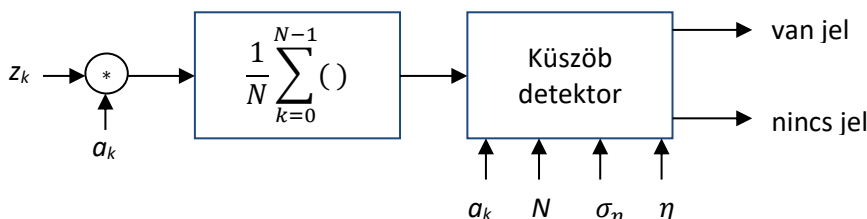
illetve a log-likelihood arány:

$$\ln \Lambda(z) = \lambda(z) = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(z_k - a_k)^2}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k a_k - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \ln \eta = \gamma \quad (26)$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k z_k \underset{H_0}{>} \underset{H_1}{<} \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \eta + \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \quad (27)$$

A teszthez tehát a megfigyelések – a jel mintáival – súlyozott átlagát kell képeznünk, és összevetnünk egy küszöbértékkel. A „döntőkészülék” blokkvázlatát a **9. ábra** mutatja be.



9. ábra. Döntés illesztett szűrővel

Megjegyzések:

1. Vegyük észre, hogy a (27) összefüggésből (23) egyszerűen származtatható, ha a jel mintái rendre egyformák.
2. A (27) összefüggés szerinti jel-súlyozást (a jelhez) „illesztett” szűrőnek nevezzük.

3. példa: Véletlen amplitúdójú jel detektálása zajos csatornán keresztül: jelen van-e a jel a megfigyelésekben vagy nincsen? Tegyük fel, hogy a jel és a zaj egyaránt időben diszkrét, stacionárius sztochasztikus fehér zaj folyamatok, Gauss eloszlással, nulla várható értékkel, és σ_a^2 , ill. σ_n^2 varianciával. A H_0 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = n_k$, azaz a jel nincsen jelen, csak a zaj aktuális mintáját kapjuk. A H_1 hipotézis az, hogy a megfigyelés $z_k = a_k + n_k$, azaz a jel jelen van, a jel és a zaj aktuális mintájának összegét figyeltük meg. $k = 0, 1, \dots, N-1$, azaz összesen N mintát figyelünk meg egyszerre. A döntés során az együttes feltételes sűrűségfüggvényeket fogjuk használni. Egyetlen megfigyelés esetén a feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}, f(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}} e^{-\frac{z_k^2}{2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)}} \quad (28)$$

Méréselmélet: 2. A döntélmélet alapjai

A megfigyelések függetlensége miatt a N megfigyelés együttes sűrűségfüggvénye az egyedi megfigyelések sűrűségfüggvényeinek szorzata. (19) aktuális alakja:

$$\Lambda(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{f(z_k|H_1)}{f(z_k|H_0)} = \prod_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}} e^{-\frac{z_k^2}{2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)}} \right]_{H_1}^{>\eta} \left[\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}} \right]_{H_0}^{<\eta} \quad (29)$$

illetve a log-likelihood arány:

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(z) &= \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} = \\ &= \frac{\sigma_a^2}{2\sigma_n^2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 + \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2} \end{aligned} \quad (30)$$

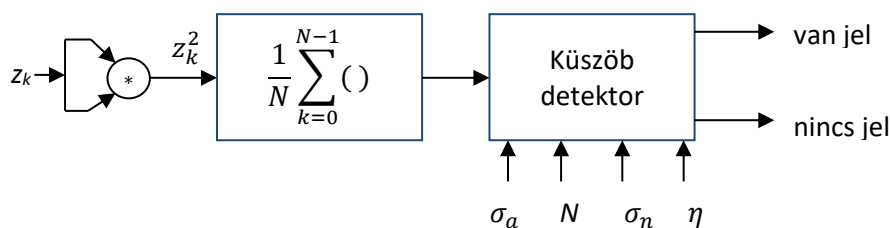
Átrendezve:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{H_1}{H_0} \frac{2\sigma_n^2(\sigma_a^2 + \sigma_n^2)}{\sigma_a^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_a^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2} + \frac{1}{N} \ln \eta \right] \quad (31)$$

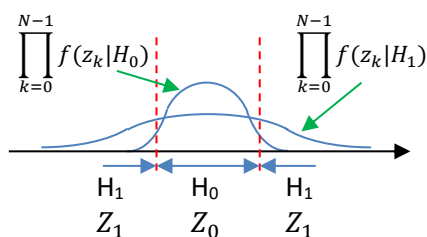
A teszthez tehát a megfigyelések négyzetének az átlagát kell képeznünk, és összevetnünk egy küszöbértékkel. A „döntőkészülék” blokkvázlatát a **10. ábra** mutatja be.

Megjegyzések:

1. Ha $\eta = 1$, és $\sigma_a^2 = \sigma_n^2$, akkor $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{H_1}{H_0} 2\sigma_n^2 \ln 2$.
2. (31) alternatív alakja: $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{H_1}{H_0} 2\sigma_n^2 \left(1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \right) + \frac{1}{N} \ln \eta \right]$, amelyben a varianciák arányának hatását elemezhetjük.
3. A **11. ábra** a döntési tartományok elhelyezkedését mutatja. Látható, hogy elhelyezkedésük szimmetrikus, mert az eredmény nem függ a megfigyelt érték előjelétől.



10. ábra. Döntés a jelenergia függvényében



11. ábra. A döntési tartományok

Méréselmélet: 2. A döntéelmélet alapjai

4. Példa: Bayes döntés diszkrét valószínűségekkel: Tárgyfelvétel eldöntése az első előadáson szerzett benyomások (*érdekes* vagy *unalmas*) alapján. Definiáljuk az előadások három csoportját: *jó*, *közepes*, *rossz*. A hallgató előzetes tapasztalatai alapján azt tudja, hogy

$$P(jó) = 0.2, P(közepes) = 0.4 \text{ és } P(rossz) = 0.4.$$

Ezek az ún. *apriori* valószínűségek. Ismeri továbbá, hogy az előadásokról szerzett benyomások (*érdekes* vagy *unalmas*) hogyan függenek össze az egyes előadás csoportokkal. Ezek a csatornakarakterisztikának megfelelő feltételes valószínűségek:

$$P(\text{érdekes}|jó) = 0.8, P(\text{érdekes}|közepes) = 0.5, P(\text{érdekes}|rossz) = 0.1 \\ P(\text{unalmas}|jó) = 0.2, P(\text{unalmas}|közepes) = 0.5, P(\text{unalmas}|rossz) = 0.9$$

A költségek/kockázatok mérőszámai legyenek a következők:

$$C_{\text{felvesszük}|jó} = 0, C_{\text{felvesszük}|közepes} = 5, C_{\text{felvesszük}|rossz} = 10 \\ C_{\text{nem vesszük fel}|jó} = 20, C_{\text{nem vesszük fel}|közepes} = 5, C_{\text{nem vesszük fel}|rossz} = 0$$

A hallgatónak a jó döntéshez minimalizálnia kell a feltételes kockázatot/költséget. (A feltétel az első előadáson szerzett tapasztalat.) A kockázati/költség függvények:

$$R(\text{felvesszük}|érdekes), R(\text{felvesszük}|unalmas) \\ R(\text{nem vesszük fel}|érdekes), R(\text{nem vesszük fel}|unalmas)$$

Ezek közül az elsőt kifejtve

$$R(\text{felvesszük}|érdekes) = C_{\text{felvesszük}|jó}P(jó|érdekes) + \\ + C_{\text{felvesszük}|közepes}P(közepes|érdekes) + C_{\text{felvesszük}|rossz}P(rossz|érdekes)$$

Az itt szereplő feltételes valószínűségek az ún. *a posteriori* valószínűségek a Bayes tétel segítségével számíthatók:

$$P(jó|érdekes) = \frac{P(\text{érdekes}|jó)P(jó)}{P(\text{érdekes})}, \\ P(közepes|érdekes) = \frac{P(\text{érdekes}|közepes)P(közepes)}{P(\text{érdekes})}, \\ P(rossz|érdekes) = \frac{P(\text{érdekes}|rossz)P(rossz)}{P(\text{érdekes})}$$

Ezekben a számláló tényezői ismertek, egyedül $P(\text{érdekes})$ számítandó a teljes valószínűség tétele felhasználásával:

$$P(\text{érdekes}) = P(\text{érdekes}|jó)P(jó) + \\ + P(\text{érdekes}|közepes)P(közepes) + P(\text{érdekes}|rossz)P(rossz) = \\ = 0.8 * 0.2 + 0.5 * 0.4 + 0.1 * 0.4 = 0.4$$

Ezzel:

$$P(\text{unalmas}) = 0.6, P(jó|érdekes) = 0.4, \\ P(közepes|érdekes) = 0.5, P(rossz|érdekes) = 0.1$$

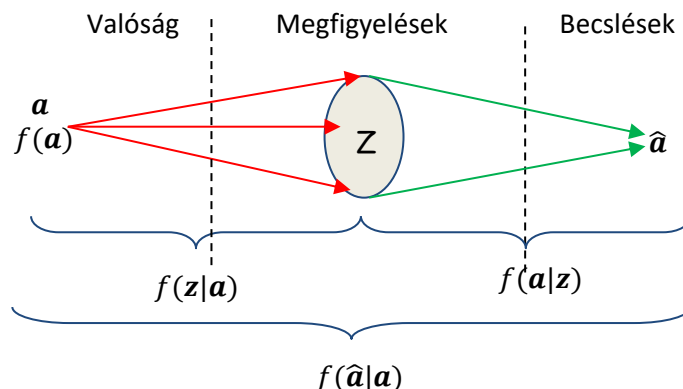
Ha a hallgató az első előadás után azt tapasztalja, hogy az előadás *érdekes*, akkor a $R(\text{felvesszük}|érdekes)$, és a $R(\text{nem vesszük fel}|érdekes)$ kockázatok/költségeket fogja összevetni.

$$R(\text{felvesszük}|érdekes) = 0 * 0.4 + 5 * 0.5 + 10 * 0.1 = 3.5, \\ R(\text{nem vesszük fel}|érdekes) = 20 * 0.4 + 5 * 0.5 + 0 * 0.1 = 10.5,$$

a hallgató tehát fel fogja venni a tárgyat. Határozzák meg a kockázati/költség értékeket arra az esetre is, amikor az első előadással kapcsolatos tapasztalat az, hogy *unalmas*!

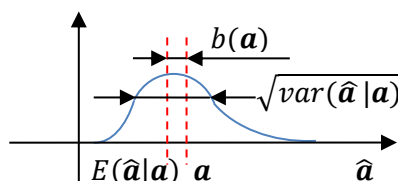
3. A becslélmélet alapjai

A cél az \mathbf{a} paraméter(vektor) $\hat{\mathbf{a}}$ becslőjének meghatározása a **12. ábrán** látható előzetesen ismert (és az azokból származtatott) sűrűségfüggvények ismeretében.



12. ábra. Becslő származtatása

A továbbiak követhetősége érdekében érdemes felidézni: (1) a sűrűségfüggvény fogalmát és viszonyát a mérési sorozatokkal, (2) a feltételes sűrűségfüggvény fogalmát (pl. a csatorna karakterisztika jellemzésére), és (3) a várható érték fogalmát, valamint kiszámítását a sűrűségfüggvényre alapozva. A becslés jellemzésére és jóságának mértékére szolgáló jellemzők (illusztrációként lásd **13. ábra**):



13. ábra. Sűrűségfüggvény jellemzők

1. Feltételes várhatóérték:

$$E\{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{a}} f(\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}) d\hat{\mathbf{a}} \quad (32)$$

2. Feltételes kovariancia mátrix:

$$cov\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\} = E\{(\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}))(\hat{\mathbf{a}} - E(\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}))^T|\mathbf{a}\} \quad (33)$$

3. Feltételes torzítás:

$$b(\mathbf{a}) = E\{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\} - \mathbf{a} \quad (34)$$

4. Átlagos négyzetes hiba (Mean Square Error (MSE)) mátrix:

$$E\{(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a})^T|\mathbf{a}\} = cov\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\} + b(\mathbf{a})b^T(\mathbf{a}) \quad (35)$$

Ha ismert az $f(\mathbf{a})$ valószínűség-sűrűségfüggvény, akkor definiálható:

5. Feltétel nélküli várható érték:

$$E(\hat{\mathbf{a}}) = E\{E\{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\}\} \quad (36)$$

6. Feltétel nélküli kovariancia mátrix:

$$\text{cov}\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}\} = E\{\text{cov}\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\}\} \quad (37)$$

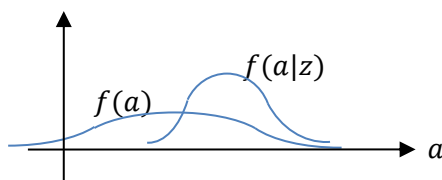
3.1. Bayes becslők

Ebben az esetben az ismeretlen (méréndő) paramétert valószínűségi változóként modellezzük, és feltételezzük, hogy ismert a megfigyelt (egyszerűség kedvéért skalár) paraméter sűrűségfüggvénye: $f(a)$, és a csatorna karakterisztikája: $f(z|a)$. Az ismert sűrűségfüggvények függvényekre alapozva, a Bayes szabály felhasználásával előállítható az $f(a|z)$ ún. *a posteriori* sűrűségfüggvény:

$$f(a|z) = \frac{f(z|a)f(a)}{f(z)}, \quad (38)$$

ahol

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)f(z|a)da. \quad (39)$$



14. ábra. Feltételes és feltétel nélküli sűrűségfüggvény

A **14. ábra** azt mutatja, hogy amennyiben a megfigyelések tartalmaznak a paraméterre vonatkozó információt, az *a posteriori* sűrűségfüggvény a konkrét paraméter-értékek egy szűkebb környezetére terjed ki. Az *a posteriori* sűrűségfüggvény segítségével határozzuk meg az ismeretlen paraméter (vektor) lehető legjobb becslőjét. Ehhez értelmezünk a „legjobb” fogalmát alkalmas költségfüggvényeken keresztül:

$$R(\hat{a}, a) = E\{C(\hat{a}, a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C(\hat{a}, a)f(a, z)dadz, \quad (40)$$

ahol felhasználjuk, hogy $f(a, z) = f(a|z)f(z)$. A továbbiakban (40) minimumát Bayes költségnek nevezzük:

$$R_B = \min_{\hat{a}} R(\hat{a}, a) = \min_{\hat{a}} E\{C(\hat{a}, a)\}. \quad (41)$$

Itt $C(\hat{a}, a)$ az ún. kritériumfüggvény, vagy hibafüggvény, vagy illesztési függvény. Ennek széles körben használt változatait a **15. ábra** mutatja be.

I. Négyzetes kritérium (vektor paraméter megengedett):

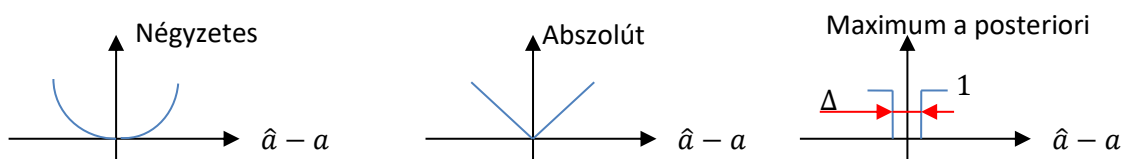
$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m (\hat{a}_i - a_i)^2 = (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a) \quad (42)$$

II. Abszolút kritérium (vektor paraméter megengedett):

$$C(\hat{a}, a) = \sum_{i=1}^m |\hat{a}_i - a_i| \quad (43)$$

III. Maximum a posteriori kritérium (vektor paraméter megengedett):

$$C(\hat{a}, a) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases} \quad |\hat{a}_i - a_i| \leq \frac{\Delta}{2} \quad \forall i - re \quad (44)$$



15. ábra. Gyakran használt kritériumfüggvények

3.1.1. Minimális átlagos négyzetes hibájú becslés

$$\begin{aligned} R(\hat{a}, a) &= E\{(\hat{a} - a)^T(\hat{a} - a)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a) f(a|z) da \right] f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(\hat{a}) f(z) dz \end{aligned} \quad (45)$$

Itt $g(\hat{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a) f(a|z) da$, és csak ez függ \hat{a} -tól, ezért elég ennek a minimumát keresni:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a) f(a|z) da \Big|_{\hat{a} = \hat{a}_{MS}} = 0 \quad (46)$$

Mivel $\frac{\partial}{\partial \hat{a}} (\hat{a} - a)^T (\hat{a} - a) = 2(\hat{a} - a)$, továbbá a (46) kifejezésben \hat{a} az integráljel elé kiemelhető, valamint a sűrűségfüggvény integrálja 1, ezért

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z) da, \quad (47)$$

azaz ezzel a kritériumfüggvénnyel a legjobb becslés az a posteriori várható érték. Vektor paraméterre általánosítható.

3.1.2. Minimális átlagos abszolút hibájú becslés

Skalár esetre bemutatva:

$$\begin{aligned} R(\hat{a}, a) &= E\{|\hat{a} - a|\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\hat{a}} (\hat{a} - a) f(a|z) da - \int_{\hat{a}}^{\infty} (\hat{a} - a) f(a|z) da \right] f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(\hat{a}) f(z) dz \end{aligned} \quad (48)$$

Itt is elég $g(\hat{a})$ minimumát megkeresni:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}} \left[\int_{-\infty}^{\hat{a}} (\hat{a} - a) f(a|z) da - \int_{\hat{a}}^{\infty} (\hat{a} - a) f(a|z) da \right] \Big|_{\hat{a} = \hat{a}_{ABS}} = 0. \quad (49)$$

Ebből

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}_{ABS}} f(a|z) da = \int_{\hat{a}_{ABS}}^{\infty} f(a|z) da, \quad (50)$$

vagyis

$$\hat{a}_{ABS} = f(a|z) \quad \text{mediánja.} \quad (51)$$

Vektor paraméterre általánosítható.

3.1.3. Maximum a posteriori (MAP) becslés

$$g(\hat{a}) = \int_{-\infty}^{\hat{a}-\frac{\Delta}{2}} f(a|z) da + \int_{\hat{a}+\frac{\Delta}{2}}^{\infty} f(a|z) da = 1 - \int_{\hat{a}-\frac{\Delta}{2}}^{\hat{a}+\frac{\Delta}{2}} f(a|z) da. \quad (52)$$

Ha Δ kicsi, de $\Delta \neq 0$, akkor az optimum az a posteriori sűrűségfüggvény maximumhelye, mivel az (52) összefüggés ekkor veszi fel a legkisebb értékét.

$$\hat{a}_{MAP} = f(a|z) \text{ maximumhelye.} \quad (53)$$

Megjegyzések:

1. A Bayes becslések mindig az a posteriori sűrűségfüggvények alapján történnek.
2. Vektor paraméterre általánosíthatók.
3. Az MS becslés lineáris abban az alábbi értelemben:

Ha $b = Aa + c$, akkor $\hat{b}_{MS} = A\hat{a}_{MS} + c$, továbbá $E\{a + b|z\} = E\{a|z\} + E\{b|z\} = \hat{a}_{MS} + \hat{b}_{MS}$.

3.1.4. Bayes becslő Gauss eloszlások esetén

Tegyük fel, hogy a keresett a paraméter és a megfigyelési zaj Gauss eloszlásúak. Mostantól a jelölések formái megjelenésével ismét hangsúlyozzuk, hogy a paraméter lehet vektor, és a kiértékeléseknél több megfigyelést veszünk egyidejűleg figyelembe. Adott $E\{\mathbf{a}\} = \boldsymbol{\mu}_a$, $cov\{\mathbf{a}, \mathbf{a}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{aa}$, $E\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}$, $cov\{\mathbf{n}, \mathbf{n}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}$. Ha "minden" Gauss eloszlású, akkor az a posteriori sűrűségfüggvény momentumai explicit formában megadhatók. Tegyük fel, hogy az additív zajjal terhelt megfigyelés az alábbi összefüggéssel írható le:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{n}, \quad (54)$$

ahol $\dim \mathbf{a} = p$, $\dim \mathbf{z} = q$, $\dim \mathbf{U} = q * p$. Az \mathbf{U} az ún. megfigyelési mátrix. Az explicit forma az a posteriori várható értékre:

$$\hat{\mathbf{a}}_{MS} = \boldsymbol{\mu}_{a|z} = \underbrace{\boldsymbol{\mu}_a}_{\text{apriori ismeret}} + \underbrace{[\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}_a)}_{\text{korrekció } \mathbf{z} - \mathbf{U}\boldsymbol{\mu}_a \text{ függvényében}} \quad (55)$$

Megjegyzés:

$\hat{\mathbf{a}}_{MS} = \hat{\mathbf{a}}_{ABS} = \hat{\mathbf{a}}_{MAP}$, mert az a Gauss a posteriori sűrűségfüggvény szimmetrikus.

1. Példa: Mérendő egy ellenállás értékét úgy, hogy ismert áram által ejtett feszültséget mérünk. N megfigyelést végzünk. " $U = IR + n$ ". A megfigyelt értékek: $z_k = a + n_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, a az ismeretlen paraméter (ellenállás), n_k az additív zaj mintája. Tegyük fel, hogy az ellenállás (a gyártási sorozat egy eleme), és a megfigyelési zaj egyaránt Gauss eloszlású valószínűségi változóknak tekinthetők. A zaj megfigyelési értékei korrelálatlanok. Tegyük fel, hogy ismert μ_a és σ_a^2 , a zaj várható értéke $\mu_n = 0$, $cov\{n_k, n_j\} = \sigma_n^2 \delta_{kj}$, ahol $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = j \\ 0 & \text{ha } k \neq j \end{cases}$. Vektoros alakban: $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{n}$, $\mathbf{z}^T = [z_0, z_2, \dots, z_{N-1}]$, $\mathbf{n}^T = [n_0, n_2, \dots, n_{N-1}]$, $\mathbf{U} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$, $\boldsymbol{\Sigma}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} \hat{a}_{MS} = \mu_{a|z} &= \mu_a + \left[\frac{N}{\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \right]^{-1} \left(\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - \frac{N}{\sigma_n^2} \mu_a \right) = \\ &= \mu_a + \frac{N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - \mu_a \right) = \frac{\mu_a + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}} \end{aligned} \quad (56)$$

Megjegyzések:

1. Az (55) kifejezés alapján a becslés úgy interpretálható, mint egy predikciós-korrekciós formula, amelynek első tagja az a priori ismeret alapján egy jóslás: mekkora lehet a paraméter az előzetes ismeretek alapján, amit a többletinformáció (mérési eredmények) birtokában egy korrekciós tag egészít ki. Ez utóbbi a mért értékek átlaga és a paraméter várható értéke különbségével arányos. Az arányossági tényező $N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}$ értékének függvényében nulla és egy közötti érték. Ha $\sigma_a \ll \sigma_n$, akkor $\hat{a}_{MS} \cong \mu_a$, ha $\sigma_a \gg \sigma_n$ vagy $N \rightarrow \infty$, akkor $\hat{a}_{MS} \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k$.

2. A becslési hiba varianciája: az *a posteriori* kovariancia:

$$\text{cov}\{a, a|\mathbf{z}\} = \Sigma_{aa|\mathbf{z}} = [\mathbf{U}^T \Sigma_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1} = \text{var}\{\tilde{a}\} = \frac{\sigma_a^2}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}}, \quad (57)$$

ahol $\tilde{a} = \hat{a} - a$. Az $N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}$ értékének függvényében σ_a^2 és $\frac{1}{N} \sigma_n^2$ közötti érték. Ha $\sigma_a \ll \sigma_n$, akkor $\text{var}\{\tilde{a}\} \cong \sigma_a^2$, ha $\sigma_a \gg \sigma_n$ vagy $N \rightarrow \infty$, akkor $\text{var}\{\tilde{a}\} \cong \frac{1}{N} \sigma_n^2$.

3. A becslés feltételesen torzított:

$$b(a) = E\{\hat{a}_{MS}|a\} - a = E\left\{ \frac{\mu_a + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}} \right\} - a = \frac{\mu_a - a}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}}. \quad (58)$$

2. Példa: Mérendő egy ismert jel ismeretlen amplitúdója. $z_k = as_k + n_k$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$.
 1. Az ismeretlen a amplitúdó és n_k Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és varianciával. $E\{a\} = \mu_a$, $\text{var}\{a\} = \sigma_a^2$, $E\{n_k\} = 0$, $\text{cov}\{n_i, n_j\} = \sigma_n^2 \delta_{ij}$, $\text{cov}\{a, n_i\} = 0 \quad \forall i$ -re, $\forall j$ -re.

Most használjuk a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját!

$$\left. \frac{\partial f(a|\mathbf{z})}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0, \text{ illetve (38) felhasználásával}$$

$$\left. \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0. \quad (59)$$

Most $f(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} e^{-\frac{(a-\mu_a)^2}{2\sigma_a^2}}$, $f(\mathbf{z}|a) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - as_k)^2}$, amiből az (59)

összefüggés felhasználásával

$$\frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} = -\frac{a - \mu_a}{\sigma_a^2}, \quad \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} s_k (z_k - as_k). \quad (60)$$

A két egyenletet egymással összeadva, és behelyettesítve az (59) összefüggésbe:

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} s_k (z_k - as_k) - \frac{a - \mu_a}{\sigma_a^2} \Big|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0 \quad (61)$$

amiből

$$\hat{a}_{MAP} = \frac{\mu_a + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} s_k z_k}{1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} s_k^2} \quad (62)$$

Megjegyzések:

1. A MAP becslés alkalmazásával megspóroltuk az (55) mátrix-összefüggés használatát a becslő értékének meghatározásakor.

2. A becslési hiba varianciája:

$$\text{var}\{\tilde{a}\} = \frac{\sigma_a^2}{1 + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} s_k^2} \quad (63)$$

3. Ha $s_k=1, \forall k$, akkor megkapjuk az előző példa eredményét.

4. Itt is azonosítható a döntélméleti rész 2. feladatában említett „illesztett” szűrő.

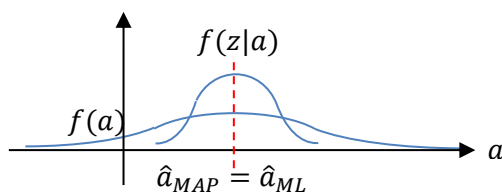
5. Természetesen $\hat{a}_{MAP} = \hat{a}_{MS}$.

3.2. Maximum Likelihood (ML) becslő

Ennél a becslőnél az a kiindulásunk, hogy nem ismerjük a mérendő mennyiség a priori valószínűségi sűrűség függvényét. Ilyenkor azt feltételezzük, hogy ez a függvény „szélesen elterülő”, és ebből adódóan az a *posteriori* sűrűségfüggvény megegyezik a csatorna-karakterisztikával. Az optimális becslőt a csatorna-karakterisztika maximumához rendeljük:

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{z}|\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = \mathbf{0}, \text{ ill. } \left. \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = \mathbf{0} \quad (64)$$

Megjegyzés: A 16. ábrán látható viszonyokat a (38) összefüggés „szemszögéből” célszerű elemezni: az a *posteriori* sűrűségfüggvényt megadó összefüggés számlálója az ábrán látható két függvény szorzata. A szorzat maximumhelye láthatóan a (64) összefüggésből kiindulva számítható.



16. ábra. Maximumhelyek egybeesése

3.2.1. Gauss-Markov (GM) becslő

A maximum likelihood becslő speciális esete, amikor a megfigyelési zaj Gauss eloszlású, a megfigyelési egyenlet pedig lineáris. N dimenziós megfigyeléseket végzünk, \mathbf{n} az N dimenziós zaj-vektor:

$$E\{\mathbf{n}\} = \mathbf{0}, \quad \text{cov}\{\mathbf{n}, \mathbf{n}\} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}, \quad f(\mathbf{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{nn}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{n}} \quad (65)$$

ahol $|\boldsymbol{\Sigma}_{nn}|$ a $\boldsymbol{\Sigma}_{nn}$ mátrix determinánsát jelöli.

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

A megfigyelési egyenlet: $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{n}$, amellyel a csatorna karakterisztika

$$f(\mathbf{z}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{nn}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\mathbf{U}\mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{U}\mathbf{a})}, \quad (66)$$

melynek szélsőérték helye a

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})] \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{GM}} = \mathbf{0} \quad (67)$$

összefüggés alapján határozható meg. (67) alapján: $\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U}\mathbf{a} - \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{0}$, amiből

$$\hat{\mathbf{a}}_{GM} = [\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{z}, \quad (68)$$

ha $[\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$ létezik.

Megjegyzések:

- (1) A (68) összefüggés a Bayes esetből (lásd (55)) $\boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1} = \mathbf{0}$ (a „szórás végtelen”) helyettesítéssel származtatható.
- (2) A Gauss-Markov becslő torzítatlan.

Példa: A $z_k = a + n_k$, $k=0,1,\dots, N-1$, független megfigyelések. $E\{n_k\} = 0$; $cov\{n_k, n_j\} = \sigma_n^2 \delta_{kj}$. A csatorna karakterisztika:

$$f(\mathbf{z}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - a)^2}, \quad (69)$$

amelynek maximumhelyénél kapjuk az a paraméter Gauss-Markov becslőjét:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|\mathbf{a})}{\partial a} \Big|_{\hat{a}=\hat{a}_{ML}=\hat{a}_{GM}} = \frac{N}{\sigma_n^2} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - a \right] = 0, \quad (70)$$

ahonnan

$$\hat{a}_{ML} = \hat{a}_{GM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k, \quad (71)$$

azaz lineáris megfigyelési egyenlet és Gauss eloszlású csatorna zaj esetén a legjobb (Gauss-Markov) becslő az egyszerű átlagolás.

3.3. Becslők determinisztikus modellel jellemzett paraméterek esetén

A továbbiakban a mérendő paramétert determinisztikus mennyiségnek tételezzük fel. A becslési probléma a következő: adott $\mathbf{z} = \{z_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, azaz N mért érték, amelyek az ismeretlen \mathbf{a} paraméter függvényei. Határozzuk meg az \mathbf{a} becslőjét $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$, ahol \mathbf{g} egy függvény. Az első lépés a „csatorna-karakterisztika” meghatározása, azaz a megfigyelt adatok valószínűség sűrűségfüggvényének megtalálása az \mathbf{a} paraméter függvényében, amit $f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ jelöl. Mivel a csatornát valószínűségi modellel írjuk le, ezért a csatorna kimenete, és az abból származtatott mennyiségek, ennél fogva maga a becslés is, valószínűségi változók lesznek.

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése egyetlen mért adatra alapozva: $z_0 = a + w_0$, ahol a w_0 valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Ebben az esetben a „csatorna-karakterisztika”, azaz a z_0 sűrűségfüggvénye:

$$f(z_0; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z_0 - a)^2\right] \quad (72)$$

Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt lineáris sorozat mérése mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + Bk + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Legyen $\mathbf{a} = [A \ B]$, $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]$. Ebben az esetben a „csatorna-karakterisztika”, azaz \mathbf{z} sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathbf{z}; \mathbf{a}) = \prod_{k=0}^{N-1} f(z_k; \mathbf{a}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A - Bk)^2\right] \quad (73)$$

3.3.1. Becslések minősítése

Tekintsünk egy A szintű DC mérést korrelálatlan zajban:

$$z_k = A + w_k, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (74)$$

Tekintsük a következő becslőket: $\hat{A}_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k$, $\hat{A}_2 = z_0$. Tegyük fel, hogy $A = 1$, $\hat{A}_1 = 0.95$, $\hat{A}_2 = 0.98$. Melyik becslés jobb? Mivel a becslő valószínűségi változó, ezért viselkedése/minősítése a valószínűség sűrűségfüggvényével adható meg, ill. statisztikai eszközökkel, például Monte-Carlo szimulációval.

Torzítatlan becslő: Az a becslő, amelyik várható értékben a helyes értéket adja: $E(a - \hat{a}) = 0$, ami a paraméter egy értéktartományára teljesül ($\alpha_1 < a < \alpha_2$). Határozzuk meg a két becslő, \hat{A}_1 és \hat{A}_2 várható értékét:

$$E(\hat{A}_1) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E(z_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E(A + w_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (A + 0) = A \quad (75)$$

$$E(\hat{A}_2) = E(z_0) = E(A + w_0) = A + 0 = A$$

Mindkét becslő torzítatlan. Melyik jobb? Ehhez számítsuk ki a becslők varianciáját!

$$\text{var}(\hat{A}_1) = \text{var}\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \text{var}(z_k) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (76)$$

$$\text{var}(\hat{A}_2) = \text{var}(z_0) = \sigma^2 > \text{var}(\hat{A}_1)$$

Megjegyzés: Ha több torzítatlan becslőnk van ugyanarra a paraméterre vonatkozóan, és ezek egymástól független adathalmazokból származnak, például $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{N-1}$, akkor jobb becslő nyerhető ezek átlagolásával:

$$\hat{a} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k \Rightarrow E(\hat{a}) = a \quad (77)$$

Ha a becslőknek azonos a varianciája, akkor:

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

$$\text{var}(\hat{a}) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \text{var}(\hat{a}_k) = \frac{1}{N^2} N \text{var}(\hat{a}_k) = \frac{\text{var}(\hat{a}_k)}{N}. \quad (78)$$

N növelésével a variancia csökken, ha $N \rightarrow \infty$, $\hat{a} \rightarrow a$. Ha a becslés torzított, akkor ez nem áll elő, függetlenül attól, hogy hány becslőt átlagolunk.

3.3.2. A minimális variancia kritériuma

A becslés leglogikusabb kritériuma az átlagos négyzetes hiba (Mean Square Error, MSE/*mse*), azaz a becslő és a mérendő különbsége négyzetének várható értéke:

$$\text{mse}(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2] \quad (79)$$

Sajnos ez a megközelítés nem működőképes, mert a becslő függ az ismeretlen a paramétertől. Ami ehhez közel áll, az a becslő varianciája, amit bevezethetünk az *mse* kifejezésébe:

$$\text{mse}(\hat{a}) = E\{[\hat{a} - E[\hat{a}] + E[\hat{a}] - a]^2\} = E\{[\hat{a} - E[\hat{a}] + b(a)]^2\}. \quad (80)$$

Itt $b(a) = E[\hat{a}] - a$ a becslő torzítását² (bias) jelöli. Tovább alakítva:

$$\text{mse}(\hat{a}) = E\{[\hat{a} - E(\hat{a})]^2\} + 2b(a)E[\hat{a} - E(\hat{a})] + b^2(a) = \text{var}(\hat{a}) + b^2(a). \quad (81)$$

Ebből látható, hogy torzítatlan becslés esetén az *mse* minimalizálásával ekvivalens a becslő varianciájának minimalizálása.

3.3.3. Minimális varianciájú, torzítatlan becslők

A fentiek alapján kézenfekvő törekvés olyan eljárások kidolgozása, amelyek nem torzítanak, azaz $b(a) = 0$, továbbá varianciájuk a lehető legkisebb. Keressük tehát a minimális varianciájú, torzítatlan becslőket. (Minimum Variance Unbiased Estimator, MVU Estimator)

Általános esetben nem mondható el, hogy MVU becslő létezik. Lehet, hogy nincsen torzítatlan becslő vagy a torzítatlan becslők egyike sem (mindenütt) minimális varianciájú. Nem ismert olyan eljárás, amely mindig MVU becslőre vezet. Mit tehetünk?

1. Meghatározzuk az elvileg elérhető legkisebb varianciát megadó, ún. Cramer-Rao alsó korlátot (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB), és ellenőrizzük, hogy a becslőnk varianciája ennek megfelel-e.
2. Korlátozzuk magunkat lineáris torzítatlan becslőkre, mert ezek varianciája el tudja érni ezt az alsó korlátot.

² A torzítás (distortion) a mért jel alakjának vagy egyéb jellemzőjének nemkívánt változása. Additív zajt vagy egyéb külső jel hatását nem tekintjük torzításnak. Ha mért jel kifejezhető egy $y(t) = f(x(t))$ bemenet-kimenet relációval, és az $f(\cdot)$ függvény $f^{-1}(\cdot)$ inverze létezik, akkor akár a bemenetet, akár a kimenetet ezzel torzítva a torzítás megszüntethető/kompenzálható. Ha az inverz nem létezik, akkor a megszüntetés nem lehetséges. Ha bemenet-kimenet reláció approximálható például rendszeridentifikációs módszerrel, akkor a torzítás egy közelítő eliminálása/kompenzálása lehetséges.

A zavarás (disturbance) a mért jel alakjának vagy egyéb jellemzőjének nem kívánt perturbációja. Tipikusan az additív zajt és egyéb nem identifikált vagy nem identifikálható külső jelet tekintünk zavarásnak. A zavarás nem szüntethető meg/nem kompenzálható csak csökkenthető. (Identifikálható külső jel hatása persze kompenzálható, ilyen például az aktív zajcsökkentés.)

Azokat a módszereket, amelyek a elkerülhetetlen módon egyidejűleg jelenlevő torzítások és zavarások ellen azzal az igénnyel lépnek fel, hogy a mérőrendszer kimenetén a mérendő jel optimális rekonstrukcióját érik el, inverz algoritmusoknak nevezzük.

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete)

Bármely torzítatlan becslő esetében a becslés varianciájára alsó korlátot ad:

$$\text{var}(\hat{a}) \geq \text{CRLB}(a) \quad (82)$$

A CRLB a függvénye. Megmondja mi az elérhető legkisebb variancia. Ha egy becslővel elérjük ezt a varianciát, akkor a becslőt hatásosnak nevezzük. Maga a CRLB elvezethet az MVU becslőhöz. A CRLB-re vonatkozó állítás:

Tételezzük fel, hogy a mérési adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül minden a esetében:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = 0 \quad (83)$$

Ez az ún. regularitási feltétel, amihez az integrálás és a deriválás felcserélhetősége kötődik. Képezve ugyanis a várható értéket, majd az integrálást és a deriválást felcserélve:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} f(z; a) dz = \frac{\partial}{\partial a} 1 = 0 \quad (84)$$

Ha tehát (83) fennáll, akkor bármely torzítatlan becslőre igaz (bizonyítás később), hogy:

$$\text{var}(\hat{a}) \geq \left[-E \left(\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} \right) \right]^{-1} \quad (85)$$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a) \quad (86)$$

struktúrájú, ahol $g(z)$ és $I(a)$ alkalmas függvények. Ilyenkor a becslő $\hat{a} = g(z)$, és a variancia minimum $\frac{1}{I(a)}$.

1. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése egyetlen mért adatra alapozva: $z_0 = A + w_0$, ahol a w_0 valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$f(z_0; A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (z_0 - A)^2 \right] \quad (87)$$

$$\ln f(z_0; A) = -\ln \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} (z_0 - A)^2 \quad (88)$$

Ezekre alapozva:

$$\frac{\partial \ln f(z_0; A)}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2} [z_0 - A] \Rightarrow -\frac{\partial^2 \ln f(z_0; A)}{\partial A^2} = \frac{1}{\sigma^2} \quad (89)$$

Mindezek alapján:

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

$$\text{var}(\hat{A}) \geq \sigma^2, \quad I(A) = \frac{1}{\sigma^2}, \quad \hat{A} = g(z_0) = z_0. \quad (90)$$

(90) alapján látható, hogy az MVU becslő maga az egyetlen mérés, a becslés varianciája pedig a mérőcsatornában fellépő additív zaj varianciájával egyezik. Varianciát csökkenteni a mérések számának növelésével tudunk. A következő példában N mérést végzünk.

2. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűsűrsűrűség függvénye $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$f(z; A) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^N} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A)^2 \right] \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(z; A)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \left[-\ln \left[(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}} \right] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A) = \frac{N}{\sigma^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - A \right) \end{aligned} \quad (92)$$

Mindezek alapján:

$$\text{var}(\hat{A}) \geq \frac{\sigma^2}{N}, \quad I(A) = \frac{N}{\sigma^2}, \quad \hat{A} = g(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \quad (93)$$

(93) alapján látható, hogy az MVU becslő a mért értékek átlaga, a becslés varianciája pedig a mérőcsatornában fellépő additív zaj varianciájának N -ed része.

3. Példa: Ismeretlen variancia varianciájának alsó korlátja:

$z_k = A + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$; $\{w_k\}$ Gauss eloszlású, fehér zaj, ismeretlen σ^2 varianciával.

$$\ln f(z; \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A)^2 \quad (94)$$

Elvégezve a deriválásokat σ^2 szerint:

$$I(\sigma^2) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2} \right] = -E \left[\frac{N}{2\sigma^4} - \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A)^2}{\sigma^6} \right] = -\frac{N}{2\sigma^4} + \frac{N\sigma^2}{\sigma^6} = \frac{N}{2\sigma^4} \quad (95)$$

Ezzel a variancia becslő varianciájának alsó korlátja:

$$\text{var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{N} \quad (96)$$

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni, hogy adható-e MVU becslő a varianciára. Ennek feltétele, hogy (94) első deriváltja felírható legyen a (86) összefüggés szerinti alakban.

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

4. Példa: Ismeretlen a jelparaméter varianciájának alsó korlátja. A megfigyelt értékek egy a -tól függő jel zajos mintái:

$x_k = s(k; a) + w_k = s_k(a) + w_k, k = 0, 1, \dots, N-1; \{w_k\}$ Gauss eloszlású, fehér zaj ismert σ_w^2 varianciával.

$$f(z; a) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - s_k(a))^2} \quad (97)$$

Az első derivált:

$$\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - s_k(a)) \frac{\partial s_k(a)}{\partial a} \quad (98)$$

A második derivált:

$$\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[(x_k - s_k(a)) \frac{\partial^2 s_k(a)}{\partial a^2} - \left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a} \right]^2 \right] \quad (99)$$

Képezve a várható értéket:

$$I(a) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a} \right]^2 \quad (100)$$

Ezzel a becslt paraméter varianciájának alsó korlátja:

$$\text{var}(\hat{a}) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a} \right]^2} \quad (101)$$

5. Példa: Függvénykapcsolattal származtatott $\alpha = g(a)$ paraméter varianciájának alsó korlátja:

Mivel torzítatlan becslőben gondolkodunk: $E(\hat{\alpha}) = \alpha = g(a) = \int \hat{\alpha} f(z; a) dz$. A regularitási feltétel következtében:

$$\int \hat{\alpha} \frac{\partial f(z; a)}{\partial a} dz = \int \hat{\alpha} \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = \frac{\partial g(a)}{\partial a} \quad (102)$$

Ugyancsak a regularitási feltétel miatt:

$$\int (\hat{\alpha} - \alpha) \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = \frac{\partial g(a)}{\partial a}, \quad (103)$$

mert

$$\int \alpha \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = \alpha E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = 0. \quad (104)$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség használatával:

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

$$\left[\int w(z)u(z)h(z)dz \right]^2 \leq \int w(z)u^2(z)dz \int w(z)h^2(z) dz, \quad (105)$$

ahol most

$$w(z) = f(z; a); \quad u(z) = \hat{\alpha} - \alpha; \quad h(z) = \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a}. \quad (106)$$

A (103) összefüggést összevetve a (106) helyettesítésekkel, (105) felhasználásával:

$$\left[\frac{\partial g(a)}{\partial a} \right]^2 \leq \int (\hat{\alpha} - \alpha)^2 f(z; a) dz \int \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right]^2 f(z; a) dz, \quad (107)$$

amiből:

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \frac{\left[\frac{\partial g(a)}{\partial a} \right]^2}{E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right]^2 \right\}}, \quad (108)$$

ahol:

$$E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right]^2 \right\} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} \right]. \quad (109)$$

A (109) összefüggés helyességének bizonyítása a regularitási feltételből kiindulva:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = \int \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = 0, \quad (110)$$

majd képezve ennek az a paraméter szerinti deriváltját:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz &= \int \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} f(z; a) + \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \frac{\partial f(z; a)}{\partial a} \right] dz = \\ &= \int \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} f(z; a) + \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right]^2 f(z; a) \right] dz = 0, \end{aligned} \quad (111)$$

amiből (109) következik.

6. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint (A) teljesítményének (A^2) „mérése” a DC szint mérésére alapozva. A teljesítménymérés varianciájának alsó korlátja N minta figyelembevételével (lásd (93)):

$$\text{var}(\hat{\alpha}) = \text{var}(\widehat{A^2}) \geq \frac{\left[\frac{\partial g(a)}{\partial a} \right]^2}{E \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right]^2 \right\}} = \frac{(2A)^2}{\frac{N}{\sigma^2}} = \frac{4A^2 \sigma^2}{N}, \quad (112)$$

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

Míg a DC szint hatásos becslője a minták egyszerű átlaga (lásd (93)), vajon A^2 hatásos becslője-e \hat{A}^2 ? A válasz nemleges. Ráadásul egy ilyen becslő nem is torzítatlan, ugyanis mivel $\hat{A} \sim \mathcal{N}(A, \sigma^2/N)$ ³, a $var(\hat{A})$ kifejezéséből kiindulva: $E\{\hat{A}^2\} = E^2(\hat{A}) + var(\hat{A}) = A^2 + \frac{\sigma^2}{N} \neq A^2$.

Vizsgáljuk meg \hat{A}^2 varianciáját! Mivel $var(\hat{A}^2) = E(\hat{A}^4) - E^2(\hat{A}^2)$, és a Gauss eloszlású valószínűségi változók momentumai explicit formában ismertek:

$$E(\hat{A}^4) = A^4 + 6A^2 \frac{\sigma^2}{N} + 3 \left(\frac{\sigma^2}{N} \right)^2, \quad (113)$$

ezért

$$\begin{aligned} var(\hat{A}^2) &= E(\hat{A}^4) - E^2(\hat{A}^2) = A^4 + 6A^2 \frac{\sigma^2}{N} + 3 \left(\frac{\sigma^2}{N} \right)^2 - \left(A^2 + \frac{\sigma^2}{N} \right)^2 = \\ &= \frac{4A^2\sigma^2}{N} + \frac{2\sigma^4}{N^2} > CRLB \end{aligned} \quad (114)$$

(114) alapján látható, hogy a javasolt becslő nem lesz hatásos, legfeljebb aszimptotikusan hatásos, amit $N \rightarrow \infty$ esetén valósítunk meg. Ezzel egyidejűleg a javasolt becslő aszimptotikusan torzítatlan lesz.

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, vektor-paraméter esete)

Tételezzük fel, hogy a mérési (vektor)adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül a regularitási feltétel minden \mathbf{a} esetében:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right] = \mathbf{0}. \quad (115)$$

Ekkor bármely torzítatlan becslőre igaz, hogy a becslő kovariancia mátrixának és az ún. Fisher információs mátrix inverzének a különbsége pozitív szemidefinit:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} - \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a}) \geq \mathbf{0} \quad (116)$$

A Fisher információs mátrix elemei:

$$\mathbf{I}_{ij}(\mathbf{a}) = -E \left(\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} \right) \quad (117)$$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{I}(\mathbf{a})(\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mathbf{a}) \quad (118)$$

struktúrájú. Ilyenkor a becslő $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(\mathbf{z})$, és a kovariancia minimum $\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a})$.

³Egy Gauss eloszlású valószínűségi változó $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ momentumai explicit formában megadhatók: $E(a) = \mu$, $E(a^2) = \mu^2 + \sigma^2$, $E(a^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$, $E(a^4) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$, ...

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

7. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint és szórásának mérése mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűségi sűrűség függvénye: $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Most $\mathbf{a} = [A \ \sigma^2]^T$. A sűrűség függvény logaritmus:

$$\ln f(z; \mathbf{a}) = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - A)^2. \quad (119)$$

Ebből a Fisher információs mátrix:

$$\mathbf{I}(\mathbf{a}) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial A^2} & \frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial A \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial A \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial (\sigma^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{N}{2\sigma^4} \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Ez a mátrix diagonális, így könnyen invertálható, amiből:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{A}) & 0 \\ 0 & \text{var}(\hat{\sigma}^2) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix}, \quad (121)$$

8. Példa: Ha $\alpha = g(\mathbf{a})$ a becslendő mennyiség, és az $\hat{\mathbf{a}}$ kovarianciája $\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a})$, akkor

$$\mathbf{C}_{\hat{\alpha}} \geq \left(\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right) \left[-E \left[\frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}^2} \right] \right]^{-1} \left(\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right)^T, \quad (122)$$

ahol a függvénykapcsolat paraméter szerinti deriváltját sorvektorként értelmezzük. Ha például az előző példához kapcsolódóan az $\alpha = g(\mathbf{a}) = A^2/\sigma^2$ jel/zaj viszony becslése varianciájának alsó határát keressük, akkor

$$\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial A} & \frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} & -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix}, \quad (123)$$

amit a (122) összefüggésbe helyettesítve, (120) és (121) felhasználásával

$$\text{var}(\hat{\alpha}) \geq \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} & -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} \\ -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix} = \frac{4A^2}{N\sigma^2} + \frac{2A^4}{N\sigma^4} = \frac{4\alpha + 2\alpha^2}{N}. \quad (124)$$

Megjegyzés: Az előzőekben bemutatott példák közös jellemzője, hogy determinisztikus paraméter, és ismert valószínűségi sűrűség függvényű csatorna-karakterisztika feltételezésével a becslés varianciájának elvi minimumát kapjuk meg. Azt, hogy ezt milyen mérési eljárás alkalmazása esetén érjük el, ill. létezik-e, ismert-e ilyen eljárás, az sok esetben nyitott kérdés.

A továbbiakban korlátozzuk magunkat arra az esetre, amikor a megfigyelési modell lineáris. Látni fogjuk, hogy ilyenkor hatásos becslőkhöz jutunk, azaz minden esetben elérjük a becslés varianciájára meghatározható alsó korlátot (CRLB).

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt lineáris modellek esete:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (125)$$

ahol

- \mathbf{z} $N * 1$ dimenziós megfigyelési vektor
- \mathbf{U} $N * M$ dimenziós, ismert megfigyelési mátrix
- \mathbf{a} $M * 1$ dimenziós, becsülendő paramétervektor
- \mathbf{w} $N * 1$ dimenziós zaj vektor, amelynek valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$.

A (125) összefüggés interpretálható úgy, hogy a megfigyelési vektor minden eleme az ismeretlen paraméterek lineáris kombinációjaként áll elő, amit additív zaj terhel. Ahhoz, hogy M paramétert becsülni tudjunk legalább ugyanennyi megfigyelést/mérést kell elvégeznünk, azaz $N \geq M$, ráadásul a zaj hatásának csökkentése érdekében tipikusan $N > M$ vagy $N \gg M$.

Ebben az esetben a CRLB és az ezt a korlátot elérő MVU becslő kiszámítható:

1. lépés: $\ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ számítása;
2. lépés: Az $\mathbf{I}(\mathbf{a}) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}^2} \right]$ Fisher információs mátrix és annak ismeretében az $\hat{\mathbf{a}}$ kovariancia mátrixának kiszámítása: $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a})$.
3. lépés: A $g(\mathbf{z})$ MVU becslő meghatározása a következő szorzat alakból:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{I}(\mathbf{a})[g(\mathbf{z}) - \mathbf{a}]. \quad (126)$$

Ezek a lépések a fenti modell esetében:

1. lépés:

$$\ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a}) = -\ln \left(\sqrt{2\pi\sigma^2} \right)^N - \frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \quad (127)$$

2. lépés:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} [\mathbf{z}^T \mathbf{z} - 2\mathbf{z}^T \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{a}] = \frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{U}^T \mathbf{z} - \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{a}] \quad (128)$$

Amiből a Fisher információs mátrix:

$$\mathbf{I}(\mathbf{a}) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}^2} \right] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a}) = \sigma^2 [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \quad (129)$$

3. lépés: A $g(\mathbf{z})$ MVU becslő meghatározása a következő szorzat alakból:

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{I}(\mathbf{a})[g(\mathbf{z}) - \mathbf{a}] = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{U}}{\sigma^2} [(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} - \mathbf{a}]. \quad (130)$$

Ezzel a becslés eredménye (maga a becslő és kovarianciája):

$$\hat{\mathbf{a}} = g(\mathbf{z}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a}) = \sigma^2 (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}. \quad (131)$$

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

Vagyis additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt lineáris modellek esetében:

- Az MVU becslő: $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}$. A becslő hatásos és eléri a CLRB korlátot;
- A becslő torzítatlan, mert: $E(\hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T E(\mathbf{U} \mathbf{a} + \mathbf{w}) = \mathbf{a}$;
- A becslő statisztikai viselkedése teljes mértékben specifikált, mert $\hat{\mathbf{a}}$ a Gauss eloszlású \mathbf{z} vektornak lineáris transzformáltja:

$$\hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}). \quad (132)$$

Az alábbiakban ezen modelleszalád szerinti becsléseket illusztráló példák következnek. A becslőt és kovariancia mátrixát a (131) összefüggés segítségével számíthatjuk ki.

1. Példa: Legyen az illesztendő modell a diszkrét n időindex polinomja:

$$x_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots + a_p n^p + w_n \quad (133)$$

ahol w_n az additív megfigyelési zaj n -edik időpillanatbeli értéke. Mátrixos alakban:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & N-1 & (N-1)^2 & \dots & (N-1)^{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{a} + \mathbf{w}, \quad (134)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \quad \hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1})$$

2. Példa: Legyen az illesztendő modell az időben diszkrét Fourier sorfejtés:

$$x_n = \sum_{k=1}^M a_k \cos \frac{2\pi k n}{N} + \sum_{k=1}^M b_k \sin \frac{2\pi k n}{N} + w_n \quad (135)$$

Megjegyzés: most DC komponenst nem illesztünk. Mátrixos alakban:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \cos \frac{2\pi k}{N} & \dots & \dots & \sin \frac{2\pi k}{N} & \dots \\ \dots & \cos \frac{4\pi k}{N} & \dots & \dots & \sin \frac{4\pi k}{N} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \cos \frac{2\pi}{N} (N-1) & \dots & \dots & \sin \frac{2\pi}{N} (N-1) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (136)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \quad \hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1})$$

Mivel most $(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} = \frac{2}{N} \mathbf{I}$, ezért

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \frac{2\pi}{N} k n, \quad \hat{b}_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin \frac{2\pi}{N} k n. \quad (137)$$

Megjegyzés: A kovariancia mátrix, mivel a zaj Gauss eloszlású és fehér:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \sigma^2 [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} = \frac{2}{N} \sigma^2 \mathbf{I}$$

A becslők Gauss eloszlású valószínűségi változók, és miután a kovariancia mátrixuk diagonál mátrix, ezért egymástól függetlenek.

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

3. Példa: A mozgó átlagoló (FIR szűrő) arra az esetre, amikor a gerjesztés belépő függvény, tehát $x_n = 0$, ha $n < 0$:

$$y_n = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_{n-k} + w_k \quad (138)$$

Mátrixos alakban:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \cdots & x_{N-M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (139)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \quad \hat{\mathbf{a}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \sigma^2 (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1})$$

4. Példa: Mozgó-átlag (Moving Average: MA) paraméterek becslése: Az $\{y_n\}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, diszkrét értéksorozat („kimenőjel”) elemei egy csúszó ablakon keresztül látható $\{x_n\}$ diszkrét értékek („bemenőjel”) lineáris kombinációjaként állnak elő:

$$y_n = \sum_{k=0}^{M-1} a_k x_{n-k} + w_k \quad (140)$$

Keresettek az $\{a_k\}$ súlyozó együtthatók. Ebben a példában feltételezzük, hogy a bemenőjel nem belépő, ezért a csúszó ablakon keresztül „negatív indexű” minták is látszanak. A paraméterek hatásos becslését a $\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}$ összefüggés adja.

Érdeemes megvizsgálni, hogy mi az információtartalma az $[\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1}$ mátrixnak, illetve az $\mathbf{U}^T \mathbf{z}$ vektornak. Ehhez írjuk fel az $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ mátrixot diadikus szorzatok összegként:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1} \\ x_{-1} & x_0 & \cdots & x_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1-M} & x_{2-M} & \cdots & x_{N-M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{1-M} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{2-M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_{N-M} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T = \quad (141)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_n^2 & x_n x_{n-1} & \cdots & x_n x_{n-M+1} \\ x_{n-1} x_n & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1} x_{n-M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-M+1} x_n & x_{n-M+1} x_{n-1} & \cdots & x_{n-M+1}^2 \end{bmatrix}$$

A (141) összefüggésben $\mathbf{X}_n^T = [x_n \quad x_{n-1} \quad \cdots \quad x_{n-M+1}]$

Figyeljük meg, hogy (141) egy olyan mátrix, amelynek elemei (alkalmas normálással kiegészítve) az $\{x_n\}$ diszkrét értéksorozat autokorreláció értékeit becsülik:

$$\hat{R}_{xx}(k-p) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-k} x_{n-p}, \quad k, p = 0, 1, \dots, M-1. \quad (142)$$

Hasonlóképpen felírva az $\mathbf{U}^T \mathbf{z}$ vektort:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{z} = \sum_{n=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_n z_n \\ x_{n-1} z_n \\ \vdots \\ x_{n-M+1} z_n \end{bmatrix} \quad (143)$$

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

(143) egy olyan vektor, amelynek elemei (alkalmas normálással kiegészítve) az $\{x_n\}$ és $\{z_n\}$ diszkrét értéksorozatok keresztkorreláció értékeit becsülik:

$$\hat{R}_{xz}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_{n-k} z_n, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (144)$$

Jelölje $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ a (142) összefüggés szerinti elemekből álló mátrixot, $\hat{\mathbf{R}}_{xz}$ pedig a (144) összefüggés szerinti elemekből álló vektort:

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{xz} \quad (145)$$

Megjegyzések:

1. A (145) összefüggés természetesen mindössze egy formális átírás a példa szerinti viszonyok esetére, de a későbbiekben látni fogjuk ennek létjogosultságát.
2. Valós idejű kiértékelés igénye esetén a (138) és (140) összefüggések helyett az $y_n = \sum_{k=1}^M a_k x_{n-k}$ formát használjuk, mert a számítások elvégzéséhez egy ütemnyi idő mindenképpen szükséges.

5. Példa: Lineáris modell ismert s jelkomponens esetén: $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{s} + \mathbf{w}$. $\mathbf{z}' = \mathbf{z} - \mathbf{s}$ bevezetésével: $\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T (\mathbf{z} - \mathbf{s})$. Fehér zaj esetén: $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = \sigma^2 [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1}$.

Az alábbi modellben A egy ismeretlen konstans, r pedig egy ismert konstans:

$$x_n = A + r^n + w_n \quad (146)$$

Mátrixos formában:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ \vdots \\ r^{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (147)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x_n - r^n), \quad \text{var}\{\hat{A}\} = \frac{\sigma^2}{N},$$

ha a zaj Gauss, és fehér.

6. Példa: Lineáris modell színes Gauss zaj esetén:

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}), \quad (148)$$

azaz színes zaj esetén a zaj kovariancia mátrixa nem lesz diagonális mátrix. Az ún. fehérítési eljárást alkalmazzuk: mivel \mathbf{C} pozitív definit, ezért létezik olyan invertálható \mathbf{D} mátrix, amellyel:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}. \quad (149)$$

Ezzel a \mathbf{D} mátrixszal megszorozva a megfigyelési zaj vektorát:

$$E[(\mathbf{D}\mathbf{w})(\mathbf{D}\mathbf{w})^T] = E[\mathbf{D}\mathbf{w}\mathbf{w}^T \mathbf{D}^T] = \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{D}^T = \mathbf{I} \quad (150)$$

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

vagyis a zaj kifehéredik, és egységnyi varianciájú lesz. Ha megfigyelési egyenlet egészét transzformáljuk a \mathbf{D} mátrixszal, akkor:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{Dz} = \mathbf{DUa} + \mathbf{Dw} = \mathbf{U}'\mathbf{a} + \mathbf{w}', \quad \mathbf{w}' = \mathbf{Dw} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}). \quad (151)$$

Ezzel a problémát visszavezettük a fehér zaj esetére:

$$\hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{U}'^T \mathbf{U}']^{-1} \mathbf{U}'^T \mathbf{z}' = [\mathbf{U}^T \mathbf{D}^T \mathbf{DU}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{D}^T \mathbf{Dz} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}, \quad (152)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1}.$$

3.3.4. A legjobb lineáris torzítatlan becslő (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE):

- Az MVU becslő nem mindig létezik vagy lehetetlenség megtalálni.
- Az adatok valószínűség sűrűségfüggvénye nem ismert.

Az ebben a szakaszban bemutatott BLUE becslő egy szuboptimális becslő, amelyik:

- az adatok lineáris függvénye: $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{Hz}$;
- csak torzítatlan lehet: $E(\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{HE}(\mathbf{z}) = \mathbf{a}$;
- minimalizálja a becslő varianciáját;
- csak az adatok átlagára és varianciájára van szükség (a sűrűségfüggvényre nincsen), következésképpen a becslő sűrűségfüggvénye általában nem számítható ki.

A BLUE meghatározása (skalár esetben):

A z_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ adatokhoz az

$$\hat{a} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z_k = \mathbf{h}^T \mathbf{z} \quad (153)$$

lineáris becslőt rendeljük, ahol $\mathbf{h} = \{h_0, h_1, \dots, h_{N-1}\}^T$.

A becslőtől elvárjuk a torzítatlanságot:

$$E(\hat{a}) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k E(z_k) = a \quad (154)$$

Minimalizáljuk a varianciát:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{a}) &= E\{(\hat{a} - E(\hat{a}))^2\} = E\{(\mathbf{h}^T \mathbf{z} - \mathbf{h}^T E(\mathbf{z}))^2\} = \\ &= E\{\mathbf{h}^T [\mathbf{z} - E(\mathbf{z})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T \mathbf{h}\} = \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (155)$$

1. Példa: Ismert jel amplitúdójának detektálása zajban: $z_k = a s_k + w_k$.

A lineáris becslő: $\hat{a} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z_k = \mathbf{h}^T \mathbf{z}$. Ez torzítatlan: $E(\hat{a}) = \mathbf{h}^T E(\mathbf{z}) = \mathbf{h}^T \mathbf{s} a = a$, ahol ehhez $\mathbf{h}^T \mathbf{s} = 1$ kell legyen, és $\mathbf{s} = \{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}^T$. A minimalizálási feladat tehát:

$\mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h}$ minimalizálása $\mathbf{h}^T \mathbf{s} = 1$ feltétel betartása mellett. Ehhez a Lagrange multiplikátoros technikát használjuk. Keressük a következő kifejezés szélsőértékét:

$$J = \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{h} + \lambda(\mathbf{h}^T \mathbf{s} - 1) \quad (156)$$

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{C}\mathbf{h} + \lambda\mathbf{s} = \mathbf{0}, \text{ ebből } \mathbf{h} = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}, \text{ ezzel} \\ \mathbf{h}^T\mathbf{s} = 1 = -\frac{\lambda}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}, \quad -\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (157)$$

amit visszahelyettesítve \mathbf{h} kifejezésébe:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}, \quad (158)$$

és végül $\hat{a} = \mathbf{h}^T\mathbf{z}$ felhasználásával az optimális megoldás:

$$\hat{a} = \frac{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}, \quad \text{var}(\hat{a}) = \frac{1}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}} \quad (159)$$

A BLUE meghatározása (vektoros esetben):

$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}$, ahol w nulla várható értékű zaj, melynek kovariancia mátrixa \mathbf{C} , sűrűségfüggvénye tetszőleges, akkor az \mathbf{a} paraméter BLUE becslője és a becslés kovariancia mátrixa:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}, \quad \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1} \quad (160)$$

Megjegyzés: Ha a zaj Gauss eloszlású, akkor a BLUE egy MVU becslő.

2. Példa: DC szint zajban: $z_k = A + w_k$, ahol w_k sűrűségfüggvényét nem ismerjük, csak a varianciáját: $\text{var}(w_k) = \sigma_k^2$. $\mathbf{U} = [1, 1, \dots, 1]^T$, $\mathbf{a} = A$. A kovariancia mátrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{N-1}^2} \end{bmatrix} \quad (161)$$

Ezzel a BLUE becslő:

$$\hat{a} = (\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k}{\sigma_k^2} \quad (162)$$

és a minimális kovariancia:

$$\mathbf{C}_{\hat{a}} = (\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{-1} \quad (163)$$

3.3.5. Maximum Likelihood (ML) becslők

Mindenképpen problémát jelent, hogy MVU becslők esetlegesen léteznek vagy nem találhatók meg. A BLUE becslő lineáris modellekre szorítkozik. A Maximum Likelihood (ML) becslők determinisztikus modellel leírt paraméterek esetén is használhatók, és következő tulajdonságaik vannak:

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

- mindig használhatók, ha a valószínűségi sűrűség függvény (csatornakarakterisztika) ismert;
- nagy adatmérték esetén optimálisak (aszimptotikusan hatásosak, elérik a CRLB értéket);
- számítástechnikailag komplexek, numerikus módszerek használatát igénylik.

Likelihood függvény: az $f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ sűrűségfüggvény, ahol \mathbf{a} változó (nem paraméter)

Az ML becselő: \mathbf{a} azon értéke, amelyhez a likelihood függvény maximuma tartozik.

Eljárása: képezzük a $\ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ log-likelihood függvényt, és deriváljuk \mathbf{a} szerint, majd ezt nullával egyenlővé téve megoldjuk \mathbf{a} -ra. Eredményül az $\hat{\mathbf{a}}_{ML}$ becslőt kapjuk.

1. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése ismeretlen zaj variancia mellett: $z_n = A + w_n$. Tegyük fel, hogy $A > 0$ és $\sigma^2 = A$. A valószínűség sűrűségfüggvény: $f(z; A) = \frac{1}{(2\pi A)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2A} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A)^2\right]$.

A likelihood függvény természetes alapú logaritmusának deriváltját képezve: $\frac{\partial \ln(z; A)}{\partial A} = -\frac{N}{2A} + \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A) + \frac{1}{2A^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A)^2$. Mi lesz a CRLB? Létezik MVU becselő? Az

ML becslőt a derivált egyenlő nulla feltételből kapjuk: $\hat{A}_{ML} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z_n^2 + \frac{1}{4}}$.

2. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése ismert zaj variancia mellett: $z_n = A + w_n$. A sűrűségfüggvény: $f(z; A) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A)^2\right]$. Az

ML becslőt a derivált egyenlő nulla feltételből kapjuk: $\frac{\partial \ln(z; A)}{\partial A} = +\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A) = 0$.

Innen: $\hat{A}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z_n$.

Megjegyzés: Az eredmény ugyanaz, mint a Gauss-Markov becslésnél, ami az ML becslés speciális esete sztochasztikus paraméterek esetén.

3.3.6. Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslők

Nincs előzetes ismeretünk sem a mérendő paramétréről, sem a csatorna karakterisztikáról (a zajról). Minden megfigyelést a következőképpen képzelünk el:

$$z_k = s_k(\mathbf{a}) + e_k, \quad (164)$$

ahol e_k a mérési és a modellezési hiba. A cél az LS költség minimalizálása:

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - s_k(\mathbf{a}))^2. \quad (165)$$

Ennél a módszernél nem kell valószínűségi feltételezés csak egy determinisztikus jelmodell.

Ha a megfigyelési egyenlet lineáris: $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{e}$, akkor explicit megoldás adható. Feltételezzük, hogy az \mathbf{a} paraméter $\hat{\mathbf{a}}$ értéket vesz fel, és felállítjuk a megfigyelés modelljét: $\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}$. A megfigyelést ezzel összevetve keressük $\hat{\mathbf{a}}$ legjobb beállítását négyzetes hibafüggvény feltételezésével:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) &= (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} = \\ &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} - 2\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (166)$$

melynek szélsőértékét (minimumát) keressük:

Méréselmélet: 3. A becslélmélet alapjai

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \right|_{\hat{\mathbf{a}}=\hat{\mathbf{a}}_{LS}} = -2\mathbf{U}^T \mathbf{z} + 2\mathbf{U}^T \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad (167)$$

A (167) összefüggésből:

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} \quad (168)$$

A minimális LS költség a (168) összefüggés (166) összefüggésbe helyettesítésével:

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}_{LS}) = \mathbf{z}^T (\mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}}_{LS}) \quad (169)$$

Megjegyzések:

1. A derivált helyességét egyszerűen leellenőrizhetjük, ha a (166) összefüggésben kijelölt mátrix-, ill. vektor-szorzásokat kifejtjük, és azt követően a deriválást komponensenként végezzük el.
2. Általánosított/súlyozott négyzetes kritériumot is használhatunk, ha bevezetünk egy \mathbf{Q} négyzetes súlyozó mátrixot, amivel:

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{z} - \mathbf{U} \hat{\mathbf{a}}), \quad \hat{\mathbf{a}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}. \quad (170)$$

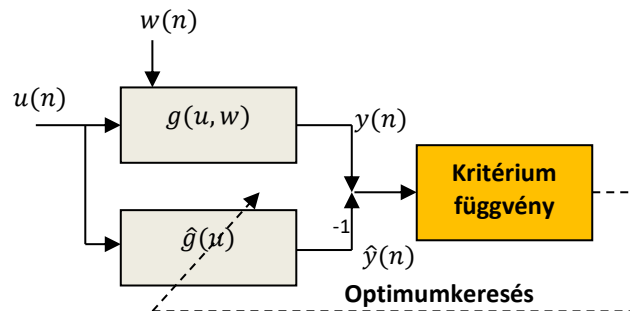
3. Ha $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}$, akkor a (68) összefüggés szerinti Gauss-Markov becslőt kapjuk, tehát a GM becslő egy súlyozott legkisebb négyzetes hibájú becslő, ahol a súlyozást a megfigyelési zaj kovariancia mátrixának inverze adja.
4. A megfigyelés modelljének illesztése elvezet a modellillesztés általános feladatához. Ennek egyik legegyszerűbb esete a regressziós feladat, amikor egy függvényhez annak “független változó-függvény érték” párojaira alapozva egy közelítő függvényt alkotunk meg tipikusan úgy, hogy függvény struktúráját előre rögzítjük, és azon belül valamilyen optimum-kritérium felhasználásával állítjuk be a paramétereket. (Lásd például a lineáris regresszió módszerét.)
5. Ezen a ponton formálisan befejezzük a becslélmélet alapjainak tárgyalását, de a folytatás, mint látni fogjuk, rendre „mérésekről”, azaz jelenségek, ill. azok paramétereinek és állapotainak megragadásáról szól, aminek konkrét eszközei tipikusan becslési eljárások lesznek.

4. Modellillesztés

A modellillesztés problémája meglehetősen szerteágazó. Célja a megismerendő környezet további információszerezést segítő leírása. A legkisebb négyzetes hibájú becslők esetén a legjobb paraméterek meghatározásával valójában modellt illesztünk. A vizsgált környezetet a továbbiakban a megadott modell-struktúra és a hozzátartozó paraméterek segítségével tudjuk jellemezni, további változásait becsülni/követni. A modellillesztés egyik klasszikus példája a regresszió számítás.

4.1. Regresszió-számítás

Függő és független változók közötti közvetlen, determinisztikus kapcsolat meghatározása, a modellillesztés egy speciális esete. A 17. ábrán látható elrendezésben a modellezendő $y = g(u, w)$ függvény kétfajta független változóval rendelkezik: az egyiket $u(n)$ jelöli, amelyet ismerünk és „kézben tudunk tartani”, a másik, amelyet $w(n)$ jelöli, amely ismeretlen, kézben nem tartható, tipikusan zajfolyamatnak elképzelt/modellezett folyamat.



17. ábra. A regressziószámítás általános sémája

Megjegyzés: A továbbiakban az argumentumként vagy indexként megjelenő kis „ n ” tipikusan idő(lépés) index, és iteratív eljárások esetén sokszor egyidejűleg az iterációs lépést is azonosítja. Ennek megfelelően a továbbiakban $u(n) = u_n$, ill. $y(n) = y_n$ egyenértékűek. Zajfolyamatok jelölésére a továbbiakban – ezzel összhangban – a $w(n) = w_n$ jelölést alkalmazzuk.

A modellezéshez egy általunk kézben tartott, tipikusan paraméterek segítségével módosítható („hangolható”) $\hat{y} = \hat{g}(u)$ függvényt használunk. A cél egy olyan „beállítás” elérése, amely valamilyen értelemben optimális. Tipikusan négyzetes kritériumot használunk:

$$J(\hat{y}) = E\{(y - \hat{y})^2\} \quad (171)$$

4.1.1. Regresszió-számítás teljesen specifikált statisztikai jellemzőkkel

Ha ismerjük u és y $f(u, y)$ együttes valószínűség sűrűség függvényét, akkor a feladat Bayes becslési probléma, melynek megoldása az a posteriori várható érték:

$$\hat{g}(u) = E\{y|u\} \quad (172)$$

Az $[u, \hat{g}(u)]$ görbe az y változó u -ra vonatkoztatott regressziós görbéje. Ha a bemenet vektor, akkor regressziós felület.

4.1.2. Regresszió-számítás részben specifikált statisztikai jellemzőkkel

Nem ismerjük az együttes eloszlást, csak véges számú momentumát.

Lineáris regresszió: A legegyszerűbb esetben az illesztendő függvény az

$$\hat{y} = \hat{g}(u) = a_0 + a_1 u \quad (173)$$

skalár lineáris függvény, melynek paraméterei úgy választandók meg, hogy $J(\hat{y}) = E\{(y - \hat{g}(u))^2\}$ minimális legyen. Minimalizálandó a

$$J(a_0, a_1) = E\{(y - a_0 - a_1 u)^2\} \quad (174)$$

négyzetes kritériumfüggvény. Ennek deriváltjai a_0 és a_1 szerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(a_0, a_1)}{\partial a_0} &= -2(E[y] - a_0 - a_1 E[u]) = 0 \\ \frac{\partial J(a_0, a_1)}{\partial a_1} &= -2(E[uy] - a_0 E[u] - a_1 E[u^2]) = 0 \end{aligned} \quad (175)$$

ahonnan

$$a_0 = \frac{E[u^2]E[y] - E[u]E[uy]}{E[u^2] - E^2[u]}, \quad a_1 = \frac{E[uy] - E[u]E[y]}{E[u^2] - E^2[u]} \quad (176)$$

Ehhez ismerni kell a következő momentumokat:

$$E[u], E[y], E[uy], E[u^2]. \quad (177)$$

Polinomiális regresszió: A lineáris regresszió feladatának egyfajta általánosítása. Ebben az esetben az illesztett függvény:

$$\hat{g}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u^k, \quad (178)$$

amelynek fontos tulajdonsága, hogy paramétereiben lineáris. A paramétereiben lineáris modelleket azért kedveljük, mert négyzetes hibakritérium esetén a szélsőérték-keresés lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, mivel a négyzetes kifejezések paraméterek szerinti deriválása lineáris összefüggést eredményez.

4.1.3. Lineáris regresszió mérési adatok alapján

A fentieket végig vihetjük akkor is, ha nincsen előzetes információnk. Ilyenkor $y_n = a_0 + a_1 u_n + w_n$, $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}$, mint eddig.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (179)$$

$$[\mathbf{U}^T \mathbf{U}] = \begin{bmatrix} N & \sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix}$$

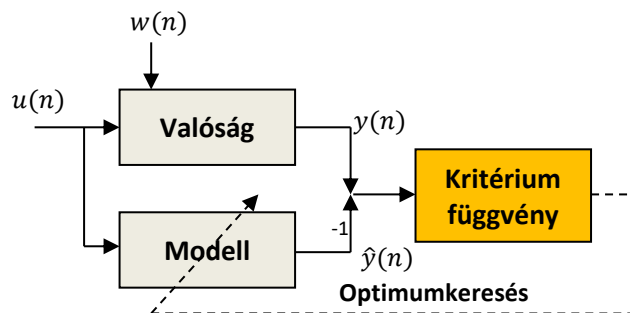
$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 & -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix} \quad (180)$$

Megjegyzések:

1. Ebben az eredményben a (176) kifejezésben szereplő statisztikai jellemzők becslőinek összetevőit azonosíthatjuk.
2. Értelmszerűen a polinomiális regresszió is értelmezhető a legkisebb négyzetes becslés keretei között.

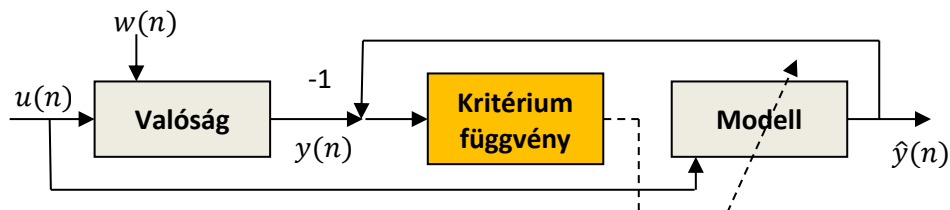
4.1.4. A regressziós séma általánosítása

A **18. ábrán** a modell-illesztést a regressziós sémát követő módon mutatjuk be. Az u bemenetre adott y választ szeretnénk valamilyen kritérium szerint (többnyire négyzetes értelemben) legjobban megközelíteni a modell \hat{y} válaszával.



18. ábra. A modell-illesztés feladata

Érdekes összevetni ezt a sémát a megfigyelő sémával (lásd **2. ábra**). Ehhez rajzoljuk át a **19. ábra** szerinti formára.

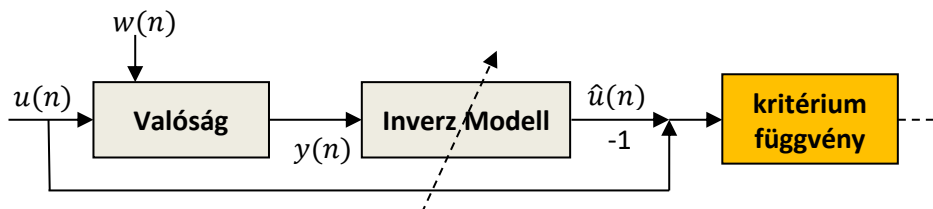


19. ábra. A modell-illesztési feladat megfigyelőként ábrázolva

Méréselmélet: 4. Modellillesztés

A nagyfokú hasonlóság egyértelmű: mindkét esetben modellillesztést végzünk. A megfigyelő séma esetén a paramétereket ismerjük, és az állapotokat becsüljük, míg a regressziós sémában a modellünk „állapotát” kézben tartjuk, és a paramétereket keressük. Mindkét séma „párhuzamos” abban az értelemben, hogy a „bemenő jelet” illetően párhuzamosan kapcsolódnak.

Megjegyzés: A modell-illesztési probléma megragadható „soros” formában is, amikor tulajdonképpen az ún. inverz-modellt illesztjük (lásd **20. ábra**), amikor a bemenetet az inverz-modell által becsüljük.

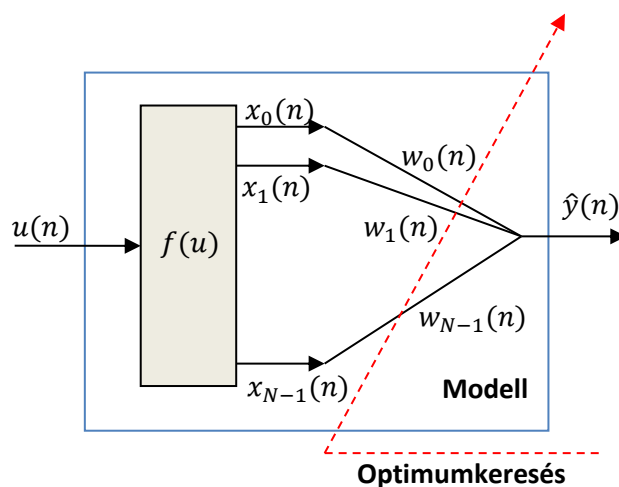


20. ábra. Inverz modell illesztése

Ennek a megközelítésnek hátránya dinamikus rendszerek esetében a soros „kapcsolás” eredő késleltetése, ezért az inverz-modellel „jóslásra” kényszerülünk, ami sok nehézséggel jár.

Adaptív lineáris kombinátor

Az általánosított regressziós séma kapcsán az egyik gyakran használt modell-családot a **21. ábra** mutatja be.



21. ábra. Az adaptív lineáris kombinátor struktúrája

Ebben az $u(n)$ diszkrét értéksorozatból egy $\mathbf{X}^T(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]$ értéksorozatot állítunk elő először, majd ezen értékek lineáris kombinációjaként állítjuk elő az $\hat{y}(n)$ értéket. Az optimumkeresés során a $\mathbf{W}^T(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]$ paraméterek legkedvezőbb, minimális négyzetes hibát eredményező beállítására törekszünk. Minimalizáljuk az

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}(n)) &= E\{[y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]^T [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]\} = \\ &= E\{y^T(n)y(n)\} - 2\mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)y(n)\} + \mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\}\mathbf{W}(n). \end{aligned} \quad (181)$$

Vezessük be a $E\{\mathbf{X}(n)y(n)\} = \mathbf{P}$, és a $E\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\} = \mathbf{R}$ jelölést! Ezzel a szélsőérték keresés

$$\frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{W}(n) = \mathbf{0} \quad (182)$$

amiből az optimális beállítás:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (183)$$

A (183) összefüggés az ún. Wiener-Hopf egyenlet.

Megjegyzések:

1. A (183) összefüggést visszahelyettesítve a (181) kifejezésbe:

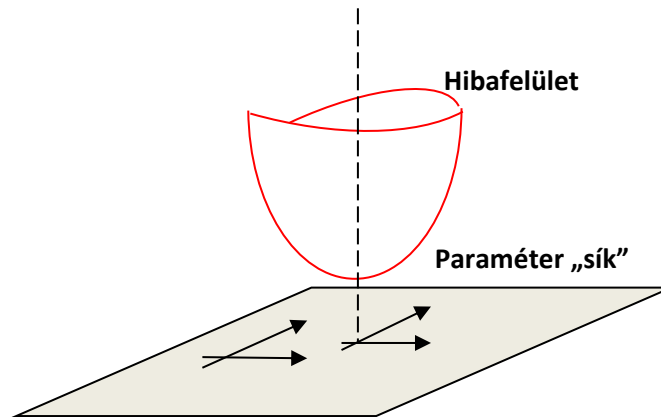
$$J_{min} = E\{y^T(n)y(n)\} - \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = E\{y^T(n)y(n)\} - \mathbf{P}^T \mathbf{W}^* \quad (184)$$

amivel

$$J(\mathbf{W}(n)) = J_{min} + (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{V}(n) \quad (185)$$

ahol $\mathbf{V}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*$ az ún. paraméterhiba vektora.

2. A (185) összefüggés egyértelműen mutatja a négyzetes hiba alakulását a paraméterek, ill. a paraméterhiba függvényében. A viszonyok illusztrálására a **22. ábra** szolgál.



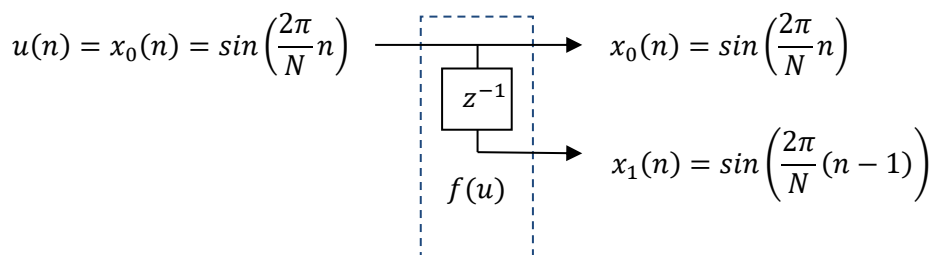
22. ábra. A négyzetes hiba a paraméterek függvényében

A hibafelület tetszőleges pontjában a hiba csökkenés fajlagos mértékét a felület meredekségével (gradiensével) mérhetjük:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = 2\mathbf{R}[\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*] = 2\mathbf{R}\mathbf{V}(n) = 2(\mathbf{R}\mathbf{W}(n) - \mathbf{P}) \quad (186)$$

A (186) összefüggés kitüntetett szerepet kap az adaptív eljárásoknál, ahol a hibafelületen a gradiens mentén „ereszkedünk”.

Példa: Legyen $\mathbf{X}^T(n) = [\sin(2\pi n/N) \quad \sin(2\pi(n-1)/N)]$, azaz egy szinuszos hullámforma két egymás utáni mintája. (Lásd **23. ábra.**)



23. ábra. Az illesztett modell rögzített része

A regressziós vektor és a paraméter vektor ebben a példában kétdimenziós. Itt most N azt jelöli, hogy a szinuszos hullámforma egy periódusa hány mintából áll. A jel, amihez az illesztést végezzük: $y(n) = 2 \cos(2\pi n/N)$. Hogyan válasszuk meg a

$$\mathbf{W}^T(n) = [w_0(n) \quad w_1(n)] \quad (187)$$

paramétereket ahhoz, hogy a közelítés négyzetes hibája minimális legyen? Az \mathbf{R} és a \mathbf{P} mátrixok a szinuszos, ill. koszinuszos hullámformák teljes ($N > 2$) periódusra történő átlagolásával származtathatók:

$$\begin{aligned} E\{x_0^2(n)\} &= E\{x_1^2(n)\} = E\{\sin^2(2\pi n/N)\} = E\{\sin^2(2\pi(n-1)/N)\} = 0.5, \\ E\{x_0(n)x_1(n)\} &= E\{\sin(2\pi n/N) \sin(2\pi(n-1)/N)\} = 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right), \\ E\{x_0(n)y(n)\} &= E\{2 \sin(2\pi n/N) \cos(2\pi n/N)\} = 0, \\ E\{x_1(n)y(n)\} &= E\{2 \sin(2\pi(n-1)/N) \cos(2\pi n/N)\} = -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right). \end{aligned} \quad (188)$$

amivel:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \end{bmatrix}. \quad (189)$$

Képezve \mathbf{R} inverzét:

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{0.25 \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ -0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tan(2\pi/N)} \\ -\frac{2}{\sin(2\pi/N)} \end{bmatrix} \quad (190)$$

Ezzel a paraméter-beállítással az illesztett modell kimenete:

$$\hat{y}(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}^* = 2 \frac{\sin(2\pi n/N)}{\tan(2\pi/N)} - 2 \frac{\sin(2\pi(n-1)/N)}{\sin(2\pi/N)} = 2 \cos(2\pi n/N) \quad (191)$$

Megjegyzések:

1. Mivel szinuszos minták lineáris kombinációjával hiba nélkül elő lehet állítani koszinuszos hullámformák mintáit, ezért a példa szerinti esetben $J_{min} = 0$, azaz a **22. ábrán** a paraboloid legalsó pontja érinti a paraméterek síkját.
2. A példában a (140) összefüggéssel adott mozgó átlagot számítjuk ismert hullámforma mintáiból, $M = 2$ esetet (azaz az ablak szélesség kettő) feltételezve. A teljes periódusra történő átlagolás megfelel annak, hogy mozgó átlag paramétereinek becslésekor $N \rightarrow \infty$.

4.2. Út az adaptív eljárásokhoz

(183) és (186) alapján: $\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}$, $\mathbf{V}(n) = 2(\mathbf{R}\mathbf{W}(n) - \mathbf{P})$. Ez utóbbi mindkét oldalát megszorozva az $\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}$ mátrixszal:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}(n) - \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}(n). \quad (192)$$

Feltételezve, hogy nincs tökéletes ismeretünk az \mathbf{R} mátrixról, és ebből adódóan a gradienstől, (192) átírható egy iteratív formára:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{R}}^{-1}\widehat{\mathbf{V}}(n), \quad (193)$$

illetve a konvergencia sebességét meghatározó $0 < \mu < 1$ „bátorsági” tényező bevezetésével, visszaírva a „tökéletes” \mathbf{R} mátrixot és gradienst

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu\mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}(n) \quad (194)$$

Megjegyzések:

1. Ha pontosan ismerjük az \mathbf{R} mátrixot és gradienst, akkor $\mu = \frac{1}{2}$ egy lépéses konvergenciát biztosít tetszőleges $\mathbf{W}(n)$ kezdőpontból.
2. Mivel $\mathbf{V}(n) = 2\mathbf{R}[\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*]$, ezért ezt a (194) összefüggésbe behelyettesítve, és az egyenlet mindkét oldalából levonva \mathbf{W}^* értékét:

$$\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}^* = (1 - 2\mu)(\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = \mathbf{V}(n+1) = (1 - 2\mu)^{n+1}\mathbf{V}(0), \quad (195)$$

vagyis a kezdeti hiba exponenciális jelleggel csökken, ha $\mu \neq \frac{1}{2}$. Ha $0 < \mu < 0.5$, akkor monoton csökkenő hibával, ellenkező esetben pedig monoton csökkenő amplitúdójú, de lengő jellegű hibával közelítjük meg.

3. A modell-illesztés gradiens módszereit a szerint különböztetjük meg, hogy a (194) szerinti összefüggés (közelítő) alkalmazásához milyen előzetes ismeretek állnak rendelkezésünkre. Amennyiben az \mathbf{R} és a \mathbf{P} mátrixok pontosan ismertek, akkor az adaptív lineáris kombinátor működését a (194) és (195) egyenletek írják le.
4. A továbbiakban sorra kerülő vizsgálatok azt tárják fel, hogy milyen lehetőségeink vannak akkor, ha az \mathbf{R} és \mathbf{P} mátrixokra vonatkozó előzetes (a priori) ismereteink részlegesek, esetleg teljes mértékben hiányoznak, legfeljebb a folyamatban lévő mérésekre alapozhatók. Ez a gondolat végig jelen van a továbbiakban, a megértéshez fontos, hogy ezt ne hagyjuk figyelmen kívül.
5. Figyeljük meg, hogy az \mathbf{R} mátrix „globális” információt hordoz a hibafelületről, a $\mathbf{V}(n)$ gradiens pedig az adott $\mathbf{W}(n)$ paraméterérték esetén a hibafelület „lokális” jellemzése. Ezen lokális ismeret alapján „ereszkedünk” a hibafelületen az ún. gradiens eljárások alkalmazása esetén annak érdekében, hogy minél közelebb kerüljünk az optimumot (legkisebb négyzetes hibát) eredményező paraméter beállításhoz.

4.2.1. Az \mathbf{R} mátrix vizsgálata

A (185) összefüggésből jól látható módon az illesztésnél használt négyzetes alakú, paraboloid formájú, hibafelület az \mathbf{R} mátrixtól függ. Előljáróban azt mutatjuk be, hogy milyen feltételek esetén lehetséges az optimum-keresést úgy megvalósítani, ahogyan egy impedancia-mérő híd esetében is szeretnénk: egyenként változtatjuk a változtatható paramétereket, mégpedig úgy, hogy mindig megkeressük a lokális minimumot, és eközben a hiba egyetlen lépés során sem

Méréselmélet: 4. Modellillesztés

nő. Ehhez egy olyan koordináta-rendszerben történő keresés tartozik, amelynek tengelyei a paraboloid formájú hibafelület főtengelyeinek irányába mutatnak. Ezt a koordináta-rendszert az \mathbf{R} mátrix sajátvektorai jelölik ki, tehát a továbbiakban fontos szerepet játszik tehát az \mathbf{R} sajátérték/sajátvektor rendszere. Példaként a (189) szerinti esetben vizsgálódva:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} \\ 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix} \quad (196)$$

A $\det[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{R}] = 0$ egyenlet gyökei adják a sajátértékeket:

$$(\lambda - 0.5)^2 - 0.25 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right) = \lambda^2 - \lambda + 0.25 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{N} \right) = 0 \quad (197)$$

A két gyök:

$$\lambda_0 = 0.5 + 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right), \quad \lambda_1 = 0.5 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \quad (198)$$

A sajátvektorok az $\mathbf{R}\mathbf{Q}_0 = \lambda_0\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{R}\mathbf{Q}_1 = \lambda_1\mathbf{Q}_1$ egyenletekből származtathatók.

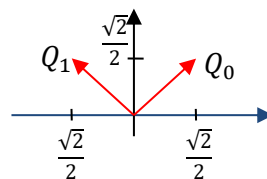
$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \\ 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix} = (0.5 + \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right)) \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{00} = q_{01} \quad (199)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) \\ 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} = (0.5 - \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right)) \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{10} = -q_{11} \quad (200)$$

A sajátvektorokat egységre normálva:

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (201)$$

lásd 24. ábra:



24. ábra. A példa szerinti \mathbf{R} mátrix sajátvektorai

Méréselmélet: 4. Modellillesztés

A példa szerinti sajátvektorok tehát egymásra merőleges, a koordináta rendszer tengelyeivel 45 fokos szöget bezáró vektorok. Ezek adják meg azokat az ereszkedési irányokat, amelyek mentén történő mozgás egyetlen paraméter változtatásával lehetséges.

Általában

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, (\mathbf{R} - \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (202)$$

A sajátvektorokat mátrixba rendezve:

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_{N-1} \\ \hline \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_{N-1} \\ \hline \mathbf{Q} \end{bmatrix} \underbrace{\text{diag}\langle \lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} \rangle}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (203)$$

Ahonnán:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1}, \quad (204)$$

ami \mathbf{R} ún. normál formája. Mivel az \mathbf{R} definíció szerint szimmetrikus mátrix, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$. Fontos tulajdonság, hogy ilyenkor a sajátvektorok ortogonálisak: $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = 0$, ha $\forall i \neq j$, egyébként $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i = c_i \quad \forall i$. Ha $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i = 1 \quad \forall i$ -re, akkor a sajátvektorok ortonormáltak, és $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

Az ortogonalitás bizonyítása: A definíció alapján $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}^T = \lambda_i \mathbf{Q}_i^T$, ill. $\mathbf{R} \mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_j$. Az első egyenlet mindkét oldalát jobbról szorozva \mathbf{Q}_j -vel, a második egyenlet mindkét oldalát balról szorozva \mathbf{Q}_i^T -vel: $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_j = \lambda_i \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j$, ill. $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j$. Mivel $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$, ezért az egyenletek baloldala egyenlő, ezáltal $\lambda_i \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j$. Mivel $\lambda_i \neq \lambda_j$, ezért az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = 0$.

Megjegyzések:

1. Mivel $\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}$ pozitív szemidefinit, ezért \mathbf{R} sajátértékei nem negatívak.
2. Az \mathbf{R} korrelációs mátrix sajátvektorai a hibafelület fő tengelyeit jelölik ki.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}(n)) &= J_{min} + (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{V}(n) = \\ &= J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(n) = J_{min} + [\mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n)]^T \mathbf{\Lambda} [\mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n)] = \\ &= J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}'(n) \end{aligned} \quad (205)$$

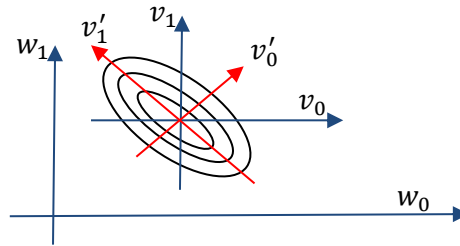
ahol

$$\mathbf{V}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n). \quad (206)$$

Ezzel (186) megfelelője (itt $\mathbf{V}'(n)$ szerint deriválunk):

$$\nabla(n) = 2 \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}'(n) = 2 [\lambda_0 v'_0 \quad \lambda_1 v'_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} v'_{N-1}]^T \quad (207)$$

A viszonyokat a **25. ábra** illusztrálja: a sajátvektorok mátrixával transzformált paraméter-hiba vektorok koordinátái a paraboloid fő tengelyei mentén értelmezhetők.



25. ábra

A főtengek irányában mozogva az optimalizálás egyváltozós optimalizálások sorozataként is végrehajtható. Ezt mutatja be a következő példa, amelyben az optimum megközelítését a gradiens mentén történő ereszkedéssel oldjuk meg:

Példa:

Egyváltozós eset: $w(n+1) = w(n) + \mu(-\nabla(n))$, $\nabla(n) = 2\lambda(w(n) - w^*)$, amivel

$$w(n+1) - w^* = (1 - 2\mu\lambda)(w(n) - w^*),$$

ill. $r = 1 - 2\mu\lambda$, $v(n+1) = w(n+1) - w^*$ jelöléssel $v(n+1) = rv(n) = r^{n+1}v(0)$. Ahhoz, hogy az eljárás konvergáljon $|r| = |1 - 2\mu\lambda| < 1$ szükséges. Ebből a sajátérték és a bátorsági tényező megkívánt viszonyára a:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda} \quad (208)$$

összefüggést kapjuk. Ha $0 < \mu < \frac{1}{2\lambda}$, akkor túlszillapított, ha $\mu = \frac{1}{2\lambda}$, akkor kritikusan csillapított, ha $\frac{1}{2\lambda} < \mu < \frac{1}{\lambda}$, akkor alulcsillapított az iterációs eljárás.

Többváltozós eset: $V'(n+1) = (I - 2\mu\Lambda)^{n+1}V'(0)$. Ahhoz, hogy az eljárás konvergáljon

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}} \quad (209)$$

szükséges. Vegyük észre, hogy ilyenkor N egyváltozós esettel van dolgunk, ahol a legmeredekebb ereszkedés azon tengely mentén történik, amelyikhez a legnagyobb sajátérték tartozik. Ha a sajátértékek nem ismertek, akkor a $\lambda_{max} < \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = tr[\Lambda] = tr[\mathbf{R}]$ alapján

$$0 < \mu < \frac{1}{tr[\mathbf{R}]} \quad (210)$$

választással élhetünk.

Megjegyzés: Ha ismernénk Λ -t, azaz lenne „globális” információnk a hibafületről akkor nyilvánvalóan a skalár μ helyett $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\Lambda^{-1}$ mátrixot alkalmaznánk, hiszen ezzel egy lépéses konvergenciát tudnánk biztosítani. Ehelyett a „lokális” információra, a gradiensre alapozva, annak irányában igyekszünk a hibafület minimumát elérni.

4.3. Iteratív modellillesztési módszerek

Az alábbiakban néhány klasszikus szélsőérték keresési eljárást foglalunk össze, amelyeket négyzetes kritériumok, és paramétereiben lineáris modellek esetén négyzetes hibafületek esetén előszeretettel alkalmazunk. Ezek tekinthető tanuló eljárásoknak is, mert minden lépésben „informálódnak” az aktuális viszonyokról, esetünkben a hibafület gradienséről, és

annak függvényében lépnek tovább. Természetesen alkalmazhatunk másfajta módszereket is, ahol például a $\mathbf{W}(n)$ értékeket véletlen módon vagy más stratégiával választjuk ki, és ezt követően vizsgáljuk a hibát. Ha a korábinál kisebb hibát kapunk, akkor a kiválasztott érték lesz az új javaslat, ellenkező esetben elvetjük azt (Monte-Carlo módszerek, genetikus algoritmusok). Az ilyen módszerek azonban inkább akkor merülnek fel, ha (1) nem négyzetes hibakritériumot használunk, illetve, ha (2) a modellünk paramétereiben nemlineáris. Ezekben a helyzetekben ugyanis a hibafelület nem paraboloid, lokális minimumai lehetnek, amelyek esetén a „lokális” információra építő gradiens eljárások könnyen leállhatnak a lokális minimumok valamelyikében.

4.3.1. Iteratív modellillesztés Newton módszerrel

Erre a Wiener-Hopf egyenletből kiindulva jutunk, a korábbiakban megismertük, itt csak a felsorolás teljessége érdekében szerepel. Feltételezzük, hogy ismerjük az \mathbf{R} és a \mathbf{P} mátrixot. Ebből adódóan a módszer inkább csak elvi jelentőségű, mert a gyakorlatban nem elvárható előzetes ismereteket tételez fel. Mégis ki kell emelni, mert irányt mutat a közelítő eljárások megtervezéséhez. Rendre két összefüggést adunk meg. Az első a paraméter vektort adja meg következő iterációs lépésben, míg a második a paraméter-hiba alakulását a kiindulási paraméter-hibából.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) - \mu \mathbf{R}^{-1} \nabla(n) \\ \mathbf{V}(n+1) &= (1 - 2\mu)^{n+1} \mathbf{V}(0)\end{aligned}\tag{211}$$

Jól látható, hogy $\mu = 0.5$ esetén egylépéses a konvergencia.

4.3.2. Iteratív modellillesztés a legmeredekebb lejtő módszerével

Ez már egy praktikus módszer, amelyik nem feltételezi az \mathbf{R} és a \mathbf{P} mátrixok ismeretét, de azt igen, hogy a gradiens „lokális” információk alapján meg tudjuk határozni:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} \approx \frac{\Delta J(\mathbf{W}(n))}{\Delta \mathbf{W}(n)} = \hat{\nabla}(n)\tag{212}$$

Ez praktikus azt igényli, hogy az n -edik iterációs lépéshez elvégezzünk egy olyan mérési sorozatot, hogy $\mathbf{W}(n)$ kis megváltozása különböző bemenőjel-értékek mellett $J(\mathbf{W}(n))$ mekkora megváltozását eredményezi, majd ezeket a megváltozásokat átlagoljuk (amivel közelítjük a várható-érték képzést), és ezzel $\nabla(n)$ egy (reményeink szerint igen jó) becslését kapjuk.

$$\begin{aligned}\mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) - \mu \nabla(n) \\ \mathbf{V}'(n+1) &= (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{A})^{n+1} \mathbf{V}'(0)\end{aligned}\tag{213}$$

Megjegyzések:

1. A gradiens mentén történő ereszkedés eredményét a főtengelely irányú koordináta-rendszerben „látványosabban” tudjuk érzékeltetni.
2. A gradiens mentén történő ereszkedés eredménye természetesen nem függ attól, hogy milyen vonatkoztatási (koordináta) rendszert alkalmazunk.

4.3.3. Iteratív modellillesztés a pillanatnyi deriváltra alapozva (LMS módszer)

(LMS: Least-Mean-Square). A hiba pillanatértékéből indulunk ki:

$$J(\mathbf{W}(n)) = [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]^T [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)] = e^T(n)e(n) \quad (214)$$

Ennek deriválásával becsüljük a gradienst:

$$\hat{\mathbf{V}}(n) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2\mathbf{X}(n)y(n) + 2\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n) = -2\mathbf{X}(n)e(n) \quad (215)$$

Amivel

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu\mathbf{X}(n)e(n). \quad (216)$$

Ez egy nagyon széles körben használt összefüggés, különösen nagyobb méretű paramétervektorok esetén. A μ bátorsági tényező azonban nagy körültekintéssel, és tipikusan kis értékre választandó, hiszen a (215) szerinti gradiens igencsak közelítő: az aktuális $y(n)$ és $\mathbf{X}(n)$ függvénye, miközben a tényleges gradiens a (215) kifejezés várható értéke. A kis bátorsági tényezővel együtt jár a sok („apró”) iterációs lépés, ami lehetőséget ad sok $\{y(n), \mathbf{X}(n)\}$ érték „megismerésére”, és ezzel az elmaradt várható érték képzés „kiváltására”.

Megjegyzések:

1. A neurális hálózatok térhódításának kezdetén az LMS eljárást nagyon széles körben használták nagyméretű adaptív lineáris kombinátorokat használó hálózatok tanítására.
2. Általános tapasztalat, hogy ha eléggé kis μ értékkel dolgozunk, akkor elég jól megközelíthetjük az optimális paraméter-vektort, nagyobb μ esetén a megmaradó paraméter-hiba nagyobb lesz. Ennek az az oka, hogy ilyenkor a paraboloid legalsó pontja környezetében ide-oda ugrálunk a pillanatnyi derivált szerint, és a nem eléggé kis μ miatt képtelenek vagyunk még lejjebb ereszkedni. Mindenképpen célszerű tehát a minimum környezetében a μ érték további csökkentése.

A paraméter-hiba kifejezését a (216) összefüggésből úgy származtatjuk, hogy mindkét oldalából levonjuk \mathbf{W}^* értékét, ill. $y(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}^*$ feltételezéssel/közelítéssel élünk. Ez utóbbival azt feltételezzük, hogy a modell „tökéletesen” illeszthető.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}^* &= \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^* + 2\mu\mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}^* - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)] = \\ &= [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)][\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*] \end{aligned} \quad (217)$$

amiből:

$$\mathbf{V}(n+1) = \left[\prod_{i=0}^n (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i)) \right] \mathbf{V}(0) \quad (218)$$

A (218) összefüggés arra mutat rá, hogy a paraméter-hiba csökkenéséhez hogyan járul hozzá a μ bátorsági tényező és az $\mathbf{X}(n)$ ún. regressziós vektor. Nyilvánvalóan a mátrix szorzatnak kontraktívnak, azaz a paraméter-hiba vektor hosszát csökkentő hatásúnak kell lennie. Célszerű, ha ez a hatás minden lépésben érvényesül.

4.3.4. Iteratív modell-illesztés α -LMS módszerrel

A (216) összefüggésben célszerű lehet az $\mathbf{X}(n)$ regressziós vektor normálása, hiszen enélkül a paraméter vektor korrekciója nagymértékben függ a „jelszinttől”. (216), ill. (218) megfelelője:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + \frac{\alpha}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)}\mathbf{X}(n)e(n) \\ \mathbf{V}(n+1) &= \left[\prod_{i=0}^n \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{\mathbf{X}^T(i)\mathbf{X}(i)}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i) \right) \right] \mathbf{V}(0) \end{aligned} \quad (219)$$

4.3.5. Iteratív modell-illesztés LMS-Newton módszerrel

A (216) összefüggésben az $\mathbf{X}(n)$ regressziós vektor normálása elvileg az \mathbf{R} mátrixszal is lehetséges. Ha tehát abban a különös helyzetben lennénk, hogy ismerjük az \mathbf{R} mátrixot, és a gradienst pedig pillanatnyi értékével becsüljük, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}(n)e(n) \\ \mathbf{V}(n+1) &= \left[\prod_{i=0}^n \left(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i) \right) \right] \mathbf{V}(0) \end{aligned} \quad (220)$$

Ennek a gondolatnak akkor van gyakorlati jelentősége, ha az \mathbf{R} mátrixot a megfigyeléseinkből iteratív úton ugyancsak előállítjuk.

4.3.6. Iteratív modell-illesztés LMS-Newton módszerrel, \mathbf{R} iteratív becslésével

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{X}(n)e(n) \quad (221)$$

ahol $\mathbf{R}(n+1) = \lambda\mathbf{R}(n) + \nu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \nu < 1$, $\lambda = 1 - \nu$, ($\lambda = 0.9 \dots 0.99$). $\mathbf{R}(n+1)$ inverzét az iteratív számítást nagymértékben könnyítő, ún. mátrix inverziós lemma felhasználásával írtuk fel.

$$\mathbf{R}^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}^{-1}(n) - \frac{\mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{R}^{-1}(n)}{\frac{\lambda}{\nu} + \mathbf{X}^T(n)\mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{X}(n)} \right] \quad (222)$$

Megjegyzések:

1. A mátrix inverziós lemma: $[\mathbf{A} + \mathbf{BC}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}[\mathbf{I} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$. Figyeljük meg, hogy amennyiben, mint esetünkben, \mathbf{BC} diád, akkor a jobboldali zárójeles inverz skalár érték lesz. Most $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{R}(n)$, $\mathbf{BC} = \nu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)$.
2. Az iterációt célszerűen $\mathbf{R}(0) = \varepsilon\mathbf{I}$ értékkel indítjuk, ahol $0 < \varepsilon \ll 1$.
3. A modellillesztés feladatát alapvetően kétféle módszerrel oldhatjuk meg:
 - „batch” vagy „off-line” jelleggel, amikor felvett regisztrátumot utólag dolgozunk fel.
 - iteratív, rekurzív, „on-line” jelleggel, amikor a felvétellel párhuzamos a feldolgozás.
4. A modellillesztés célját illetően is alapvetően két nagy csoportot különböztetünk meg:
 - *identifikáció*: a lehető legpontosabban szeretnénk megragadni a valóságot,
 - *adaptáció*: a lehető legjobban szeretnénk követni a valóságot, a valóság változásait.
5. Az adaptációt megvalósító ún. adaptív rendszerek esetében többnyire iteratív/rekurzív eljárásokat alkalmazunk, az identifikáció esetében a kétféle megközelítés lényegében egyenértékű.

4.3.7. Iteratív modellillesztés a kritériumfüggvény Taylor sorfejtése alapján

Ha valamilyen oknál fogva a kritérium függvény nem négyzetes, akkor egy adott $\mathbf{W}(n)$ paraméter érték környezetében mindig megkísérélhetjük Taylor sorba fejteni:

$$J(\mathbf{W}) \cong J(\mathbf{W}(n)) + [\nabla J(\mathbf{W}(n))]^T [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)] + \frac{1}{2} [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{H}(\mathbf{W}(n)) [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)] + \dots \quad (223)$$

ahol

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}(n)) = \left. \frac{\partial \nabla J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \right|_{\mathbf{W}=\mathbf{W}(n)} \quad (224)$$

a hibakritérium második deriváltja, ami megfeleltethető az \mathbf{R} mátrixnak.

Ha a sorbafejtett $J(\mathbf{W})$ minimumát deriválással keressük, és ehhez a sorfejtésnek csak első három tagját vesszük figyelembe, akkor a

$$\nabla J(\mathbf{W}(n+1)) = \nabla J(\mathbf{W}(n)) + \mathbf{H}(\mathbf{W}(n))(\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)) = \mathbf{0} \quad (225)$$

feltételt kapjuk, amiből a Newton módszer adódik:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{W}(n)) \nabla J(\mathbf{W}(n)) \quad (226)$$

Megjegyzés: Az $\frac{1}{2}$ -es szorzó a korrekciós tagból most hiányzik, mert a Taylor sorban szerepel, ellentétben az eddigi négyzetes összefüggésekkel.

4.4. Adaptív IIR rendszerek

Hatékonyabb, de sok szempontból problematikusabb a modellillesztés/adaptáció, ha ún. végtelen impulzusválaszú (infinite impulse response: IIR) rendszereket alkalmazunk. Ezek sokféle (realizálási/kiszámítási) struktúra szerint megvalósíthatók, az alábbiakban csak az ún. direkt struktúra szerinti változatot tárgyaljuk. Formálisan továbbra is adaptív lineáris kombinátort alkalmazunk, de az aktuális becslő-érték kiszámításában korábbi becslő értékek is szerepet játszanak (n a diszkrét idő index):

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)x(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)\hat{y}(n-k), \quad (227)$$

azaz

$$\mathbf{W}^T(n) = [a_0(n), a_1(n), \dots, a_{M-1}(n); b_1(n), b_2(n), \dots, b_{N-1}(n)], \quad (228)$$

illetve

$$\mathbf{X}^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1); \hat{y}(n-1), \hat{y}(n-2), \dots, \hat{y}(n-N+1)]. \quad (229)$$

Ha ezekre alapozva használjuk az eddig megismert számítási eljárásokat, akkor ún. pszeudolineáris regressziót (PLR) hajtunk végre. Ennek során formálisan nem veszünk tudomást arról, hogy a regressziós vektor az illesztendő modell (azaz az adaptív szűrő) korábbi kimenőjel-mintáitól is függ (ún. implicit függés), aminek közvetlen következménye, hogy a hibafelület már nem paraboloid, és előfordulhat, hogy lokális minimumai vannak.

4.4.1. Visszavezetés véges impulzusválaszú (FIR) problémára (Equation-Error Formulation)

Az alábbiakban az adaptív szűrő $H(z)$ átviteli függvényének:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\hat{Y}(z)}{X(z)} \quad (230)$$

$N(z)$ számlálójával és $D(z)$ nevezőjével mint „operátorokkal” fogunk előhozakodni, amivel együtt jár, hogy látszólag keveredik a diszkrét idő, és a diszkrét frekvenciatartomány.

Célszerűen az $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ közelítési hiba helyett annak egy szűrt változatát, az $e_e(n) = D(z)e(n)$ hibát minimalizáljuk, mert ez a hiba független lesz $\hat{y}(n)$ értékétől. Bevezetve ugyanis az

$$N(z) = A(n, z) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)z^{-k}, B(n, z) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)z^{-k}, D(z) = 1 - B(n, z) \quad (231)$$

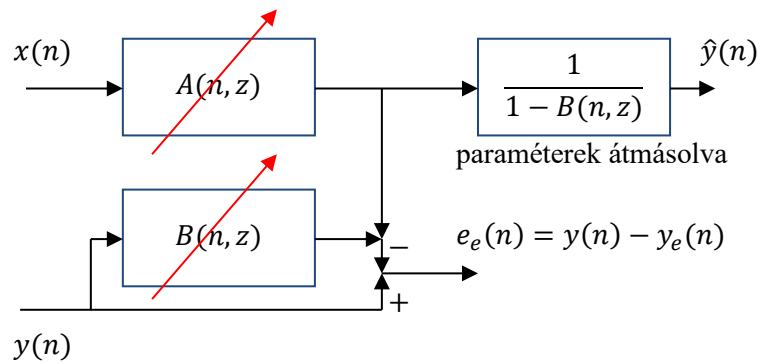
jelöléseket, és felhasználva a (230) összefüggést:

$$e_e(n) = D(z)e(n) = \frac{y(n) - B(n, z)y(n)}{D(z)y(n)} - \frac{A(n, z)x(n)}{D(z)\hat{y}(n)} = y(n) - \frac{y_e(n)}{B(n, z)y(n) + A(n, z)x(n)}, \quad (232)$$

ahol (228) felhasználásával $y_e(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{X}_e(n)$. Itt (v.ö. a (229) összefüggéssel)

$$\mathbf{X}_e^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1); y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N+1)]. \quad (233)$$

Innentől bátran alkalmazható minden olyan módszer, ami az adaptív lineáris kombinátor megközelítésben megfelelőnek bizonyult. A módszer „blokkvázlata” a **26. ábrán** látható.



26. ábra. Az Equation-Error Formulation módszer

Megjegyzés: zajos megfigyelés esetén torzítás lép(het) fel a paraméterbecslés során, azaz a becslő várható értéke nem fog megegyezni a paraméter „ideális” értékével.

4.4.2. A kimeneten értelmezett hibán alapuló modellillesztések (Output-Error Formulation)

1. Gradiens alapú eljárások: pillanatnyi gradiens (tehát LMS jellegű) esetben az $e^2(n) = e_o^2(n)$ „minimalizálására” törekszünk. Ilyenkor

$$\hat{\mathbf{V}}(n) = -2e(n) \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2e(n) \nabla \hat{y}(n) \quad (234)$$

ahol

$$\nabla^T \hat{y}(n) = \left[\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_0(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_1(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_{M-1}(n)}; \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_1(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_2(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_{N-1}(n)} \right], \quad (235)$$

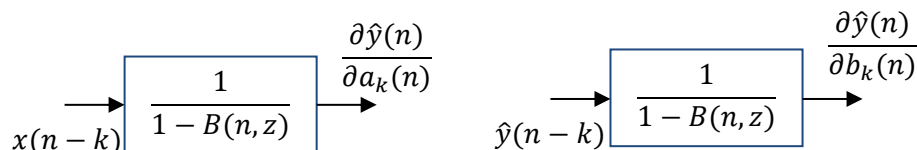
ill. ezen belül:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_k(n)} &= x(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} \\ \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_k(n)} &= \hat{y}(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)} \end{aligned} \quad (236)$$

A (236) összefüggések alapján jól látható az implicit függés mibenléte: Az IIR szűrők végtelen memóriája miatt az aktuális „paraméter-érzékenységre” valamennyi korábbi bemenőjel-minta kihat. Ha elegendően kis lépésközzel dolgozunk az iterációk során (azaz kicsi a μ bátorsági tényező), akkor alkalmazható a következő közelítés:

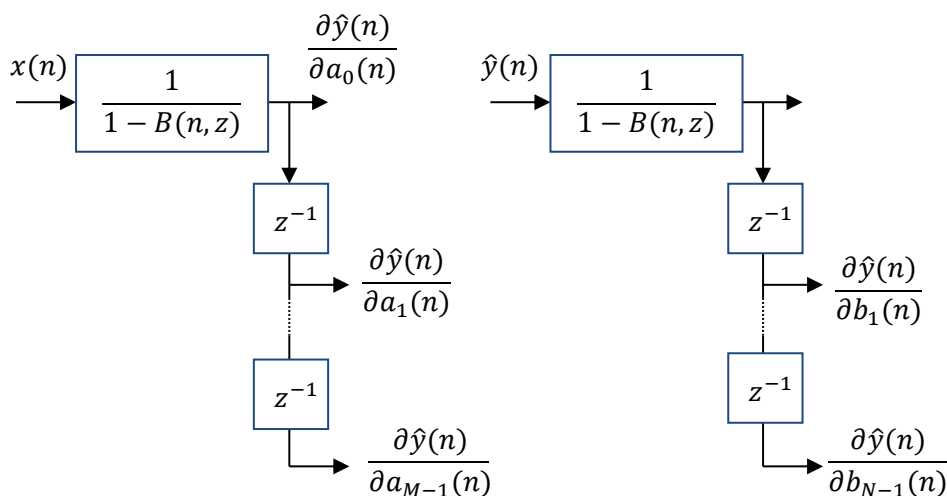
$$\frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} \cong \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n-i)}, \quad \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)} \cong \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n-i)} \quad (237)$$

A (237) közelítés azért előnyös, mert a közelítő gradiens szűrőszerűen számítható: a szűrők bemenőjele $x(n-k)$, ill. $\hat{y}(n-k)$, kimenőjele pedig $\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_k(n)}$, ill. $\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_k(n)}$, és összesen annyi szűrő kell, ahány beállítandó paraméter. A szűrők blokkvázlata a **27. ábrán** látható.



27. ábra. Gradiens szűrők

Az így megvalósított eljárás Recursive Prediction Error (RPE) néven található az irodalomban. Az elnevezés arra utal, hogy az $n+1$ indexű, „jósolt” paraméter számításánál a korrekciós tagot rekurzív szűrővel számítjuk. A módszer nyilvánvaló hátránya, hogy annyi egyforma szűrő kell, ahány paramétert állítunk. Egy további közelítést alkalmazó egyszerűsítést a **28. ábrán** láthatunk. Ez az egyszerűsített RPE eljárás.



28. ábra. Egyszerűsített gradiens szűrők

2. Még inkább közelítő gradiens eljárások állíthatók elő úgy, hogy (236) „visszacsatolt” tagjait elhagyjuk, ezzel lényegében visszajutunk a pszeudolineáris regresszió (PLR) eljáráshoz. Formailag ebben az esetben is tipikusan az LMS, ill. az LMS/Newton eljárást alkalmazzuk.
3. A kimeneti hibára alapozott adaptív IIR eljárások esetén a paraméter-sík felett értelmezhető hibafelület nem paraboloid, és nem feltétlenül egyetlen minimumhellyel rendelkezik. Ilyenkor a gradiens módszerek könnyen juttatnak lokális minimumba. A hibafelületet egyetlen minimumhelyűvé transzformálhatjuk egy másfajta hibadefinícióval:

4.4.3. Szűrt-hiba eljárás (Filtered-error (FE) Algorithm)

Ebben az esetben is szűrjük a kimeneti hibát:

$$e(n) \Rightarrow e_f(n) = [1 + C(n, z)]e(n), \quad (238)$$

ahol $C(n, z)$ -t úgy választjuk, hogy az

$$\frac{1 + C(n, z)}{1 - B_*(z)} \quad (239)$$

átviteli függvény szigorúan pozitív valós részű (Strictly Positive Real: SPR) legyen, mert ebben az esetben – a rendszer disszipativitása révén – a globális konvergencia biztosítható. $B_*(z)$ az ideális W^* -hoz tartozó $B(n, z)$ polinom.

Megjegyzés: Az SPR tulajdonság mibenlétét jól illusztrálja például egy soros RC tag impedanciájának függvénye: $Z(j\omega) = R + 1/j\omega C$. Ebből jól látható, hogy pozitív a valós rész, aminek következménye zárt áramkörben a kondenzátoron tárolt energia disszipációja, és ezzel az áramkör minimális energiaállapotának elérése, azaz a konvergencia.

4.4.4. Az adaptív IIR algoritmusok általános formája

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{X}_f(n)e_f(n), \quad (240)$$

ahol $\mathbf{X}_f(n)$ a “szűrt” információs (vagy regressziós) vektor, $e_f(n)$ pedig a “szűrt” hiba vektor.

Ha $\mathbf{X}_f(n) = \mathbf{X}_e(n)$ (lásd (233)), és $e_f(n) = e_e(n)$ (lásd (232)), akkor Recursive Least Square (RLS) algoritmusról, ha ráadásul $\mathbf{R}(n+1) = \mathbf{I}$, akkor Least Mean Square (LMS) algoritmusról beszélünk.

4.4.5. Stabilitáseméleti megközelítés

A megközelítés alap gondolatát az LMS eljárásán keresztül mutatjuk be, lásd (216) és (218):

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{X}(n), \quad \mathbf{V}(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n). \quad (241)$$

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$$\mathbf{V}(n) \Rightarrow 0, \text{ amivel } \mathbf{W}(n) \Rightarrow \mathbf{W}^*. \quad (242)$$

Ljapunov módszerével keressünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas:

$$G(n) = \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n). \quad (243)$$

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető:

$$\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0, \quad (244)$$

minden n -re. Ha $G(0)$ véges, akkor $\Delta G(n) \Rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \Delta G(n+1) &= \mathbf{V}^T(n+1)\mathbf{V}(n+1) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) = \\ &= \mathbf{V}^T(n)[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]^T[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) = \\ &= -4\mu e^2(n)(1 - \mu\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)). \end{aligned} \quad (245)$$

Mivel $\mu > 0$, ezért ha

$$0 < \mu < \frac{1}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)} \quad (246)$$

$\forall n$ -re, akkor $\Delta G \Rightarrow 0$ magával vonja $\mu e^2(n) \rightarrow 0$, illetve $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n) \rightarrow 0$.

Megjegyzések:

1. A (246) feltétel implicit módon azt is tartalmazza, hogy az $\mathbf{X}(n)$ korlátos, és $1/[1 - B(n, z)]$ stabil. (Az átviteli függvény pólusai az egységsugarú körön belül helyezkednek el.)
2. Az $e(n) = (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{X}(n)$ hiba lehet azért nulla, mert a két vektor ortogonális. Ezt nyilván kerülni kell.

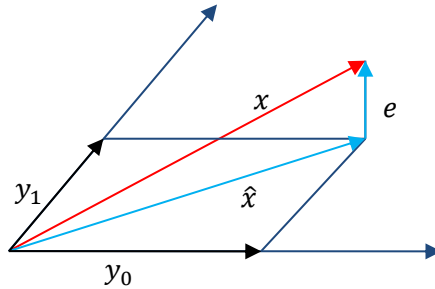
5. Szűréselmélet alapjai

5.1. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener szűrő)

Az alábbiakban ismételten a lineáris kombinátor struktúrával foglalkozunk, és természetesen ugyanarra az eredményre jutunk, mindössze a kiindulás némileg eltérő, és a menet közbeni interpretációban fedezhetők fel új elemek. Keressük x legjobb becslőjét

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k \quad (247)$$

ún. lineáris batch processzorral, ahol y_0, y_1, \dots, y_{N-1} jelölik a megfigyelési adatokat, a $\{a_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ pedig ismeretlen súlytényezők. A **29. ábra** azt illusztrálja, hogy a tér x elemét/vektorát az $\{y_k\}$ elemek által kifeszített altérben, azok lineáris kombinációjával létrehozott \hat{x} elemmel/vektorral igyekszünk közelíteni. Legjobbnek azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az x vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő.



29. ábra. A legjobb becslés geometriai interpretációja

Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens azzal a megoldással, amelyet a négyzetes hibakritérium minimalizálásával kaptunk:

$$e = x - \hat{x}, \quad E\{e^2\} = E\{(x - \hat{x})^2\} = E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right)^2\right\} \quad (248)$$

Elvégezve a deriválást:

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial a_j} = -2E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right) y_j\right\} = 0, \quad E\{e y_j\} = 0, \forall j - \text{re.} \quad (249)$$

Ez utóbbit ortogonalitási egyenletnek nevezzük, mert a vektorokkal történő geometriai interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az e hibavektor merőleges valamennyi y_j vektorra. A (249) összefüggés átrendezésével:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \underbrace{E\{y_k y_j\}}_{R_{yy}(k,j)} = \underbrace{E\{x y_j\}}_{P_{xy}(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (250)$$

ahol $R_{yy}(k, j)$ az \mathbf{R}_{yy} autokorreláció mátrix (k, j) indexű eleme, $P_{xy}(j)$ a \mathbf{P}_{xy} keresztkorreláció vektor j -edik eleme, ahol most (a korábbiakkal ellentétben) a mátrix, ill.

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

vektor indexében külön jeleztük, hogy mely mennyiségek auto-, ill. keresztkorrelációjáról van szó. Az optimális esetben megmaradó hiba:

$$\begin{aligned} E\{e^2\}|_{min} &= E\left\{e\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right)\right\}|_{min} = E\{ex\} = E\{(x - \hat{x})x\} = \\ &= E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k E\{xy_k\} = E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k P_{xy}(k) \end{aligned} \quad (251)$$

Mindez mátrix formában (ahol $\mathbf{W} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1}]^T$):

$$\mathbf{R}_{yy}\mathbf{W} = \mathbf{P}_{xy}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{P}_{xy}, \quad E\{e^2\}|_{min} = E\{x^2\} - \mathbf{P}_{xy}^T \mathbf{R}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{xy} = E\{x^2\} - \mathbf{P}_{xy}^T \mathbf{W} \quad (252)$$

Ezeket összevetve a (183) és (184) összefüggésekkel jól látható, hogy a két megközelítés ugyanarra az eredményre vezet.

1. Példa: Zajos megfigyeléseink vannak x -ről: $y_k = x + w_k$. A zaj tulajdonságai: $E\{xw_j\} = 0 \ \forall j - re$, $E\{w_j w_k\} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \sigma_w^2 & j = k \end{cases}$. A jel tulajdonságai: $E\{x\} = 0$, $E\{x^2\} = \sigma_x^2$. A korreláció mátrixok: $R_{yy}(k, j) = E\{y_k, y_j\} = E\{(x + w_k)(x + w_j)\} = \sigma_x^2 + \sigma_w^2 \delta_{kj}$, $P_{xy}(j) = E\{xy_j\} = \sigma_x^2$. A (250) szerinti összefüggés részletesen kifejtve:

$$\begin{aligned} (\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_0 + \sigma_x^2 a_1 + \dots + \sigma_x^2 a_{N-1} &= \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 a_0 + (\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_1 + \dots + \sigma_x^2 a_{N-1} &= \sigma_x^2 \\ \vdots & \\ \sigma_x^2 a_0 + \sigma_x^2 a_1 + \dots + (\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_{N-1} &= \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (253)$$

Összeadva a N egyenletet:

$$(\sigma_w^2 + N\sigma_x^2) \sum_{k=0}^{N-1} a_k = N\sigma_x^2, \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_k = \frac{N\sigma_x^2}{\sigma_w^2 + N\sigma_x^2}, \quad (254)$$

amit soronként visszahelyettesítve:

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2 + N\sigma_x^2}, \quad \text{amivel } \hat{x} = \frac{1}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k, \quad (255)$$

ill. a négyzetes hiba várható értéke:

$$E\{e^2\}|_{min} = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{\sigma_w^2}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2}, \quad (256)$$

azaz az additív zaj hatása jelentősen csökkenthető.

Megjegyzés: Érdekes a fenti összefüggéseket $\gamma = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2$ függvényében vizsgálni. Látható, hogy az (egyforma) súlytényezők a zajfolyamatok teljesítményének arányától és a figyelembe vett minták számától függ.

Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből

Bevezető példa: az egyszerű lineáris átlagolás rekurzív formában. Első lépésben n értéket adunk össze, és az összeget osztjuk n -nel. A következő lépésben $n + 1$ értéket átlagolunk, aminek a kiszámolásához felhasználjuk az előzőekben megkapott részösszeget. Az iterációs indexhez asszociálhatjuk a diszkrét időt ($n = 1, 2, \dots$).

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k), \\ \hat{x}(n+1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1} y(n) = \\ &= \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} (y(n) - \hat{x}(n))\end{aligned}\quad (257)$$

Megjegyzés: A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő. Az új átlagértéket az előző átlag felhasználásával számítjuk. Ezt a formát keressük az optimális becslő esetére is.

Visszatérve az optimális becslőhöz, N helyett n -t írva ($\gamma = (\frac{\sigma_w}{\sigma_x})^2$):

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) y(k), \quad a_k(n) = \frac{1}{n + \gamma}, \quad E\{e^2(n)\}_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n + \gamma}.\quad (258)$$

Mіндеzeket megismételve $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n+1) &= \sum_{k=0}^n a_k(n+1) y(k), \quad a_k(n+1) = \frac{1}{n+1 + \gamma}, \\ E\{e^2(n+1)\}_{min} &= \frac{\sigma_w^2}{n+1 + \gamma}.\end{aligned}\quad (259)$$

Követve (257) lépéseit:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n+1) &= \frac{1}{n+1 + \gamma} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1 + \gamma} y(n) = \frac{n + \gamma}{n+1 + \gamma} \hat{x}(n) + \\ &+ \frac{1}{n+1 + \gamma} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1 + \gamma} (y(n) - \hat{x}(n)),\end{aligned}\quad (260)$$

A későbbiek szempontjából érdekes még a négyzetes hiba alakulása. A fentiek alapján:

$$\frac{E\{e^2(n+1)\}_{min}}{E\{e^2(n)\}_{min}} = \frac{a_k(n+1)}{a_k(n)} = \frac{n + \gamma}{n+1 + \gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n + \gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{E\{e^2(n)\}_{min}}{\sigma_w^2}}\quad (261)$$

A (260) összefüggés együtthatóit átnevezve összefoglalóan:

$$\hat{x}(n+1) = a(n+1)\hat{x}(n) + b(n+1)y(n) = \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)(y(n) - \hat{x}(n))}_{\text{korrekciós tag}},\quad (262)$$

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

A (262) összefüggés az optimális nemrekurzív becslő rekurzív formája, amely minden lépésben - egy újabb mérés révén - egy újabb dimenzióval bővíti azt az alteret, amelyre vetítjük az x vektort.

2. Példa: Legyen $\gamma = 2$, σ_w^2 adott. (260) és (259) alapján:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{n+2}{n+3} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+3} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+3} (y(n) - \hat{x}(n)),$$

$$E\{e^2(n+1)\}_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n+3}, n = 0, 1, \dots \quad (263)$$

5.2. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő és prediktor)

Az optimális rekurzív becslő egy az eddigihez képest gazdagabb modellre épít.

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amelynek gerjesztését egy Gauss eloszlású fehér-zaj folyamat adja. Determinisztikus gerjesztést is kaphat, de a linearitás miatt érvényes szuperpozíció tétele folytán az külön tárgyalható:

$$x(n) = ax(n-1) + w(n). \quad (264)$$

Itt $\{w(n)\}$ Gauss eloszlású, nulla várható értékű fehér-zaj folyamat, melyet rendszer zajnak nevezünk, és melyre

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(n) = 0 \\ w(n) = 0 \end{matrix} \text{ ha } n < 0 \quad (265)$$

Megjegyzés: A (264) egy ún. elsőrendű autoregresszív folyamat: első rendben függ az értéke az előző „időpillanatbeli” értéktől. Négyzetes várható értéke kifejezhető a zajfolyamat négyzetes várható értékével:

$$\begin{aligned} E\{x(n)\} &= 0, \quad E\{x^2(n)\} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \\ &= E\{a^2 x^2(n-1) + w^2(n) + 2ax(n-1)w(n)\} = \\ &= a^2 R_{xx}(0) + R_{ww}(0) = a^2 \sigma_x^2 + \sigma_w^2, \end{aligned} \quad (266)$$

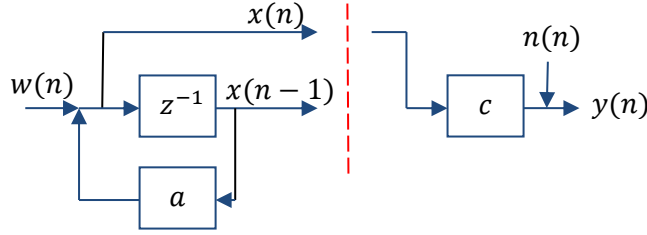
ahonnan

$$R_{xx}(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} \quad (267)$$

ill.

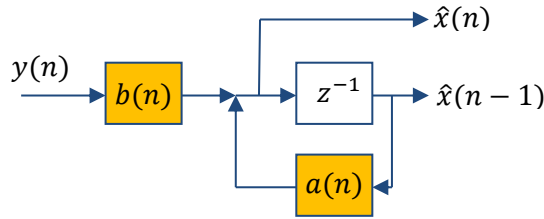
$$\begin{aligned} R_{xx}(1) &= E\{x(n)x(n+1)\} = E\{x(n)(ax(n) + w(n+1))\} = aR_{xx}(0), \\ R_{xx}(2) &= E\{x(n)x(n+2)\} = E\{x(n)(ax(n+1) + w(n+2))\} = a^2 R_{xx}(0), \\ R_{xx}(j) &= E\{x(n)x(n+j)\} = R_{xx}(j) = a^{|j|} R_{xx}(0). \end{aligned} \quad (268)$$

mert $E\{x(n)w(n+1)\} = 0, \forall n$ - re. A megfigyelés lineáris modelljét a **30. ábrán** láthatjuk.



30. ábra. A megfigyelés lineáris modellje

A megfigyelés additív zajjal, az $n(n)$ ún. megfigyelési zajjal terhelt. Erre a zajra vonatkozóan ugyanolyan feltételezésekkel élünk, mint $w(n)$ esetében. $E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$. A két zajfolyamatnak egymáshoz nincsen köze, korrelálatlanok. Az optimális rekurzív becslőt az új megfigyelés és a korábbi becslés lineáris kombinációjaként keressük (lásd 31. ábra):



31. ábra. A rekurzív becslő bloksémája

$$\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n) \quad (269)$$

Megjegyzés: Létezik az ún. prediktor-séma is:

$$\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n). \quad (270)$$

Keressük a (269) összefüggés optimális súlytényezőit a 29. ábrán szereplő illusztráció szellemében. Ehhez:

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n), \quad E\{e^2(n)\} = E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\} \quad (271)$$

Az optimális beállítás feltételei:

$$\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0, \quad \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial b(n)} - 2E\{e(n)y(n)\} = 0 \quad (272)$$

vagyis az aktuális ortogonalitási egyenletek:

$$E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0, \quad E\{e(n)y(n)\} = 0 \quad (273)$$

Az egyenletek elnevezésének háttérében az áll, hogy - a 29. ábra segítségével - szavakban: az $e(n)$ hibavektor merőleges az $\hat{x}(n-1)$ és az $y(n)$ vektorokra, ill. az általuk kifeszített síkra.

$a(n)$ meghatározása:

(273) alapján

$$E\{[x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0. \quad (274)$$

Ha ebbe beleírjuk:

$$a(n)x(n-1) - a(n)x(n-1) = 0, \quad y(n) = cx(n) + n(n), \quad (275)$$

azaz

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

$$E\{[a(n)(x(n-1) - \hat{x}(n-1)) - a(n)x(n-1)]\hat{x}(n-1) + [x(n) - b(n)cx(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0 \quad (276)$$

átrendezve:

$$\begin{aligned} a(n)E\{-e(n-1)\hat{x}(n-1) + x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = \\ = E\{[(1-b(n)c)x(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\} \end{aligned} \quad (277)$$

Itt $E\{e(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, mert $\hat{x}(n-1) = a(n-1)\hat{x}(n-2) + b(n-1)y(n-1)$ tagjai ortogonálisak $e(n-1)$ -re. Hasonlóképpen a megfigyelési zaj $n(n)$ mintája korrelálatlan $\hat{x}(n-1)$ értékével. Ezzel (277) az alábbi formában írható:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = [(1-b(n)c)]E\{x(n)\hat{x}(n-1)\} \quad (278)$$

Behelyettesítve, hogy $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, és $E\{w(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, kapjuk:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = a[(1-b(n)c)]E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\}, \quad (279)$$

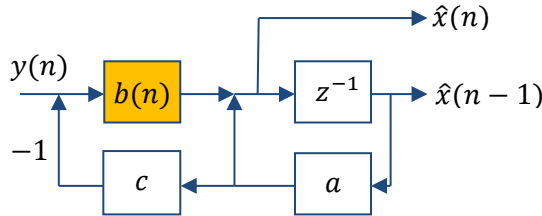
azaz

$$a(n) = a[(1-b(n)c)], \quad (280)$$

amivel

$$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1)) \quad (281)$$

Megjegyzés: Látható, hogy a megfigyelt rendszer modellje beépült a megfigyelésbe. (281) jobboldalának második tagja pedig egy korrekció, amely a mért érték $\hat{y}(n) = ac\hat{x}(n-1)$ becslését veszi alapul. A (281) összefüggésnek megfelelő becselő blokkvázlata a **32. ábrán** látható.



32. ábra. A skalár Kalman szűrő blokkvázlata

$b(n)$ meghatározása:

Kiindulva a (271) összefüggésből, és (264) valamint (281) behelyettesítésével

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= E\{[ae(n-1) + w(n) - b(n)(ace(n-1) + cw(n) + n(n))]\}^2\} = \\ &= E\{[a[1-b(n)c]e(n-1) + [1-b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\} \end{aligned} \quad (282)$$

Mivel a négyzetre emelésnél a keresztszorzatok várható értékei nullák, mert a zajfolyamatok függetlenek egymástól, illetve az állapotváltozók korábbi értékeitől:

$$E\{e(n-1)w(n)\} = E\{e(n-1)n(n)\} = E\{w(n)n(n)\} = 0, \quad (283)$$

ezért a négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1-b(n)c]^2E\{e^2(n-1)\} + [1-b(n)c]^2E\{w^2(n)\} + b^2(n)E\{n^2(n)\}. \quad (284)$$

Bevezetve a

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

$$E\{e^2(n)\} = p(n); E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2; E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2 \quad (285)$$

jelöléseket, keressük (284) minimumát $b(n)$ függvényében:

$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0, \quad (286)$$

ahonnan a keresett optimális súlytényező

$$b(n)|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2} = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \text{ ahol} \quad (287)$$

$$p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$$

Megjegyzés: Ha $\sigma_n = 0$, akkor $b(n) = 1/c$. Ezzel $E\{e^2(n)\} = 0$.

Összefoglalva:

A rendszer- és a megfigyelési modell:

$$\begin{aligned} x(n) &= ax(n-1) + w(n) \\ y(n) &= cx(n) + n(n). \end{aligned} \quad (288)$$

Az optimális rekurzív szűrő:

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1)) \\ \hat{y}(n) &= ac\hat{x}(n-1) \end{aligned} \quad (289)$$

ahol az $E\{e^2(n)\} = p(n)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $b(n)$ súlyozással kapjuk:

$$\begin{aligned} p_1(n) &= a^2p(n-1) + \sigma_w^2 \\ b(n) &= cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1} \\ p(n) &= [1 - b(n)c]p_1(n) \end{aligned} \quad (290)$$

Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman prediktor)

A becslő kifejezése (lásd (270)): $\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)$, ami hasonló átírásokkal

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)) \quad (291)$$

formára hozható. A levezetés hasonló lépésekből áll, mint a szűrő esetében, azzal, hogy $p(n+1) = E\{e^2(n+1)\}$ minimalizálását írjuk elő. A levezetést majd a vektoros esetre mutatjuk be.

Összefoglalva:

A rendszer- és a megfigyelési modell:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= ax(n) + w(n) \\ y(n) &= cx(n) + n(n). \end{aligned} \quad (292)$$

Az optimális rekurzív prediktor:

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)) \\ \hat{y}(n) &= c\hat{x}(n) \end{aligned} \quad (293)$$

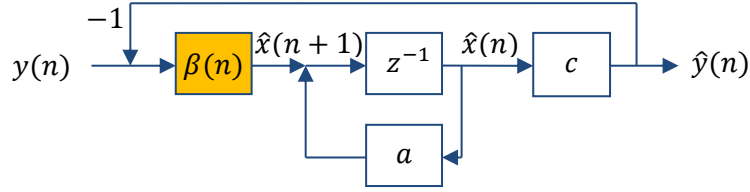
ahol az $E\{e^2(n+1)\} = p(n+1)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $\beta(n)$ súlyozással kapjuk:

$$\beta(n) = acp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1} \quad (294)$$

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

$$p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$$

Megjegyzés: A 33. ábra az optimális, egylépéses prediktor blokkvázlatát mutatja be. Figyeljük meg, hogy ez az elrendezés megfeleltethető a korábban megismert megfigyelő sémának.



33. ábra. Az egylépéses Kalman prediktor blokkvázlata (skalár eset)

Példa: Skalár Kalman szűrő a (264) összefüggés szerint. Tegyük fel, hogy: $E\{x(n)\} = 0$. A $c = 1$ választással élünk. Mivel $\hat{x}(0) = 0$:

$$\hat{x}(1) = b(1)y(1). \quad (295)$$

A $b(1)$ értéket az ortogonalitási összefüggésből kapjuk:

$$E\{[x(1) - \hat{x}(1)]y(1)\} = 0, \text{ ahol } y(1) = x(1) + n(1). \quad (296)$$

Ezzel

$$\hat{x}(1) = b(1)[x(1) + n(1)] \quad (297)$$

Mindezeket behelyettesítve az ortogonalitási összefüggésbe:

$$E\{[(1 - b(1))x(1) - b(1)n(1)][x(1) + n(1)]\} = (1 - b(1))\sigma_x^2 + b(1)\sigma_n^2 = 0. \quad (298)$$

Ebből

$$b(1) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}. \quad (299)$$

Ha például $\sigma_n^2 = \sigma_w^2$, és $a^2 = 1/2$, akkor (267) alapján $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2} = 2\sigma_n^2$. Ezzel $b(1) = 2/3$.

Ezeket visszahelyettesítve a négyzetes hiba kifejezésébe: $E\{e^2(1)\} = p(1) = \frac{2}{3}\sigma_n^2$. Ezek után már tudjuk használni a (287) és a (290) összefüggést:

$$b(2) = \frac{a^2 p(1) + \sigma_w^2}{a^2 p(1) + \sigma_w^2 + \sigma_n^2} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 2} = \frac{4}{7} \approx 0.57 \quad (300)$$

$$E\{e^2(2)\} = p(2) = \frac{4}{7}\sigma_n^2 \approx 0.57\sigma_n^2$$

Így folytatva:

$$b(3) = \frac{9}{16}, \quad (301)$$

$$E\{e^2(3)\} = p(3) = \frac{9}{16}\sigma_n^2 = 0.5625\sigma_n^2$$

Az iterációt folytatva elérünk egy állandósult állapotot, amikor

$$E\{e^2(k+1)\} \cong E\{e^2(k)\} = p \quad (302)$$

Ezt behelyettesítve (290) összefüggéseibe, majd kifejezve p -re:

$$p^2 + 3p\sigma_n^2 - 2\sigma_n^4 = 0, \quad (303)$$

amiből $p = 0.56\sigma_n^2$. Látható, hogy a harmadik iterációs lépés már elég közel vitt az állandósult állapothoz.

5.3. Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman prediktor és szűrő)

Az alábbiakban az optimális rekurzív becslő vektoros változatát mutatjuk be. A skalár esettel ellentétben a Kalman prediktor összefüggéseivel kezdünk, mert ez illeszkedik ahhoz a képhez, amellyel az (1) - (10) összefüggésekhez kapcsolódóan a mérési eljárások egy lehetséges keretét megrajzoltuk. Maga a levezetés is némileg egyszerűbb, mint a szűrő esetében. Kiindulásunk az állapotváltozós leírás, és a kapcsolódó megfigyelő:

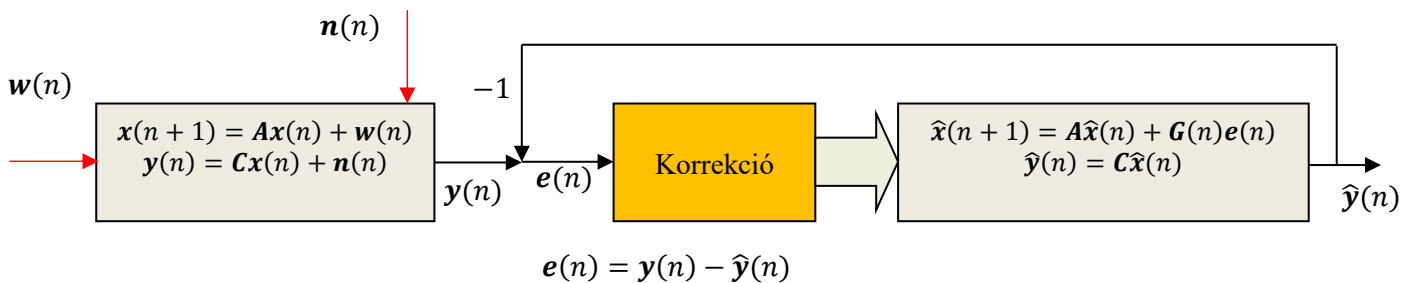
$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (304)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{n}(n), \quad (305)$$

ahol az \mathbf{A} állapotátmenet mátrixot, és a \mathbf{C} megfigyelési mátrixot továbbra is ismertnek tételezzük fel, $\mathbf{w}(n)$ az ún. rendszer-zaj, $\mathbf{n}(n)$ pedig az ún. megfigyelési-zaj, amikről a következőket feltételezzük: mind a rendszer-, mind a megfigyelési-zaj vektor egymástól és a rendszer állapotától független nulla várható értékű fehér Gauss folyamat. Kovariancia mátrixaik:

$$\mathbf{Q}(n) = E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^T(n)\}, \mathbf{R}(n) = E\{\mathbf{n}(n)\mathbf{n}^T(n)\}. \quad (306)$$

Az alábbiakban megismételjük a **2. ábrát**, és jelezzük a modell eltéréseit (lásd **34. ábra**). Formálisan csak annyi a változás, hogy a megfigyelt rendszer gerjesztetté vált a rendszer-zaj által, a megfigyelt értéket pedig perturbálja az additív megfigyelési zaj.



34. ábra. Mérés Kalman prediktorral

A mérési eljárás, amit a kiegészített modellhez rendelünk egy megfigyelő:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{e}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)(\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(n)), \quad (307)$$

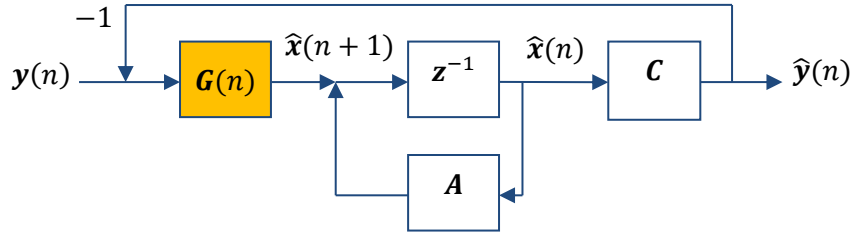
ami csak abban tér el a (3) összefüggéstől, hogy most a \mathbf{G} mátrixot is a diszkrét idő függvényeként képzeljük el (lásd **35. ábra**).

Megjegyzések:

1. A skalár esetben $\mathbf{G}(n)$ szerepét $\beta(n)$ töltötte be.
2. A skalár esetben a rendszer és a megfigyelő állapotváltozójának különbségét $e(n)$ jelölte. A vektoros esetben az állapotvektorok különbségét $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)$ jelöli.

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

3. A vektoros esetben $\mathbf{e}(n) = \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)$ a rendszer és a megfigyelő kimenetének különbségét jelöli.
4. A vektoros esetben a hibaviszonyok leírására a (10) összefüggést használjuk.



35. ábra. A Kalman prediktor, mint megfigyelő

Keressük azt a $\mathbf{G}(n)$ mátrixot (az ún. prediktor erősítést), amely mellett a becslési hiba

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) &= E\{[\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)][\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)]^T\} = \\ &= E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\} \end{aligned} \quad (308)$$

kovariancia mátrixának nyoma minimális. Ez felel meg a négyzetes hiba minimalizálásának, mivel a kovariancia mátrix nyoma éppen az állapotváltozó vektorok különbségének komponensenkénti négyzetösszegét adja. Ennek megtalálása érdekében képezzük (308) nyomának, azaz a $\text{tr}\mathbf{P}(n+1) = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)]$ skalár értéknek a deriváltját $\mathbf{G}(n)$ szerint. A $\mathbf{G}(n)$ optimális értékét akkor kapjuk, ha ez a derivált nullával egyenlő.

Ha a (308) összefüggésbe behelyettesítjük a rendszermodell [(304) - (305)] és a rekurzív prediktor (307) összefüggéseit, akkor $\mathbf{G}(n)$ optimális értékét a következő egyenlet adja:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \text{tr}\mathbf{P}(n+1)}{\partial \mathbf{G}(n)} = \\ &= \frac{\partial \text{tr}[(\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C})\mathbf{P}(n)(\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C})^T + \mathbf{Q}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n)\mathbf{G}^T(n)]}{\partial \mathbf{G}(n)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (309)$$

Az (309) összefüggés felírásakor felhasználtuk a függetlenségre vonatkozó, alábbi előzetes ismereteinket:

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\mathbf{n}^T(n)\} = \mathbf{0}, \quad E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\mathbf{w}^T(n)\} = \mathbf{0}, \quad E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{n}^T(n)\} = \mathbf{0}, \quad (310)$$

azaz a zajhatások n -edik értékeinek korrelálatlanságát/függetlenségét egymástól és a befolyásolt jellemzők ($\mathbf{x}(n)$ és $\hat{\mathbf{x}}(n)$) n -edik értékétől. (A zajhatások csak a befolyásolt jellemzők következő, $(n+1)$ -edik értékére hatnak.)

Elvégezve az (309) összefüggésben kijelölt deriválásokat a keresett prediktor erősítés kifejezhető:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}\mathbf{P}(n+1)}{\partial \mathbf{G}(n)} &= -2[\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}]\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + 2\mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n) = \mathbf{0}. \\ \mathbf{G}(n) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1} \end{aligned} \quad (311)$$

A deriválásnál a következő szabályokat alkalmaztuk:

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

$$\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{X}^T]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{W}^T + \mathbf{X}\mathbf{W}; \quad \frac{\partial \text{tr}[\mathbf{X}\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{W}^T; \quad \frac{\partial \text{tr}[\mathbf{W}\mathbf{X}^T]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{W}, \quad (312)$$

ahol a \mathbf{W} mátrix az \mathbf{X} mátrixtól független.

A becslési hiba (308) szerinti kovariancia mátrixa $\mathbf{F}(n) = \mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) &= \\ &= E\{[\mathbf{F}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) + \mathbf{w}(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{n}(n)][\mathbf{F}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) + \mathbf{w}(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{n}(n)]^T\} = \\ &= \mathbf{F}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{F}^T(n) + \mathbf{Q}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n)\mathbf{G}^T(n) \end{aligned} \quad (313)$$

Megjegyzés:

Az (313) összefüggés alapján látható, hogy a becslés kovariancia mátrixa három hatás eredményeképpen módosul:

- A megfigyelő tárgyalásakor megismert hibacsökkentő hatás az $\mathbf{F}(n) = \mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}$ mátrix kontrakтивitásának köszönhetően, de most – a négyzetes kritériumnak betudható módon – négyzetes formában.
- A rendszerzaj kovariancia mátrixa által közvetített, statisztikai értelemben vett hibanövelő hatás, amely annak tudható be, hogy a $\mathbf{w}(n)$ diszkrét érték „perturbálja” $\mathbf{x}(n+1)$ – az előző állapota alapján – jószolt értékét.
- A megfigyelési zaj kovariancia mátrixa pedig ugyancsak növeli a hibát statisztikai értelemben, ami annak tudható be, hogy az $\mathbf{n}(n)$ diszkrét érték „perturbálja” $\hat{\mathbf{x}}(n+1)$ – az előző állapota alapján – jószolt értékét.

Az (313) összefüggés írható kompaktabb formában, mert visszairva $\mathbf{F}(n) = \mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}$ kifejezését, és első tagját kifejtve:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T\mathbf{G}^T(n) - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T + \\ &+ \mathbf{G}(n)\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T\mathbf{G}^T(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n)\mathbf{G}^T(n) + \mathbf{Q}(n) \end{aligned} \quad (314)$$

A negyedik és az ötödik tag összevonásával, és (311) második sorának felhasználásával:

$\mathbf{G}(n)[\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]\mathbf{G}^T(n) = \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T\mathbf{G}^T(n)$, ami viszont kiejti (314) második tagját. Marad az első, harmadik és hatodik tag, amiből:

$$\mathbf{P}(n+1) = [\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}]\mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n) \quad (315)$$

Összefoglalva:

A rendszermodell: $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n)$, a megfigyelés: $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{n}(n)$. Az optimális rekurzív (ún. Kalman) prediktor összefüggései:

$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(n+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)[\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(n)] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{e}(n) \\ \mathbf{G}(n) &= \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1} \\ \mathbf{P}(n+1) &= [\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}]\mathbf{P}(n)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n) \end{aligned} \quad (316)$
--

Megjegyzések:

1. Ha a zajfolyamatok stacionáriusak, akkor $\mathbf{Q}(n) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}(n) = \mathbf{R}$.
2. Figyeljük meg, hogy a megfigyelt rendszer modellje hogyan épül be a megfigyelőbe.

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

3. A fentiek szerinti gondolatmenet segítségével eljuthatunk az optimális rekurzív (ún. Kalman) szűrő összefüggéseihez is. Ebben az esetben (304) és (305) megfelelői:

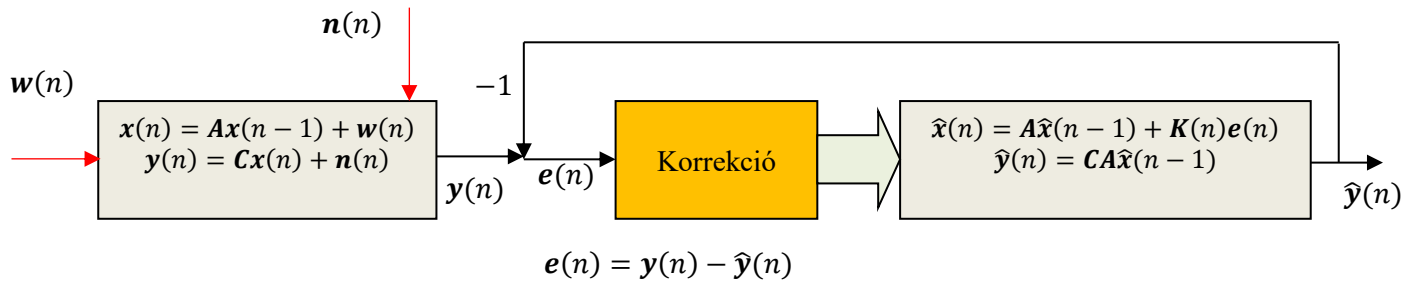
$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{w}(n) \quad (317)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{n}(n). \quad (318)$$

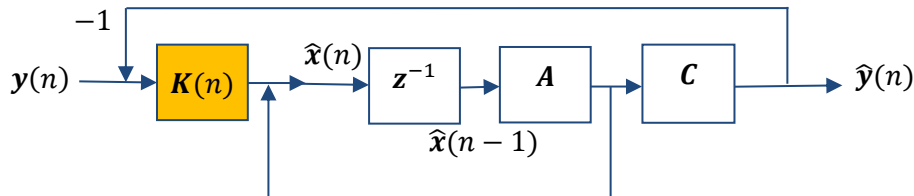
Itt a zajfolyamatokkal kapcsolatos feltételezéseink változatlanok, kovariancia mátrixaik az (306) szerintiek. Az (307) összefüggés szerinti megfigyelő megfelelője:

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)(\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1)), \quad (319)$$

ahol $\mathbf{K}(n)$ az ún. Kalman erősítés. A Kalman szűrővel történő mérést a **36. ábra**, az ennek megfelelő megfigyelőt a **37. ábra** mutatja be.



36. ábra. Mérés Kalman szűrővel



37. ábra. A Kalman szűrő, mint megfigyelő

Az optimális eredmény elérése érdekében keressük azt a $\mathbf{K}(n)$ mátrixot (az ún. Kalman erősítést), amely mellett a becslési hiba

$$\mathbf{P}(n) = E\{[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)][\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)]^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\} \quad (320)$$

kovariancia mátrixának nyoma minimális. Ennek megtalálása érdekében képezzük (320) nyomának, azaz a $\text{tr}\mathbf{P}(n) = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n)]$ skalár értéknek a deriváltját $\mathbf{K}(n)$ szerint. Megismételve az (309) – (315) összefüggésekkel jellemezhető eljárást, az optimális rekurzív (ún. Kalman) szűrő összefüggései:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(n) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1)] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n) \\ \mathbf{K}(n) &= [\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]\mathbf{C}^T[\mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1} \\ \mathbf{P}(n) &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}][\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)] \end{aligned} \quad (321)$$

Méréselmélet: 5. Szűréselmélet alapjai

Bevezetve a $P_1(n) = [AP(n-1)A^T + Q(n)]$ jelölést megkapjuk a Kalman szűrő szokásos formájú kifejezéseit:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(n) &= A\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y}(n) - C A\hat{\mathbf{x}}(n-1)] = A\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n) \\ P_1(n) &= [AP(n-1)A^T + Q(n)] \\ \mathbf{K}(n) &= P_1(n)C^T [CP_1(n)C^T + R(n)]^{-1} \\ P(n) &= [I - \mathbf{K}(n)C]P_1(n)\end{aligned}\tag{322}$$

- Amennyiben az alkalmazott rendszermodellek rendszerzajt becsatóló mátrixa nem az egységmátrix, hanem egy alkalmas B mátrix, akkor a fenti összefüggésekben $Q(n)$ helyére $BQ(n)B^T$ írandó.
- Determinisztikus gerjesztés hatása az összefüggések lineáris voltából fakadóan a szuperpozíció elvének alkalmazásával érvényesíthető.
- A Kalman prediktor és szűrő közötti hasonlóságok és különbségek az **34. – 37. ábrák** és a kapcsolódó összefüggések alapján láthatók. Az optimális szűréshez kapcsolódó mondanivaló kifejtésére mindkét struktúra alkalmas. A kettő közötti különbség lényege az, hogy a Kalman szűrő a megfigyelt értéket a megfigyelés időpontjához rendelhető állapotváltozó érték becslésére használja, míg a Kalman prediktor annak következő időpontbeli értékét becsli/jósolja. Az eljárások eredményességét ez a különbség nem befolyásolja. A prediktor esetében “látványosabb” a mérés modelljének beépülése a megfigyelőbe.

6. LS becslők rekurzív számítása

6.1. A lineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők rekurzív számítása

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (323)$$

A továbbiakban is n két dolgot jelöl: (1) az eddig figyelembe vett minták számát (az egyes minták indexelhetők például $k = 0, 1, \dots, n - 1$ jelöléssel); (2) Az n -edik „időpillanatban” vett mintát, ami már az $n + 1$ -edik mintavett adat. Ezzel a fenti összefüggés n minta feltételezésével:

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{U}(n)\mathbf{a}(n) + \mathbf{w}(n), \quad (324)$$

amihez tartozóan

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1}\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n) = \mathbf{P}(n)\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n). \quad (325)$$

Ha veszünk egy újabb mintát, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n+1) &= \mathbf{U}(n+1)\mathbf{a}(n+1) + \mathbf{w}(n+1) = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}(n) \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(n) \\ \mathbf{u}(n) \end{bmatrix} \mathbf{a}(n+1) + \begin{bmatrix} \mathbf{w}(n) \\ w(n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (326)$$

ahol $z(n)$ skalár, az $n + 1$ -edik megfigyelési érték, $\mathbf{u}(n)$ sorvektor, a regressziós vektor $n + 1$ -edik sora, és végül $w(n)$ skalár, az $n + 1$ -edik zajkomponens. Ezekkel a jelölésekkel:

$$\hat{\mathbf{a}}(n+1) = \left[\begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(n) & \mathbf{u}^T(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}(n) \\ \mathbf{u}(n) \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T(n) & \mathbf{u}^T(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(n) \\ z(n) \end{bmatrix}, \quad (327)$$

illetve a műveletek elvégzésével

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \left[[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n) + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)] \right]^{-1} [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n) + \mathbf{u}^T(n)z(n)] = \\ &= \mathbf{P}(n+1)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n) + \mathbf{u}^T(n)z(n)]. \end{aligned} \quad (328)$$

Az ebben szereplő mátrix invertálást az ún. mátrix inverziós lemma felhasználásával végezzük:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BCD}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}[\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{DA}^{-1}, \quad (329)$$

ahol most $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}(n)$; $\mathbf{B} = \mathbf{u}^T(n)$; $\mathbf{D} = \mathbf{u}(n)$; $\mathbf{C} = 1$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(n+1) &= \mathbf{P}(n) - \mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)[1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)]^{-1}\mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n) = \\ &= \mathbf{P}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}. \end{aligned} \quad (330)$$

Ennek felhasználásával:

Méréselmélet: 6. LS becslők rekurzív számítása

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \mathbf{P}(n+1)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{z}(n) + \mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n)] = \hat{\mathbf{a}}(n) + \mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n) - \\ &\quad - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}\hat{\mathbf{a}}(n) - \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n). \end{aligned} \quad (331)$$

Itt a második és a negyedik tagot közös nevezőre hozva:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n) + \mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n) - \mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)} = \\ &= \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)\mathbf{z}(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)} = \mathbf{G}(n)\mathbf{z}(n). \end{aligned} \quad (332)$$

A bevezetett jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}(n+1) &= \hat{\mathbf{a}}(n) + \mathbf{G}(n)[\mathbf{z}(n) - \mathbf{u}(n)\hat{\mathbf{a}}(n)] \\ \mathbf{G}(n) &= \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}{1 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)} \\ \mathbf{P}(n+1) &= [\mathbf{I} - \mathbf{G}(n)\mathbf{u}(n)]\mathbf{P}(n) \end{aligned} \quad (333)$$

összefüggések adják a rekurzív számításhoz szükséges képleteket. Ezek használatához szükség van még az $\hat{\mathbf{a}}(0)$ és $\mathbf{P}(0)$ kiindulási értékre. Ezeket vagy meg tudjuk becsülni, vagy megoldjuk az LS becslést a paraméter vektor dimenziójának megfelelő mérési adat alapján, és annak eredményét használjuk az iteratív megoldás kiindulópontjaként.

Ha az LS kritériumot kiegészítjük egy $\mathbf{Q}(n) = \text{diag}\langle q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \rangle$ súlyozó mátrixszal, akkor a következő iterációs lépésben $\mathbf{Q}(n+1) = \text{diag}\langle q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n \rangle$ súlyozás érvényesítendő. Ehhez a mátrix inverziós lemma \mathbf{C} mátrixát $\mathbf{C} = 1$ helyett $\mathbf{C} = q_n$ skálár értékre kell állítanunk, aminek következtében – a többi összefüggés változatlansága mellett:

$$\mathbf{G}(n) = \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}{1/q_n + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)} \quad (334)$$

Ezzel teljes összhangban, ha súlyozó mátrix egy diagonális kovariancia-mátrix inverze, azaz $\mathbf{Q}(n) = \text{diag}\langle 1/\sigma_0^2, 1/\sigma_1^2, \dots, 1/\sigma_{n-1}^2 \rangle$, akkor a fenti összefüggések

$$\mathbf{G}(n) = \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}{\sigma_n^2 + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)} \quad (335)$$

módosítással használhatók. Ha a kovariancia mátrix nem lenne diagonális, akkor a megismert fehérítési eljárás alkalmazásával, azaz egy transzformáció közbeiktatásával juthatunk el a rekurzív forma alkalmazhatóságához. Mindezekkel együtt rekurzív megoldást tudunk adni a Gauss-Markov, a BLUE és a súlyozott LS becslések esetére.

Egy további hasznos súlyozási forma lehet a $\mathbf{Q}(n) = \text{diag}\langle \beta^{n-1}, \beta^{n-2}, \dots, 1 \rangle$ súlyozómátrix alkalmazása, ahol $0 < \beta < 1$. Ekkor a következő iterációs lépésében $\mathbf{Q}(n+1) = \text{diag}\langle \beta^n, \beta^{n-1}, \beta^{n-2}, \dots, 1 \rangle$, vagyis a legutolsó mérési adattal képzett négyzetes hiba 1 súllyal szerepel, míg a korábbiak rendre kisebbel. Egy ilyen súlyozó mátrix esetén

$$\mathbf{G}(n) = \frac{\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}{\beta + \mathbf{u}(n)\mathbf{P}(n)\mathbf{u}^T(n)}, \quad \mathbf{P}(n+1) = \frac{1}{\beta}[\mathbf{I} - \mathbf{G}(n)\mathbf{u}(n)]\mathbf{P}(n) \quad (336)$$

Ezzel egy felejtő hatást érvényesítünk, ami nemstacionárius folyamatok esetén előnyös lehet, hiszen a korábbi méréseket egyre kisebb súllyal érvényesítjük a számítás során.

Méréselmélet: 6. LS becslők rekurzív számítása

Megjegyzés: Ilyen jellegű hatást érvényesít az ún. exponenciális átlagoló is, amelynél az egyszerű vagy lineáris átlagolásnál szereplő egyre csökkenő súlytényező helyett egy konstans súlyt ($0 < b < 1$) szerepeltetünk:

$$\begin{aligned}\hat{x}(n+1) &= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}[y(n) - \hat{x}(n)] \rightarrow \hat{x}(n+1) \\ &= \hat{x}(n) + b[y(n) - \hat{x}(n)]\end{aligned}\quad (337)$$

Ekkor, $\hat{x}(0) = 0$ feltételezésével, $\hat{x}(1) = by(0)$,

$$\begin{aligned}\hat{x}(2) &= by(0) + b[y(1) - by(0)] = by(1) + b(1-b)y(0) \\ \hat{x}(3) &= by(2) + b(1-b)y(1) + b(1-b)^2y(0) \\ \hat{x}(n+1) &= by(n) + b(1-b)y(n-1) + \dots + b(1-b)^ny(0)\end{aligned}\quad (338)$$

Az exponenciális átlagoló konstans együtthatós, így fel tudjuk írni az átviteli függvényét:

$$\frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{bz^{-1}}{1 - (1-b)z^{-1}},\quad (339)$$

ami egy rögzített sáv szélességű aluláteresztő szűrőnek felel meg. Az egyszerű átlagolást ebben a megközelítésben egy lépésről-lépésre csökkenő sáv szélességű szűrőként interpretálható.

Megjegyzés: A felejtés egy drasztikusabb formáját valósítják meg az ún. csúszó-ablakos jelfeldolgozási módszerek, amelyek rendre a legutolsó N mérési adatra alapozva adják a feldolgozás eredményét. Ezekkel a későbbi fejezetekben foglalkozunk.

6.2. LS becslők számítása kényszerfeltétel esetén

Tételezzük fel, hogy a becslendő \mathbf{a} paraméter kielégíti az $\mathbf{Aa} = \mathbf{b}$ kényszerfeltételt. Ekkor feltételes szélsőértéket keresünk a Lagrange multiplikátoros technika segítségével:

$$\begin{aligned}J(\mathbf{a}) &= (\mathbf{z} - \mathbf{Ua})^T (\mathbf{z} - \mathbf{Ua}) + \lambda^T (\mathbf{Aa} - \mathbf{b}), \\ \frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} &= -2\mathbf{U}^T (\mathbf{z} - \mathbf{Ua}) + \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{0}.\end{aligned}\quad (340)$$

Ebből a kényszerfeltételt kielégítő $\hat{\mathbf{a}}_c$ megoldás:

$$\hat{\mathbf{a}}_c = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} - [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T \frac{\lambda}{2}.\quad (341)$$

Mivel ez kielégíti a kényszerfeltételt ($\hat{\mathbf{a}}$ a kényszer nélküli becslőt jelöli):

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{a}}_c = \mathbf{A} [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z} - \mathbf{A} [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T \frac{\lambda}{2} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{A} [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T \frac{\lambda}{2} = \mathbf{b}.\quad (342)$$

Ebből

$$\frac{\lambda}{2} = [\mathbf{A} [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T]^{-1} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{b}),\quad (343)$$

amivel

$$\hat{\mathbf{a}}_c = \hat{\mathbf{a}} - [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{A} [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{A}^T]^{-1} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{b}).\quad (344)$$

6.3. Nemlineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők számítása

A megfigyelési modell $\mathbf{s}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{U}\mathbf{a}$. A kritériumfüggvény deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(\mathbf{a}))^T (\mathbf{z} - \mathbf{s}(\mathbf{a})) = -2 \frac{\partial \mathbf{s}^T(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(\mathbf{a})) = -2\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (345)$$

A Newton módszer szerint a $\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ egyenlet iteratív megoldása:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} &= \frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}_0)}{\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_1}, \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_0 - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}_0)}{\left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0}}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{a}_1)}{\left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_1}}, \dots \end{aligned} \quad (346)$$

De kiindulhatunk $\mathbf{s}(\mathbf{a})$ Taylor sorából is:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{a}) &= \mathbf{s}(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^T \left. \frac{\partial^2 \mathbf{s}(\mathbf{a})}{\partial^2 \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (347)$$

$\left. \frac{\partial \mathbf{s}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} = \mathbf{U}(\mathbf{a}_0)$ jelöléssel, és a második deriváltat tartalmazó tag elhanyagolásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{a}) &\approx \mathbf{s}(\mathbf{a}_0) + \mathbf{U}(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0), \\ \left. \frac{\partial \mathbf{s}^T(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(\mathbf{a})) &= \mathbf{U}^T(\mathbf{a}_0)[\mathbf{z} - [\mathbf{s}(\mathbf{a}_0) + \mathbf{U}(\mathbf{a}_0)(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)]] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (348)$$

ahonnan

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 + [\mathbf{U}^T(\mathbf{a}_0)\mathbf{U}(\mathbf{a}_0)]^{-1}\mathbf{U}^T(\mathbf{a}_0)[\mathbf{z} - \mathbf{s}(\mathbf{a}_0)]. \quad (349)$$

De kiindulhatunk $J(\mathbf{a})$ Taylor sorából is:

$$J(\mathbf{a}) = J(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)^T \left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{a})}{\partial^2 \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0) + \dots \quad (350)$$

Ha $J(\mathbf{a})|_{min} = 0$, akkor kiindulhatunk az első két tagból, és a többi elhanyagoljuk, akkor $\left. \frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} = \nabla J(\mathbf{a}_0)$ jelöléssel:

$$\begin{aligned} \nabla J^T(\mathbf{a}_0)\nabla J(\mathbf{a}_0)\hat{\mathbf{a}} &= \nabla J^T(\mathbf{a}_0)\nabla J(\mathbf{a}_0)\mathbf{a}_0 - \nabla J^T(\mathbf{a}_0)J(\mathbf{a}_0), \\ \hat{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}_0 - [\nabla J^T(\mathbf{a}_0)\nabla J(\mathbf{a}_0)]^{-1}J(\mathbf{a}_0). \end{aligned} \quad (351)$$

Ha $J(\mathbf{a})|_{min} \neq 0$, akkor a $\nabla J(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ feltétel teljesülését keressük, például az első és a másodrendű tag figyelembevételével, azaz a többi elhanyagolásával:

$$\nabla J(\mathbf{a}) = \mathbf{0} = \left. \frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} + \left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{a})}{\partial^2 \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} (\mathbf{a} - \mathbf{a}_0), \quad (352)$$

ahonnan:

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 - \left[\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{a})}{\partial^2 \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \right]^{-1} \left. \frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} = \mathbf{a}_0 - \left[\left. \frac{\partial^2 J(\mathbf{a})}{\partial^2 \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \right]^{-1} \nabla J(\mathbf{a}_0), \quad (353)$$

Méréselmélet: 6. LS becslők rekurzív számítása

amit Gauss-Newton módszernek is nevezünk.

Megjegyzés: Egyes feladatok alkalmas transzformációval visszavezethetők lineáris paraméter-függésre. Például a következő hullámforma ismeretlen A és φ paramétereinek meghatározása nemlineáris LS probléma.

$$s(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (354)$$

Ha azonban az ezzel ekvivalens felírás

$$s(n) = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi) = B \cos(2\pi f_0 n) + C \sin(2\pi f_0 n) \quad (355)$$

B és C paramétereit becsüljük, akkor a sokkal egyszerűbb lineáris LS problémát kell megoldanunk, és a keresett jellemzőket pedig transzformációval kapjuk:

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{-C}{B}\right) \quad (356)$$

7. Modellszerű jelfeldolgozás

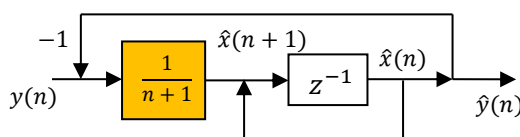
A fejezet keretében a modellszerű jel-reprezentáció kérdéseivel foglalkozunk. Az alkalmazott megközelítés lényege, hogy a jeleket az őket generálni képes modellekkel reprezentáljuk, és ezeknek a modelleknek a feltételezésével megfigyelőket készítünk. A keresett jel-jellemzők a megfigyelő jellemzőiből kiolvashatók.

7.1. Az alapok felidézése

Előjáróban a digitális jelfeldolgozás legalapvetőbb módszereit tekintjük át. Ezek között kiemelt szerepet kapnak a rekurzív átlagolások.

- Egyszerű átlagolás (lásd **38. ábra**):

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \\ &= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} [y(n) - \hat{x}(n)] \end{aligned} \quad (357)$$



38. ábra. Az egyszerű átlagolás blokkvázlata

Vegyük észre, hogy itt $\mathbf{A} = \mathbf{C} = 1$, $\mathbf{G}(n) = \frac{1}{n+1}$. $\mathbf{G}(n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

- Exponenciális átlagolás (lásd **39. ábra**):

(Ezzel már az előző fejezetben találkoztunk, lásd (337) – (339) összefüggések.)
Időtartománybeli leírása:

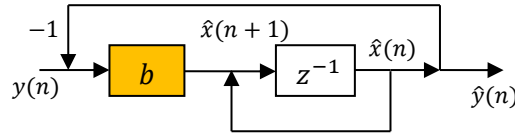
$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + by(n), \quad (358)$$

ahol a és b konstansok. A frekvenciatartománybeli viselkedés leírására használható a z -transzformáció: $z\hat{X}(z) = a\hat{X}(z) + bY(z)$, amiből kifejezhető az exponenciális átlagoló átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}}. \quad (359)$$

Ez egy alul-áteresztő szűrő, amely, ha konstans jelet kap, akkor a tranziens lejátszódása kimenetén ugyanez a konstans jelenik meg. Ehhez pedig az kell, hogy (359) ennek megfelelően legyen normálva, vagyis $H(z) = 1$, ha $z = 1$. Ezzel (359) behelyettesítési értéke $\frac{b}{1-a} = 1$, vagyis $a = 1 - b$. Ezzel a (358) összefüggés:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + b(y(n) - \hat{x}(n)). \quad (360)$$



39. ábra. Az exponenciális átlagoló blokkvázlata

Vegyük észre, hogy itt is $A = C = 1$, továbbá $G(n) = b$. Ennek megfelelően ilyenkor a megfigyelt új értéket egy konstanssal szorozzuk, ellentétben a lineáris átlagolással.

Megjegyzések:

1. A (360) összefüggés felhasználásával (v.ö. (338)):

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= 0, \hat{x}(1) = by(0), \\ \hat{x}(2) &= \hat{x}(1) + b(y(1) - \hat{x}(1)) = by(1) + (1 - b)by(0), \\ \hat{x}(3) &= \hat{x}(2) + b(y(2) - \hat{x}(2)) = by(2) + b(1 - b)y(1) + b(1 - b)^2y(0), \\ \hat{x}(n + 1) &= by(n) + b(1 - b)y(n - 1) + \dots + b(1 - b)^ny(0) \end{aligned} \quad (361)$$

2. A (361) összefüggés alapján jól látható, hogy mivel $0 < b < 1$, a régebbi mintákat egyre kisebb súllyal vesszük figyelembe. A (361) összefüggés úgy is származtatható, hogy a (359) összefüggést mértani sor alakba rendezzük.

3. Az exponenciális átlagolás egy rögzített sáv szélességű aluláteresztő szűrésnek felel meg. Hozzá képest az egyszerű átlagolás úgy illusztrálható, mint folyamatosan egyre kisebb sáv szélességű aluláteresztő szűrő.

- Csúszó-ablakos (sliding window, moving average) átlagolás (lásd 40. ábra):

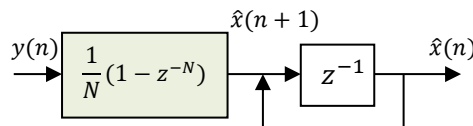
$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n + 1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n y(k) = \\ &= \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n - N)] \end{aligned} \quad (362)$$

Itt is $A = C = 1$, de a becsatolás módja más. Itt is tudjuk értelmezni az átlagoló átviteli függvényét, mert (362) z-transzformáltja:

$$z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}(1 - z^{-N})Y(z), \quad (363)$$

amiből:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} 1 - z^{-N}}{N 1 - z^{-1}} \quad (364)$$



40. ábra. A csúszó-ablakos átlagolás blokkvázlata

Megjegyzések:

- $1 - z^{-N}$ osztható az $1 - z^{-1}$ tényezővel, az eredmény: $1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}$, ami azt fejezi ki, hogy N egymást követő mintát adjunk össze.
- A $1 - z^{-N}$ tényező gyökei az N -edik egységgyökök: $\sqrt[N]{1} = z$.

1. Példa: Két érték egyszerű átlaga, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \quad (365)$$

illetve a z-transzformációval:

$$z\hat{X}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} Y(z), \quad (366)$$

ebből az átviteli függvény:

$$H(z) = z^{-1} \frac{1 + z^{-1}}{2}. \quad (367)$$

$z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1 + e^{-j\omega T}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \cos \frac{\omega T}{2}. \quad (368)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $|H(e^{j\omega T})| = \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right|$, a fázis-karakterisztika: $\phi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T = k\pi$ helyen ($k = \pm 1, \pm 3, \dots$) (az előjelváltás miatt) π fázisugrással. Lásd **41. ábra**.

2. Példa: Két érték különbsége, egyszerű differenciálás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) - y(n-1)}{2}, \quad (369)$$

illetve a z-transzformációval:

$$z\hat{X}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2} Y(z), \quad (370)$$

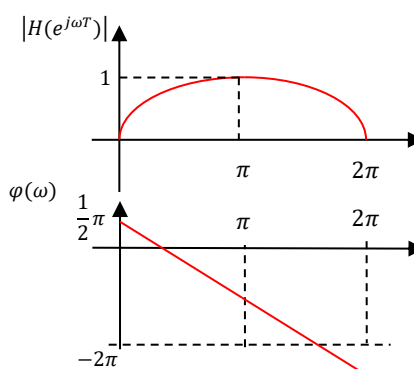
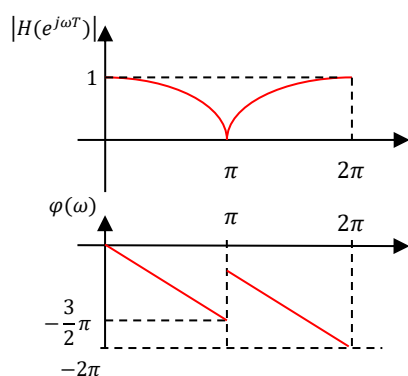
Az átviteli függvény:

$$H(z) = z^{-1} \frac{1 - z^{-1}}{2} \quad (371)$$

$z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{2} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \sin \frac{\omega T}{2}, \quad (372)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $|H(e^{j\omega T})| = \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|$, a fázis-karakterisztika: $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T = k2\pi$ helyen, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (az előjelváltás miatt) π fázisugrással. Lásd **42. ábra**.



41. ábra. Egyszerű átlag karakterisztikái 42. ábra. Egyszerű differenciálás karakterisztikái

3. Példa: Csúszó-ablakos átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

A (364) összefüggés szerint az átviteli függvény $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T}}{N} \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N} \frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N} \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (373)$$

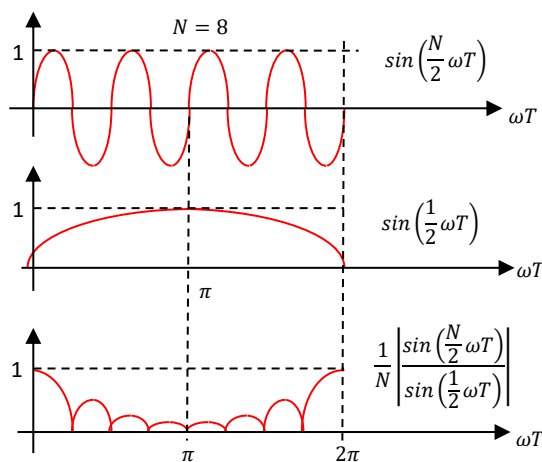
Ebből az amplitúdó-karakterisztika:

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|, \quad (374)$$

(lásd 43. ábra), a fázis-karakterisztika:

$$\phi(\omega) = -\frac{N+1}{2} \omega T \quad (375)$$

az $\omega T = k \frac{2\pi}{N}$ helyen, ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) (az előjelváltás miatt) π fázisugrással, kivéve azokat a helyeket, ahol $\sin \frac{\omega T}{2}$ is előjelet vált.



43. ábra. A csúszó-ablakos átlagoló amplitúdó-karakterisztikája

7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

Jelterek: az euklideszi tér általánosításai

- általánosított távolság → metrikus tér
- algebrai alapműveletek + linearitás → lineáris tér
- norma (kapcsolat a metrikával) → normált lineáris tér
- skalár v. belső szorzat → $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$.

Lineáris vektortér:

Bázisvektorok: $\phi_m, m = 0, 1, \dots, N - 1$. Ezekkel az x vektor reprezentációja:

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \phi_m, \quad (376)$$

ahol $\{\alpha_m\}, m = 0, 1, \dots, N - 1$, a báziselemekből készített lineáris kombináció súlytényezője. Meghatározása:

$$(\mathbf{x}, \phi_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\phi_m, \phi_n), \quad (377)$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$, egyenletrendszer megoldásával.

Hasznos az ún. reciprok bázis alkalmazása: $\theta_m, m = 0, 1, \dots, N - 1$, ahol

$$(\phi_m, \theta_n) = \delta_{mn}, \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (378)$$

Ezzel:

$$(\mathbf{x}, \theta_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\phi_m, \theta_n), \quad \alpha_m = (\mathbf{x}, \theta_m), \quad (379)$$

vagyis

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} (\mathbf{x}, \theta_m) \phi_m = \sum_{m=0}^{N-1} (\mathbf{x}, \phi_m) \theta_m. \quad (380)$$

A bázis ortonormált, ha $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$, amivel

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} (\mathbf{x}, \phi_m) \phi_m. \quad (381)$$

Megjegyzés: $\phi_m = [\phi_m(0), \phi_m(1), \dots, \phi_m(N - 1)]^T$, ahol a zárójelben megadott indexek értelmezhetők diszkrét időindexként.

Lineáris tér:

A bázisok folytonos függvények (végtelen dimenziós „vektorok”), azaz $\phi_m \rightarrow \phi_m(t), \theta_m \rightarrow \theta_m(t)$. Ezzel az $x(t)$ jel reprezentációja:

$$x(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ (-\infty)}}^{\infty} \alpha_m \phi_m(t), \text{ ahol } \alpha_m = (x(t), \theta_m(t)) \quad (382)$$

Példa:

Fourier sorfejtés: $\phi_m(t) = \exp(j2\pi mt)$, $\theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt)$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Integrál-transzformáció:

a bázisoknál m szerint is végtelen finom felbontás, ill. végtelen dimenzió: a bázisokból összeáll egy kétváltozós függvény, a súlyozó együttható helyére pedig egy egyváltozós függvény lép. $m \rightarrow s$, ilyenkor

$$x(t) = \int_S \alpha(s) \phi(t, s) ds \quad \alpha(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt \quad (383)$$

integrál-transzformáció párok.

Példa: Fourier integrál: $\phi(t, s) = 1/\theta(s, t) = \exp(j2\pi st)$.

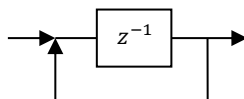
Megjegyzések:

1. Diszkrét integrátor: a **44. ábrán** látható rendszer időtartományi leírása:

$$\hat{x}(n + 1) = \hat{x}(n) + y(n), \quad (384)$$

átviteli függvénye:

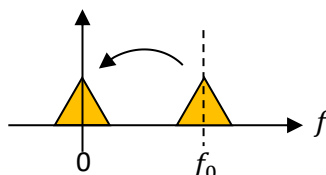
$$\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (385)$$



44. ábra. A diszkrét integrátor blokkvázlata

Egy ilyen rendszer a bemenetére adott értékeket az előző összeghez adja. Figyeljük meg, hogy az átviteli függvény átírásakor felhasználtuk a mértani sor összegképletét.

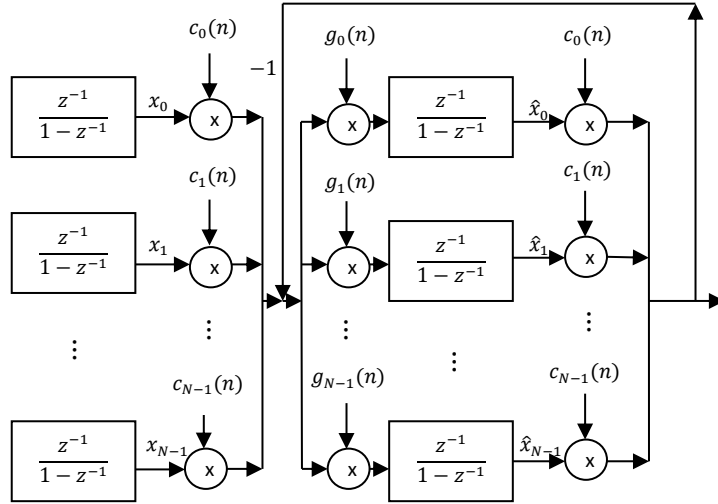
2. A Fourier integrál hatása: Az $x(t)$ jelet szorozzuk az $\exp(-j2\pi f_0 t)$ komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik f_0 -val. (Lásd **45. ábra.**) Az integrálás végtelen keskeny alul-áteresztő szűrőnek felel meg, amelynek kimenetén az f_0 frekvenciánál érvényes spektrum-értéket kapjuk.



45. ábra. Frekvencia transzpozíció

7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

Jelölés: $\{c_m(n)\}$, $\{g_m(n)\}$ jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket, $m, n = 0, 1, \dots, N - 1$. A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel. A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják. (lásd 46. ábra.)



46. ábra. Megfigyelő jelreprezentáció céljára

Ezek az értékek a jelet generáló hipotetikus rendszer $\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$ állapotváltozóit. Ezek $\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \dots \ \hat{x}_{N-1}(n)]^T$ becslőjét megfigyelővel állítjuk elő. A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$\mathbf{x}(n + 1) = \mathbf{x}(n); \quad y(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n), \quad (386)$$

a megfigyelőt leíró egyenletek pedig:

$$\hat{\mathbf{x}}(n + 1) = \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n)[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)] \quad (387)$$

A hibarendszer:

$$\mathbf{x}(n + 1) - \hat{\mathbf{x}}(n + 1) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n))[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)], \quad (388)$$

illetve a kezdeti értékek eltéréséből indítva:

$$\mathbf{x}(n + 1) - \hat{\mathbf{x}}(n + 1) = \prod_{k=0}^n (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k))[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)] \quad (389)$$

N lépéses konvergenciát akkor kapunk, ha:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{0}. \quad (390)$$

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

Ez viszont teljesül, ha $\{c_m(n)\}$, és $\{g_m(n)\}$ bázis/reciprok bázis párt alkotnak ($m, n = 0, 1, \dots, N-1$), ugyanis minden olyan tag, melyben szerepel $\mathbf{g}(i)\mathbf{c}^T(i)\mathbf{g}(j)\mathbf{c}^T(j)$, és $i \neq j$: nullát ad a bázis/reciprok bázis elemek ortogonalitásának köszönhetően, továbbá

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{I} - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{g}(i)\mathbf{c}^T(i) = \mathbf{0}. \quad (391)$$

Megjegyzések:

1. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:

$$\{c_m(n) = \exp(j\frac{2\pi}{N}mn)\}, \quad \{g_m(n) = \frac{1}{N}\exp(-j\frac{2\pi}{N}mn)\} \quad (392)$$

2. A $\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k) = \mathbf{I}$ bizonyítása: Írjuk fel a $\mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)$ diadikus szorzatot:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_{N-1}(k) \end{bmatrix} [c_0(k) \quad c_1(k) \quad \cdots \quad c_{N-1}(k)] = \\ & = \begin{bmatrix} g_0(k)c_0(k) & g_0(k)c_1(k) & \cdots & g_0(k)c_{N-1}(k) \\ g_1(k)c_0(k) & g_1(k)c_1(k) & \cdots & g_1(k)c_{N-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(k)c_0(k) & g_{N-1}(k)c_1(k) & \cdots & g_{N-1}(k)c_{N-1}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (393)$$

Ha ezek után, k -t futtatva, minden mátrix elemre végrehajtjuk az összegzést, akkor minden elem helyén egy-egy bázis-reciprok bázis vektor skalár-szorzatát számítjuk ki, aminek eredményeképpen a főátlóban 1-esek, az összes többi helyen pedig 0-ák fognak állni.

3. Az $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ jeltranszformáció értelmezése a bázis/reciprok bázis rendszerrel: Először írjuk fel, hogyan képzeljük el a jel létrejöttét. (Lásd ehhez a **46. ábrát** is.)

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0(0) & c_1(0) & \cdots & c_{N-1}(0) \\ c_0(1) & c_1(1) & \cdots & c_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0(N-1) & c_1(N-1) & \cdots & c_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (394)$$

ahol az \mathbf{x} vektor elemei a mátrix oszlopaiként megjelenő bázis vektorok súlytényezői. A jel-transzformáció célja a jelből (\mathbf{y} vektor) kinyerni ezeket a súlytényezőket. Ennek módja az \mathbf{y} vektor szorzása a

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^T \\ \mathbf{g}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(0) & g_0(1) & \cdots & g_0(N-1) \\ g_1(0) & g_1(1) & \cdots & g_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(0) & g_{N-1}(1) & \cdots & g_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \quad (395)$$

mátrixszal. Az eredmény – (394) és (395) összevetésével – éppen az \mathbf{x} vektor. A jel-transzformáció mátrixának sorai tehát a reciprok-bázis vektorok.

4. A **46. ábrán** szereplő megfigyelővel a „megfigyelés” az első N lépés után folytatható, a kapott eredmény mindig az utolsó N mintára vonatkozik (Csúszó-ablakos feldolgozás). Ehhez

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(N) &= \mathbf{c}(0), & \mathbf{c}(k) &= \mathbf{c}(k \bmod N) \\ \mathbf{g}(N) &= \mathbf{g}(0), & \mathbf{g}(k) &= \mathbf{g}(k \bmod N) \end{aligned} \quad (396)$$

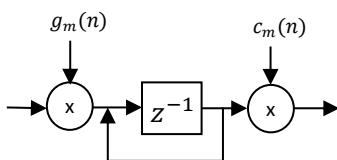
- Az ábra szerinti sémában tetszőleges diszkrét transzformáció megvalósítható csúszó-ablak (rekurzív) jelleggel. A számításigény N hosszú blokkra $\sim N^2$ -tel arányos, egy újabb lépés számításigénye pedig $\sim N$ -tel.
- Gyakran használjuk a diszkrét Fourier transzformáció párt, amelynek összefüggései:

$$\begin{aligned} x(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \\ y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (397)$$

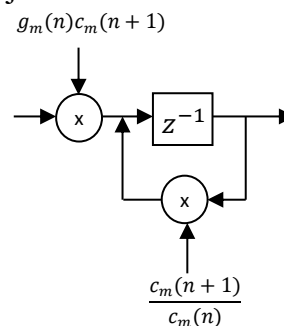
Itt $y(n)$ a feldolgozandó diszkrét időfüggvény mintáit jelöli, $x(m)$ pedig a harmonikus komponensek súlytényezőit. A megfigyelő sémával megvalósítható rekurzív diszkrét Fourier transzformációt RDFT = Rekurzív DFT módon hivatkozunk.

- A késleltető elemből, konstanssal történő szorzásból és az összeadásból felépülő, időben diszkrét hálózatok sajátfüggvénye a komplex exponenciális. Ebből fakadóan az RDFT másképpen is megvalósítható.
- A folytathatóság értelmezhető általánosabban: az első N lépés után a bázis/reciprok bázis vektorok első elemét olyan értékekkel helyettesítjük, hogy megmaradjanak a bázis/reciprok bázis rendszerekre vonatkozó tulajdonságok. Példa: nem-harmonikus sin/cos komponensekre bontás.

Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés: Rajzoljuk át a **46. ábra** belső részegységét a **47. ábrán** látható módon.

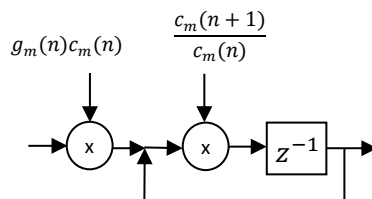


47. ábra. Diszkrét integrátor keverők között



48. ábra. Rezonátor kialakítása (1. lépés)

Toljuk be a bázisvektor-elemmel történő szorzást a késleltető elem visszacsatoló hurkába (lásd **48. ábra**). Egy további lépésként toljuk tovább ezt a szorzást a hurokban, amivel a DFT esetén olyan elrendezést kapunk, amely több előnyös tulajdonsággal rendelkezik (lásd **49. ábra**).



49. ábra. Rezonátor kialakítása (2. lépés)

Vegyük észre, hogy ezzel az átalakítással az elrendezés független lett az n diszkrét időváltozótól, mert a DFT esetében

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$\frac{c_m(n+1)}{c_m(n)} = e^{j\frac{2\pi}{N}m} = z_m, \quad g_m(n)c_m(n) = \frac{1}{N} \quad (398)$$

Az átalakítással létrejött részegységet rezonátornak nevezzük, mert egyetlen (komplex) pólusa az egységsugarú körön, és ezzel a stabilitás határán helyezkedik el. Egy ilyennek az átviteli függvénye az m -edik csatorna esetében:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}. \quad (399)$$

Kitérő: A valós együtthatós és a komplex együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés kapcsolata

Ha a jel egy periódusa N mintából áll, és időtartama N/f_m , ahol f_m a mintavételi frekvencia, akkor a valós együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés:

N páros esetén: $0, \frac{f_m}{N}, 2\frac{f_m}{N}, \dots, \frac{f_m}{2}$ frekvenciájú komponensekből, N páratlan esetén pedig: $0, \frac{f_m}{N}, 2\frac{f_m}{N}, \dots, (N-1)\frac{f_m}{2N}$ frekvenciájú komponensekből fog állni. Egy $y(n)$ diszkrét jel sorfejtett alakja:

N páros esetén:

$$\begin{aligned} y(n) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} [A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)] + \frac{A_N}{2} \cos(\pi n) = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j} \right] \\ &\quad + \frac{A_N}{2} \frac{e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}}{2} = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} \left[\left(\frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left(\frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] + \frac{A_N}{2} e^{j\pi n} \end{aligned} \quad (400)$$

N páratlan esetén pedig:

$$\begin{aligned} y(n) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} [A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)] = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j} \right] = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[\left(\frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left(\frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] \end{aligned} \quad (401)$$

A diszkrét Fourier transzformáció (már korábban is szerepeltetett) összefüggései:

Méréselemélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (402)$$

A kétfajta jelölés összekapcsolásával N páros esetén:

$$A_0 = Y(0), \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k), k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, A_{\frac{N}{2}} = Y\left(\frac{N}{2}\right),$$

$$\frac{A_{k-\frac{N}{2}} + jB_{k-\frac{N}{2}}}{2} = C_{k-\frac{N}{2}}^* = Y(k), k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - 1 \quad (403)$$

A kétfajta jelölés összekapcsolásával N páratlan esetén:

$$A_0 = Y(0), \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k), k = 1, \dots, \frac{N-1}{2},$$

$$\frac{A_{k-\frac{N-1}{2}} + jB_{k-\frac{N-1}{2}}}{2} = C_{k-\frac{N-1}{2}}^* = Y(k), k = \frac{N+1}{2}, \dots, N - 1. \quad (404)$$

Látható, hogy a komplex forma sokkal tömörebb írásmódot tesz lehetővé. A továbbiakban a komplex formát használjuk. (Kitérő vége.)

Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés (folytatás):

A megfigyelő egyetlen csatornájának átviteli függvénye:

$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \quad (405)$$

Fontos tulajdonság, hogy $T_m(z)|_{z=z_m} = 1$, ill. $T_m(z)|_{z=z_n, z \neq z_m} = 0$. A rezonátor pólusnak megfelelő frekvencián a hurokerősítés végtelen. Az átvitelt a visszacsatoló hálózat átvitele határozza meg, ami a jelen esetben 1. Ebből adódóan ezeken a frekvenciákon kedvező az elrendezés paraméterérzékenysége.

A megfigyelő csatornáinak összegzésével létrejövő kimenetre vonatkozó átviteli függvény:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \quad (406)$$

Fontos tulajdonság, hogy $H_p(z)|_{z=z_n} = 1$. Mivel ez a megfigyelő N lépésben konvergált, és utána már hibátlanul előállítja a bemenőjelet, ezért $H_p(z) = z^{-N}$ kell, hogy legyen. A (406) összefüggés számlálóját és nevezőjét is szorozva $\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1}) = 1 - z^{-N}$ tényezővel

$$H_p(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{(1 - z^{-N}) + \underbrace{\frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}_{z^{-N}}} = z^{-N} \quad (407)$$

A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} &= \sum_{n=0}^{N-1} (z_n z^{-1} + (z_n z^{-1})^2 + (z_n z^{-1})^3 + \dots) = \\ &= N(z^{-N} + (z^{-N})^2 + (z^{-N})^3 + \dots) = N \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}} \end{aligned} \quad (408)$$

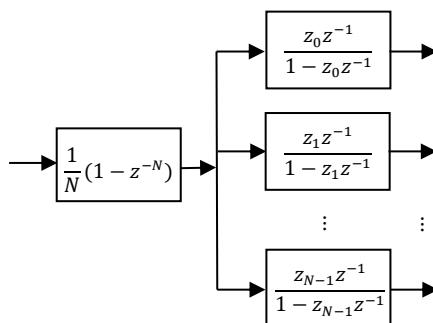
mivel az N -edik egységgyökök (és hatványaik) összege a N -edik hatvány kivételével nulla.

A (407) összefüggés vizsgálata azt mutatja, hogy $H_P(z)$ alternatív megvalósítása a **50. ábrán** látható elrendezés, ahol az m -edik csatorna átviteli függvénye:

$$T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}, \quad (409)$$

és amelynek összegzett átviteli függvénye:

$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}. \quad (410)$$



50. ábra. Alternatív megvalósítás

Megjegyzések:

1. A (409) összefüggés $m = 0$ esetén ($z_0 = 1$) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével. Impulzusválasza/súlyfüggvénye az m -edik bázisvektor, amely N mintából áll.
2. A (409) összefüggés a **43. ábrán** látható amplitúdó-karakterisztikájú szűrőt eredményez azzal a különbséggel, hogy a sávközepe nem nulla frekvencián, hanem a z_m gyöktényező által kijelölt frekvencián van. Ez a frekvencia a mintavételi frekvencia m/N -szeresénél van. A szűrő a N szélességű ablakra nézve periodikus jelek komponenseit, a m -edik kivételével, tökéletesen kiszűri, mert a harmonikus frekvencia pozíciókban a számláló átvitele nulla.
3. A (409) összefüggés véges impulzusválaszú szűrőt (csúszó ablakos szűrőt) ír le, mert számlálóját osztható a nevezőjével. Számlálóját az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek m indexű fogát a pólus „kitöri”. A számláló megvalósítása nagyon egyszerű, amit korán felismertek.
4. Az **50. ábrán** látható struktúrát Lagrange struktúrának nevezik, mert a Lagrange interpoláció frekvenciatartománybeli megvalósítására alkalmas. Az egyes csatornák átviteli függvényei a Lagrange polinomoknak feleltethetők meg, a

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

frekvenciatartományban értelmezhető interpoláció pedig ezek lineáris kombinációja révén jön létre.

5. Ennek megfelelően a Lagrange struktúrát véges impulzusválaszú (FIR) szűrők megvalósítására (is) használják az alábbi összefüggés szerint:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n T_n(z) \quad (411)$$

azaz az egyes csatornakimenetek lineáris kombinációját képezzük. Mivel $w_n = H(z_n)$ módon határozható meg, az eljárását frekvencia-mintavételi eljárásnak nevezik.

6. A (409) összefüggés a stabilitás határán lévő rendszert ír le, mert rezonátort tartalmaz, amely bemeneti jel nélkül is képes kimeneti jelet produkálni, ha nullától különböző kezdeti értékről indítjuk a működését. A pólus pozíció pontos beállítása numerikus problémákat vet ütközik: a pólus-zérus kiejtés nem lesz tökéletes.
7. A numerikus/stabilitási problémák csökkentése érdekében felvethető megoldások: (a) az $1 - z^{-N}$ polinom helyett $\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})$ valósítandó meg, mégpedig azonos módon, mint a pólusokat. A nemideális pólusok kiejtésére egy hasonlóan nemideális zérus alkalmazásával keríthetünk sort; (b) Megfigyelő elrendezést alkalmazunk, ahol az egymást kiejtő zérust és pólust ugyanaz a hardver valósítja meg.
8. A megfigyelő alapú struktúra kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Lagrange struktúra. Mint a későbbiekben látni fogjuk, miközben minden olyan feladat ellátásra alkalmas, amire a Lagrange struktúrát kitalálták, számos egyéb lehetőséget is kínál: (a) Lagrange interpoláció tetszőleges (de különböző) rezonátor pólusok esetében; (b) tetszőleges átviteli függvény pólus megvalósítása.
9. Az eddigiekben tárgyalt átviteli függvények mind valós együtthatósak, ill. valós együtthatós formára hozhatók. Ezzel együtt jár, hogy a gyökök vagy valósak, vagy konjugált komplex párban jelentkeznek. A z_m komplex rezonátor pólusnak a $z_m^* = 1/z_m = z_m^{-1}$ konjugáltja mindig fellelhető. Ezzel az jár, hogy a függvényeket a $-\pi \leq \frac{2\pi}{N}m \leq \pi$ tartományban, illetve a $-f_M/2 \leq \frac{m}{N}f_M \leq f_M/2$ értelmezzük, ahol f_M a mintavételi frekvencia, m pedig a rezonátor pozíciók azonosítója: $-N/2 \leq m < N/2$.
10. A valóságban másodfokú, valós együtthatós rezonátorokkal érdemes dolgozni, amelyekhez úgy jutunk el, hogy a konjugált komplex póluspárokkal rendelkező csatornafüggvényeket (a) összeadjuk, ekkor mindkét csatorna átvitele (egymással megegyező) reális részének kétszeresét kapjuk az összegzett csatorna kimenetén; (b) kivonjuk, ekkor mindkét csatorna átvitele (egymástól csak előjelben különböző) képzetes részének kétszeresét kapjuk a két csatorna különbségként.
11. A (409) összefüggéssel leírt elrendezésbe nem épül be a jelet generáló rendszer modellje, ilyen értelemben az evvel történő feldolgozás nem tekinthető modell alapúnak.
12. A 100%-ban negatív visszacsatolású rezonátor-struktúra kedvező tulajdonságai analógiába hozhatóak a hasonlóképpen visszacsatolt műveleti erősítő tulajdonságaival: az igen nagy hurokerősítés nagy pontosságot tesz lehetővé.

A rekurzív jelreprezentáció sajátosságai:

- (1) soros-párhuzamos átalakító: az időtartományban értelmezhető N mintából, az N minta beérkezését követően előáll a párhuzamos csatornákon N adat, amely egyértelműen reprezentálja az N időtartománybeli mintát.

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

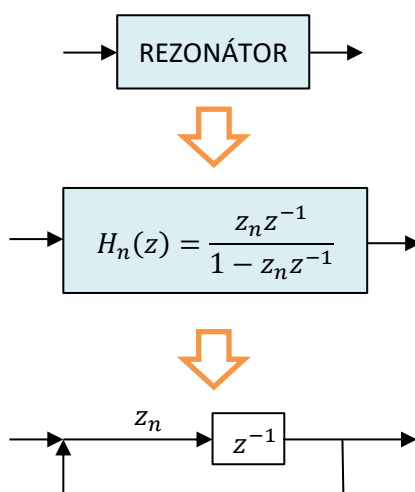
- (2) A számítást folytatva további N mintára ismét előáll a transzformált tartománybeli reprezentáció. Így folytatva, rendre az N mintából álló adatblokk egyértelmű reprezentációját kapjuk a blokkméretnek megfelelő mértékű mintavételi-frekvencia csökkentéssel (ún. decimációval.)
- (3) Az ilyen előállítás minden lépésben a legutolsó N minta transzformáltját adja, azaz csúszó-ablakos/rekurzív transzformációt valósít meg.

A megvalósított transzformációk a (395) szerint felépülő mátrixok, amelyek a rekurzív előállítás következtében interpretálhatók N csatornás szűrőkként, ahol a szűrők kimenete kétféleképpen képezhető:

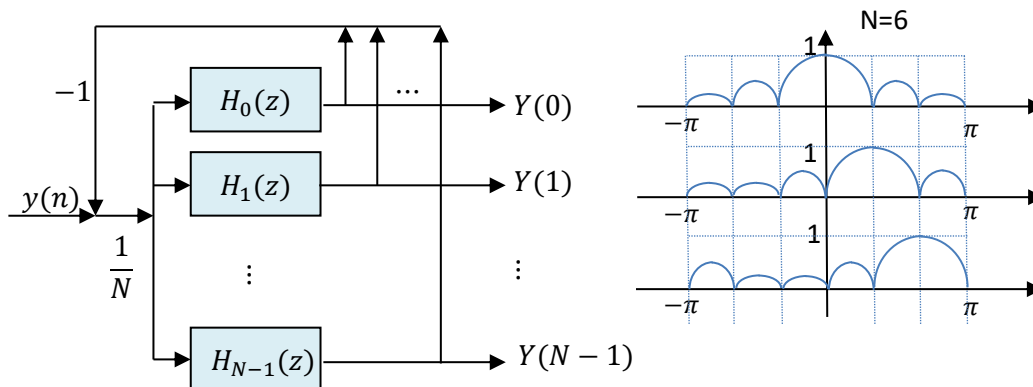
- (a) A **46. ábrán** látható diszkrét integrátorok kimenete, mint szűrő kimenet, amely folyamatosan az $n = 0$ időpontban indított, majd periodikusan folytatott bázis-vektorok súlytényezőit becsüli (Fourier esetben ezek a diszkrét „Fourier-sorfejtés” együtthatói). Ideális esetben (N -re periodikus, megfelelően sávkorlátozott jel), miután a megfigyelő az első N lépésben konvergált, a bemenőjel tulajdonságaiból fakadóan a diszkrét integrátorok kimenete állandó marad;
- (b) A **46. ábrán** látható, diszkrét integrátorok utáni keverők, ill. az **50. ábra** szerinti diszkrét rezonátorok kimenetei, amely a legutolsó N minta Fourier transzformáltját szolgáltatják, amelyek megegyeznek a folyamatosan a feldolgozott jel komponenseinek aktuális mintáival (Fourier esetben ezek az ún. „Fourier komponensek”). Ezek a komponensek minden N periódus kezdetén megegyeznek a bázis-vektorok előzőekben értelmezett súlytényezőivel.

A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor (RDFT)

Az eddigiek részbeni összefoglalásaként tekintsük át a rezonátor alapú rekurzív Fourier transzformátor jellemzőit! Az **51. ábra** az egyes rezonátorokat mutatja be. A **52. ábra** a teljes struktúrát illusztrálja. Egyes csatornáinak átviteli függvényét a (409), az összegzett átviteli függvényt pedig a (410) összefüggés írja le.



51. ábra. Rezonátorok alternatív megjelenítései



52. ábra. A rezonátor alapú visszacsatolt struktúra

Megjegyzések:

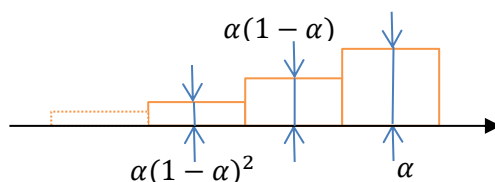
1. A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor jelútjainak megfordításával - ezzel az ún. transzponált struktúrához jutunk - egy N bemenetű és egyetlen kimenetű szűrőt kapunk. Ez egy párhuzamos-soros átalakító, amelynek bemenetére N lépésenként elhelyezett bemeneti érték („impulzus”) súlyozza az adott bemenethez tartozó komplex exponenciális bázisfüggvényeket: ezek lineáris kombinációjaként jön létre a generált jel. A transzponált struktúra tehát egy jelgenerátort valósít meg. Az ebben megvalósuló visszacsatolás biztosítja, hogy az egyes rezonátorok ne éljenek „önálló életet”, pontatlanságaik a működés során ne akkumulálódjanak, mint a visszacsatolás mentes rezonátorok esetében.
2. Csak páratlan harmonikus komponenset tartalmazó jelek esetén érdekes lehet a -1 egységgyökeire alapozott bázis/reciprok bázis készlet, ill. transzformáció. Ilyenkor az első bázisvektor egy félperiódusú komplex exponenciális, a második egy másfél periódusú, stb. Ilyenkor $H_p(z) = -z^{-N}$, azaz a N lépésnyi késleltetés mellett fázist is fordít.
3. Ha a (406) összefüggésben az $1/N$ tényező helyett α/N szerepel, ahol $0 < \alpha < 1$, akkor a csúszó ablakos transzformációt kombinálni tudjuk az exponenciális átlagolással. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő, N hosszúságú blokkokat felejtő hatással átlagoljuk. Ilyenkor (406)

$$H_p(z) = \frac{\frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - z^{-N} + \alpha z^{-N}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - (1 - \alpha) z^{-N}} \quad (412)$$

formában írható, ami a mértani sor összegképletével

$$H_p(z) = \alpha z^{-N} + \alpha(1 - \alpha) z^{-2N} + \alpha(1 - \alpha)^2 z^{-3N} + \dots, \quad (413)$$

vagyis az egymástól N távolságra lévő mintákat egyre csökkenő súllyal vesszük az átlagolásnál figyelembe. Ugyanez a hatás az egyes csatorna kimenetek esetében a N hosszúságú blokkok alapján kiszámított komponens-minták exponenciális átlagolását eredményezi. Lásd 53. ábra.



53. ábra. Illusztráció a blokkos felejtéshez

7.3.1. A rezonátor alapú megfigyelő, mint univerzális jelfeldolgozó eszköz

Általánosítsuk a (399) összefüggést az alábbi módon:

$$H_m(z) = \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \quad (414)$$

Írjuk fel ezzel a $H_p(z)$ átviteli függvényt:

$$H_p(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} \quad (415)$$

Ha véges impulzusválaszú (FIR) viselkedést akarunk biztosítani, akkor a (415) összefüggés nevezőjének az alábbi kötetést kell teljesíteni:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}, \quad (416)$$

mert ebben az esetben lesz a (415) összefüggés z^{-1} polinomja, azaz véges impulzusválaszú. Ehhez a $\{g_m\}$ és az $\{r_m = g_m/z_m\}$ súlytényezőket

$$g_m = \frac{z_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (417)$$

alapján tudjuk meghatározni. FIR szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás szabályai szerint, az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként valósítunk meg. Lásd (411) összefüggés.

Megjegyzések:

1. A rezonátor pólus pozíciók szabadon megválaszthatók (de legyenek különbözők).
2. Ha a rezonátor pólus pozíciók az N -edik egységgyökök, akkor $r_m = 1/N$ minden m -re.

Ha végtelen impulzusválaszú (IIR) viselkedést akarunk, és adottak a megvalósítandó p_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$, akkor (416) és (417) megfelelője:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})} \quad (418)$$

$$g_m = z_m \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (419)$$

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

A szűrő kimenőjelét ebben az esetben is az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként kapjuk.

Megjegyzés: A rekurzív jeltranszformátor, továbbá FIR és IIR szűrő megvalósítására egyaránt alkalmas rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.

Kapcsolat a Lagrange interpolációs polinommal:

Adott $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ún. alappontok felett egy függvény értékei: $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$,... $y_{N-1} = y(x_{N-1})$. Az ezeken a pontokon "áthaladó" Lagrange interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}, \quad (420)$$

ahol

$$a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)} \quad (421)$$

Az összefüggések egybevetésével látható, hogy a frekvencia-mintavételi eljárás (lásd (411) összefüggés) a Lagrange interpolációnak felel meg, és az is, hogy nem csak az N -edik egységgyökök esetében használható.

Megjegyzés:

Hermite interpoláció: (többszörös rezonátor pólusok esete). Ha az x_m alappontban egy függvényből $N_0(m)$ számú adat (érték, első derivált értéke, második derivált értéke, stb.) áll rendelkezésre, akkor az ún. Hermite interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} a_{mi} x^i}{(x - x_m)^{N_0(m)}} \quad (422)$$

ill. a megfelelő digitális szűrő-készlet

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} A_{mi} z^{-i}}{(1 - z_m z^{-1})^{N_0(m)}} \quad (423)$$

amelynek közös zérusai, a Lagrange interpolációhoz hasonlóan előállíthatók a közös visszacsatolás segítségével. A különbség csak annyi, hogy a multiplicitásnak megfelelő számú rezonátor sorosan kapcsolódik.

7.3.2. A passzivitás feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél

Kedvezőek azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők. Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében

$$H_P(z) = \frac{a + jb}{1 + a + jb} \quad (424)$$

alakú, ahol a és b valós. Annak feltétele, hogy $|H_P(z)| \leq 1$ legyen: $a \geq -0.5$. Mivel

$$a = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z) \quad (425)$$

illetve

$$\begin{aligned} 2a &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} + \frac{g_n^* z}{1 - z_n^* z} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1} - g_n z_n^{-1} + g_n^* z - g_n^* z_n}{2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\operatorname{Re} \left[\frac{g_n}{z_n} \right] (2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z) + j \operatorname{Im} \left[\frac{g_n}{z_n} \right] (z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)}{(2 - z_n z^{-1} - z_n^{-1} z)} \geq -1, \end{aligned} \quad (426)$$

ami z értékétől függetlenül teljesül, ha

$$\operatorname{Im} \left[\frac{g_n}{z_n} \right] = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (427)$$

Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left[\frac{g_n}{z_n} \right] = \sum_{n=0}^{N-1} r_n \leq 1 \quad (428)$$

Megjegyzések:

1. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre (428) teljesül.
2. Stabil szűrők esetén az r_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$ pozitív szám.
3. A jelenséget strukturális stabilitásnak nevezzük, mert a (428) „globális” feltételtől eltekintve a paramétereiktől független a „passzivitás” tulajdonság.
4. A (419) összefüggés alapján

$$r_m = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{n=0, n \neq m}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})} \quad (429)$$

5. A tervezés menete: (1) a pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy r_m valós legyen; (2) a (429) alapján az r_m értékek kiszámítása; (3) a rezonátor-pólus pozíciók által kijelölt frekvenciákon az átviteli függvény „mintavételezése”, és ezzel a súlyozó együtthatók meghatározása.

Példa: Másodfokú, végtelen impulzusválaszú szűrő megvalósítása. Első lépésként megválasztjuk a rezonátor pozíciókat:

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$N = 2, \quad z_0 = 1, \quad z_1 = -1, \quad H_0(z) = r_0 \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad H_1(z) = r_1 \frac{-z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (430)$$

Megvalósítandó:

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-2}} \quad (431)$$

$$H(z) = \frac{H_0(z)w_0}{1+H_0(z)+H_1(z)} + \frac{H_1(z)w_1}{1+H_0(z)+H_1(z)}$$

A frekvencia-mintavétel eredménye:

$$w_0 = H(z)|_{z=1} = 1, \quad w_1 = H(z)|_{z=-1} = -1 \quad (432)$$

Amivel

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})r_0z^{-1} + (1-z^{-1})r_1z^{-1}}{1-z^{-2} + (1+z^{-1})r_0z^{-1} - (1-z^{-1})r_1z^{-1}} = \quad (433)$$

$$= \frac{(r_0+r_1)z^{-1} + (r_0-r_1)z^{-2}}{1 + (r_0-r_1)z^{-1} + (r_0+r_1-1)z^{-2}} = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-2}}$$

ahonnan:

$$r_0 = r_1 = \frac{1-r}{2}. \quad (434)$$

Megjegyzések:

1. Ha

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-2}}, \quad (435)$$

akkor

$$w_0 = \frac{1-r}{1+r} w_1 = -\frac{1-r}{1+r}, \quad (436)$$

azaz a rezonátor kimeneteket leosztjuk, ami fixpontos számítások esetén numerikusan előnytelen lehet.

2. Ha $z_0 = j$, $z_1 = -j$, akkor ugyanerre az átviteli függvényre $w_0 = -j$, $w_1 = j$, tehát nincs leosztás, mindössze a kicsatolás „képzetes”. Ilyenkor:

$$H_0(z) = r_0 \frac{jz^{-1}}{1-jz^{-1}}, \quad H_1(z) = r_1 \frac{-jz^{-1}}{1+jz^{-1}}, \quad (437)$$

amivel a fenti összefüggések:

$$H(z) = \frac{(1+jz^{-1})r_0z^{-1} + (1-jz^{-1})r_1z^{-1}}{1+z^{-2} + (1+jz^{-1})r_0z^{-1} - (1-jz^{-1})r_1z^{-1}} = \quad (438)$$

$$= \frac{(r_0+r_1)z^{-1} + j(r_0-r_1)z^{-2}}{1 + j(r_0-r_1)z^{-1} - (r_0+r_1-1)z^{-2}} = \frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-2}}$$

ahonnan:

$$r_0 = r_1 = \frac{1-r}{2}. \quad (439)$$

Ha $H_0(z)$ és $H_1(z)$ konjugált komplex párok, akkor $r_0 = r_1$, azaz $H(z)$ valós együtthatós lesz.

3. A 2. pont szerinti rezonátor pólus pozíciók az $1+z^2$ polinom gyökei, tehát -1 gyökei. Vegyük észre, hogy $(1+z^2)(1-z^2) = 1-z^4$, tehát $+1$ negyedik gyökei.

7.3.3. További transzformációk megvalósítása

A „jelcsatornák” párhuzamos kimeneteinek lineáris kombinációjával újabb transzformációk hozhatók létre. Azt, hogy ezzel a lehetőséggel élünk-e, leginkább aszerint határozzuk meg, hogy számítástechnikailag mi előnyösebb:

- (a) Elképzelhető, hogy a rekurzív Fourier transzformáció (F) eredménye mindenképpen kell, akkor egy általános transzformációt, különösképp, ha annak csak részhalmaza szükséges, az alábbi összefüggéssel számolunk:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{V}_1\mathbf{F}\mathbf{y}, \quad (440)$$

ahol \mathbf{V}_1 négyzetes mátrix.

- (b) Elképzelhető, hogy a transzformáció megválasztásának szempontja a hatékony kiszámíthatóság. Erre nagyon jó példa a Walsh transzformáció (W), amelynek bázis/reciprok bázis vektorai – a közös normáló tényezőtől eltekintve – csak $+1$ és -1 értékeket vesznek fel. Lásd az **54. ábrát** $N = 8$ esetére.

Egy ilyen transzformáció használható adattömörítésre (ilyenkor az N időtartományi mintát M transzformált tartománybeli mintával reprezentáljuk) vagy a (430) összefüggéshez hasonlóan további transzformációk előállításánál használjuk:

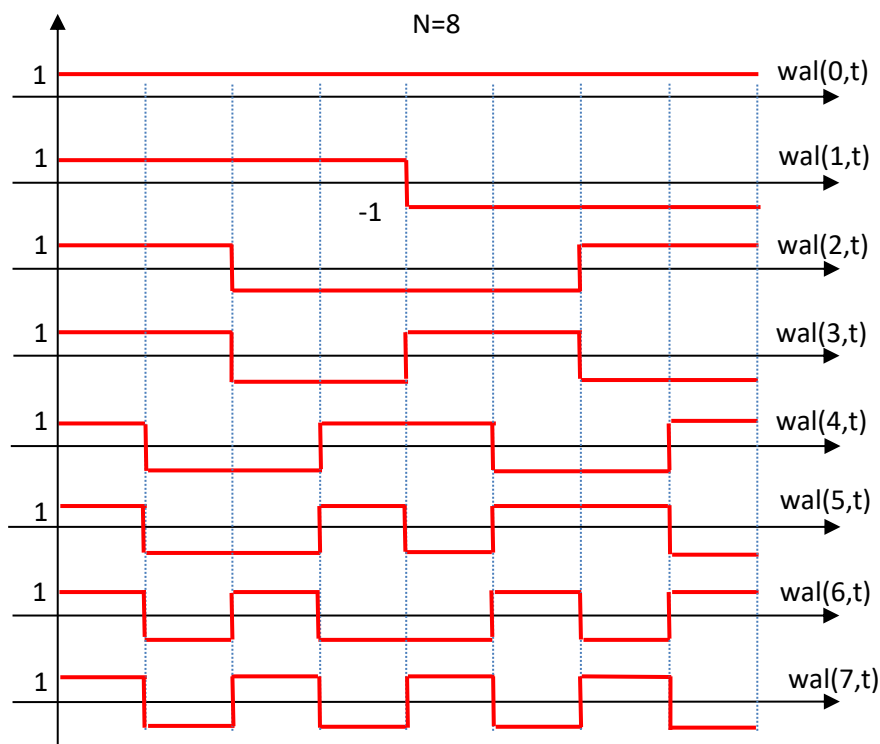
$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{V}_2\mathbf{W}\mathbf{y}, \quad (441)$$

ahol \mathbf{V}_2 négyzetes mátrix.

- (c) Kimutatták, hogy a Fourier transzformáció előállítása a Walsh transzformáció közbeiktatásával $N = 64$ pontig számítástechnikailag előnyösebb, mint közvetlenül:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{V}_3\mathbf{W}\mathbf{y} \quad (442)$$

ahol \mathbf{V}_3 négyzetes mátrix.



54. ábra. A Walsh transzformáció bázisfüggvényei $N = 8$ esetére

7.3.4. Másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagok

Valós együtthatós polinomok gyökei vagy valósak vagy konjugált komplex párok. Ugyanez igaz a belőlük származtatott rezonátoros alaptagokra. A párok összevonásával másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagokhoz jutunk. Valós aritmetikát alkalmazó jelfeldolgozó processzorokban ez utóbbiak alkalmazása életszerűbb. Első lépésként a konjugált komplex-pár alaptagok összegét képezzük, ezzel az átvitel valós részének kétszeresét kapjuk. Itt felhasználjuk, hogy z_m konjugáltja z_m^{-1} , és r_m valós.

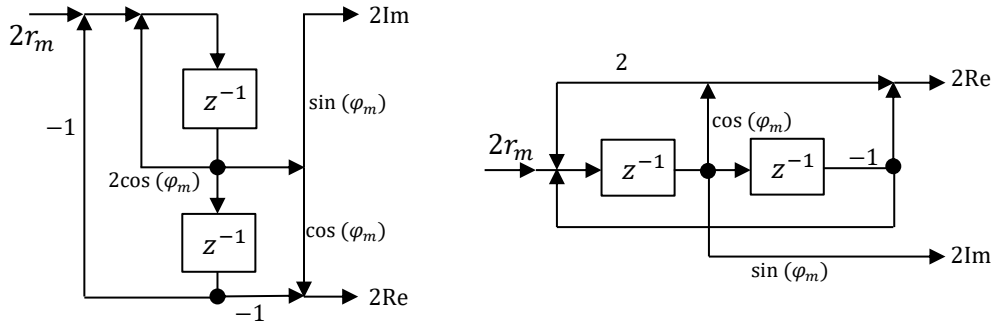
$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = 2r_m \frac{z^{-1} \cos \phi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2\text{Re}[csatorna_m] \quad (443)$$

A különbséget képezve az átvitel képzetes részének kétszeresét kapjuk:

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = j2r_m \frac{z^{-1} \sin \phi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2j\text{Im}[csatorna_m] \quad (444)$$

Megjegyzés:

1. A (443)-(444) összefüggésekből közvetlenül származtatható valós együtthatós rezonátor alaptag blokkvázlata az **55. ábrán** látható. Ezt direkt struktúrának nevezzük.



55. ábra. Direkt struktúrájú másodfokú rezonátor

Az ábra bal oldalán jól azonosítható a nevező polinom megvalósítása, és a valós, valamint a képzetes rész számítása. A jobboldali változat – kis átalakítással – a szorzás-műveletek minimalizálására törekszik.

2. A közös visszacsatolós struktúrában a valós együtthatós rezonátorok száma legfeljebb $N/2$.
3. A visszacsatolós struktúrában csak a (443) összefüggés szerinti kimeneteket kell összegezni, mert a képzetes részek összege nulla.
4. A frekvencia-mintavételi eljárás alkalmazása esetén a csatorna kimeneteket az ugyancsak konjugált komplex módon megjelenő w_m súlytényezővel kell megszorozni. Könnyen belátható, hogy a gyakorlati megvalósítás során az m indexű valós kimenet $Re w_m$ -mel, az m indexű képzetes kimenet $(-Im w_m)$ értékkel szorzandó. A direkt struktúra alkalmazása esetén ez utóbbi tényező összevonható a $\sin \phi_m$ tényezővel.

Ortogonalis struktúrák általában:

Az ún. ortogonalis struktúrák esetén belátható, hogy ha a számítások eredményének memóriába helyezést megelőző, praktikusán elkerülhetetlen kvantálását az ún. abszolút-érték csonkítás stratégiájával oldjuk meg, azaz amikor a tárolandó értékeket úgy kvantáljuk, hogy abszolút értékét vesszük és a kapott számot „lefelé” kerekítjük, akkor a számítások kisebb energiájú értékek felé visznek, így a számítások – nemlineáris hatások eredményeként – nem vezetnek oszcillációhoz, a belső energia felemésződik. Az ortogonalis struktúrákat azzal definiáljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \tag{445}$$

formájú rendszerleírásban, ahol most $y(n)$ és $u(n)$ jelölje a skalár kimenet és a skalár kimenet diszkrét időfüggvényét, $\mathbf{x}(n)$ pedig állapotvektorát: a $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$, azaz \mathbf{T} ortogonalis mátrix, hiszen oszlopai egymásra merőleges vektorok. Képezzük (445) mindkét oldalának önmagával vett skalár-szorzatát

$$[\mathbf{x}^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [\mathbf{x}^T(n) \quad u(n)] \mathbf{T}^T \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix}, \tag{446}$$

amit kifejtve

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n). \tag{447}$$

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

Ebben az esetben, ha feltételezzük, hogy a bemenet nulla, azaz $u(n)=0$, akkor (232)

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad (448)$$

alakban írható, amelynek értelmében, ha van nem nulla kimenőjel, akkor az állapotváltozók által hordozott belső energiának csökkennie kell. Ezt a tulajdonságot kiegészítve az abszolút-érték csonkítás stratégiájával garantálható, hogy a paraméterektől egyébként függetlenül a magára hagyott rendszer belső energiáját disszipálni fogja, ún. határciklus oszcillációk nem alakulnak ki.

Megjegyzés:

Ha a (428) összefüggésben az egyenlőség teljesül, akkor a rezonátoros struktúra, amit az RDFT, és tetszőleges FIR és IIR szűrő realizálására használhatunk, teljesíti az ortogonalitás feltételét, ha az állapotváltozó „becsatolás” és a „kicsatolás” vektora:

$$\mathbf{G}^T = [z_0\sqrt{r_0} \quad z_1\sqrt{r_1} \quad \dots \quad z_{N-1}\sqrt{r_{N-1}}], \quad \mathbf{C} = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1} \quad \dots \quad \sqrt{r_{N-1}}] \quad (449)$$

Figyeljük meg, hogy az eddig használt

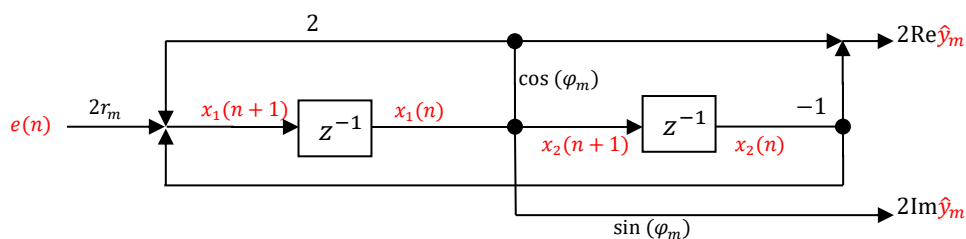
$$\mathbf{G}^T = [z_0r_0 \quad z_1r_1 \quad \dots \quad z_{N-1}r_{N-1}], \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \quad (450)$$

csak annyiban különbözik, hogy az egyes rezonátorokon belüli számítások „jelszintjét” másképpen állítjuk be.

A határciklus oszcillációk elkerülésére az abszolút-érték csonkítást az állapotváltozó értékek „tárolását” megelőzően kell elvégezni.

Másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagok (folytatás)

Az **56. ábrán** ismét lerajzoltuk a (443)-(444) összefüggések alapján származtatott számítási vázlatot, az ún. **direkt struktúra** szerinti rezonátort. Tekintsük a tároló-elemek tartalmát állapotváltozóknak, és adjuk meg a struktúra állapotváltozós leírását.



56. ábra. A direkt struktúra az állapotváltozók feltüntetésével

Ekkor a számítás összefüggései a rezonátor bemeneti jelét $e(n)$ -nel jelölve:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \phi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} e(n) \quad (451)$$

illetve a kimenetek:

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$2\text{Re}\hat{y}_m(n) = [\cos \phi_m \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}, \quad 2\text{Im}\hat{y}_m(n) = [\sin \phi_m \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}, \quad (452)$$

Megjegyzés: A számítások konkrét formája nem közömbös, ha fixpontos (jelfeldolgozó) processzorral vagy mikrovezérlővel valósítjuk meg. Gondot okoz (1) a számítások ún. dinamikatarományja, és (2) a véges számábrázolási pontosság. Ez utóbbi – bár a közös, 100%-os negatív visszacsatolás ez ellen dolgozik – rezonátorok esetén akár avval is járhat, hogy megvalósuló pólus az egységsugarú körön kívülre kerül, amivel nulla bemenet esetén is növekvő kimenőjel jár. A dinamikataromány problémáját jó illusztrálja a (451) szerinti állapotátmenet mátrix, mert ha a fixpontos számábrázolást 1-re normáljuk, azaz az ábrázolható legnagyobb érték egységnyi abszolút értékű, és feltételezzük például, hogy $\cos \phi_m \approx 1$, $x_1(n) \approx 0.5$, $x_2(n) \approx -0.5$, akkor azonnal látható, hogy a számábrázolási tartományból jelentősen kilépő eredményt kapunk, miközben az állapotváltozók a számábrázolási tartomány közepén lévő értékek voltak.

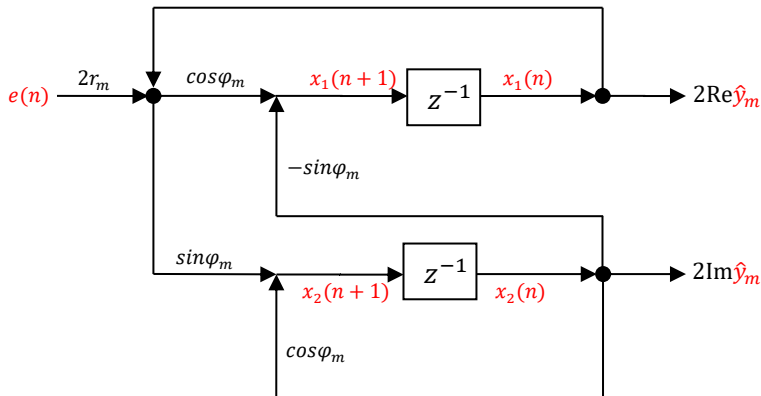
Ortogonalis rezonátor:

Hasonlósági transzformációval a (451)-(452) szerinti számítás a dinamikatarományt illetően kedvezőbb alakra hozható:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & -\sin \phi_m \\ \sin \phi_m & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \cos \phi_m \\ 2r_m \sin \phi_m \end{bmatrix} e(n) \quad (453)$$

$$2\text{Re}\hat{y}_m(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}, \quad 2\text{Im}\hat{y}_m(n) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}. \quad (454)$$

Ezt a számítási módot az **57. ábra** illusztrálja. Az így kiszámolt rezonátort ortogonalis rezonátornak nevezzük.



57. ábra. Az ortogonalis rezonátor blokkvázlata

Azt, hogy ez megfelel a (443)-(444) összefüggéseknek célszerűen úgy ellenőrizhetjük, hogy (453) z-transzformáltját képezzük:

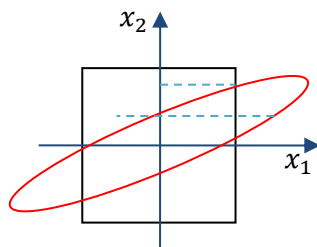
$$\begin{bmatrix} zx_1(z) \\ zx_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & -\sin \phi_m \\ \sin \phi_m & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \cos \phi_m \\ 2r_m \sin \phi_m \end{bmatrix} e(z), \quad (455)$$

majd először $x_2(z)$, utóbb $x_1(z)$ eliminálásával származtatjuk az $\frac{x_1(z)}{e(z)}$ és $\frac{x_2(z)}{e(z)}$ átviteli függvényeket. A (453) összefüggés alapján jól látszik, hogy az állapotváltozó vektorokat az

állapotátmenet mátrix csak elforgatja, végpontjuk mértani helye kör. A (454) összefüggés alapján pedig az látszik, hogy a valós-rész és a képzetes-rész kimeneteket maguk az állapotváltozók adják.

Megjegyzések:

1. A struktúra egyértelmű előnye a kedvező viselkedés a dinamikartomány szempontjából. Hátránya, hogy a rezonátor pólus pozíció origótól való távolságát – a (453) összefüggés vizsgálatával belátható módon – a $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ összefüggés felhasználásával állítja be, ami a valóságban, a véges számábrázolási pontosság következtében $[\sin^2 \phi]_Q + [\cos^2 \phi]_Q \cong 1$ formában valósul meg. Itt $[\dots]_Q$ a kvantálás műveletét szimbolizálja. További hátrány, hogy a (nem-elfajuló) szorzótényezők száma nagyobb, mint a direkt struktúra esetében.
2. A dinamikartomány probléma egy másik vonatkozása, hogy milyen következménnyel jár a túlcsoordulás fixpontos aritmetika esetén. A hatás mindenképpen nemlineáris, de nem mindegy, hogy ennek következtében a rezonátor belső energiája nő vagy csökken. Az **58. ábra** ezt illusztrálja a (451) szerinti állapotváltozós leírás esetére. A ferde ellipszis lenne az azonos energiájú pontok mértani helye, ha nem lenne túlcsoordulás.



58. ábra. Rezonátor energiaviszonyai fixpontos számábrázolás esetén

Ha áttérünk fixpontos ábrázolásra, akkor ez a ferde ellipszis metszi a számábrázolási tartományt, amire reagálni kell. Szokásos megoldások a következők:

- kettes komplement érték érvényesítése,
- a maximális érték helyettesítése,
- nulla helyettesítése.

Mindhárom stratégia esetén előfordulhat, hogy a ferde ellipszisen kívüli pontba kerülünk, ami nagyobb belső energiájú jelszintet eredményez. (Gondoljunk arra, hogy nulla bemenet esetén az oszcillátor a belső energiájának/kezdeti értékének megfelelően produkál kimenő jelet.) Ugyanez nem alakul ki az **ortogonális rezonátor** esetében, mert a túlcsoordulás után alkalmazott stratégiák mindegyike kisebb energiájú pontba viszi a rezonátort, hiszen az állapotváltozók vektorának végpontja ferde ellipszis helyett kör.

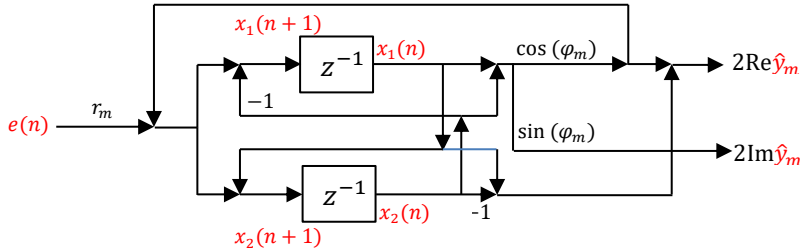
Az **58. ábrán** az is látható, hogy a korábban hivatkozott abszolútérték csonkítás – ferde ellipszis esetén – ugyancsak eredményezhet nagyobb belső energiát, ami nem kívánatos. Értelemszerűen az ortogonális rezonátor megoldást jelent, mert abszolútérték csonkítás esetén mindig alacsonyabb energiájú állapotba kerülünk.

3. A dinamika-tartomány, a szorzás-szám és túlcsoordulás esetén mutatott tulajdonságok együttes kompromisszuma az ún. **hullámdigitális** rezonátor (Lásd **59. ábra**), amelynél a dinamika viszonyok alakulását fekvő, ill. álló ellipszisek jellemzik, így a túlcsoordulás esetén mindig alacsonyabb energiájú pontba kerülünk. A számítási összefüggések állapotváltozós formája

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & \cos \phi_m - 1 \\ \cos \phi_m + 1 & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} e(n) \quad (456)$$

$$\begin{aligned} 2\text{Re}\hat{y}_m(n) &= [\cos \phi_m + 1 \quad \cos \phi_m - 1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}, \\ 2\text{Im}\hat{y}_m(n) &= [\sin \phi_m \quad \sin \phi_m] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (457)$$

ahol az összefüggések helyessége a fentiekhez hasonlóan bizonyítható.



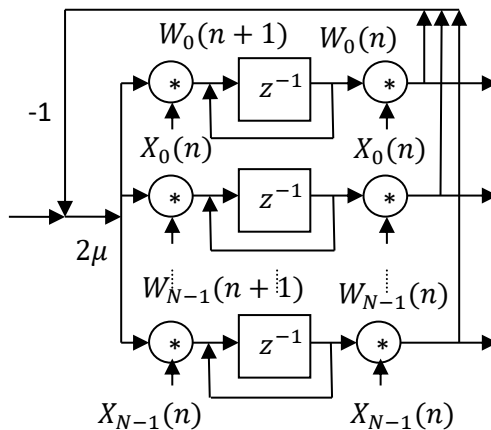
59. ábra. A hullámdigitális rezonátor blokkvázlata

7.4. A rekurzív DFT és az LMS eljárás kapcsolata

Az LMS eljárás (lásd (216)) lerajzolható (lásd 60. ábra) ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció (lásd 46. ábra). A (216) összefüggés komplex regressziós vektor esetén:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu \mathbf{X}^*(n)e(n), \quad (458)$$

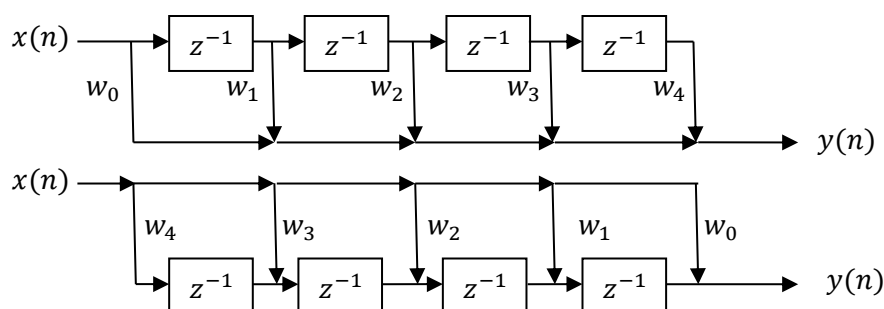
azaz a bázisvektor az $\mathbf{X}(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu \mathbf{X}^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstans szorosának felel meg. Ha $\mathbf{X}(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.



60. ábra. Az LMS eljárás számítási vázlata

7.5. Transzponált struktúra

A **61. ábra** a lineáris kombinátorral megvalósított FIR szűrőt, ill. transzponált változatát mutatja be. Ez utóbbi a nyílirányok megfordításával állítható elő. (A transzponált struktúra kedvezőbb lehet, ha a két-bemenetű összeadókat párhuzamosan akarjuk megvalósítani sebességi megfontolások alapján.) Ugyanez a transzponálási művelet a rezonátoros struktúra esetén szimmetrikus felépítésű „generátor-analizátor” párt eredményez, ezzel az analizátor struktúra kedvező (másodlagos) tulajdonságai a jelgenerátorra is érvényesíthető. A „jelgenerátor” használható párhuzamos-soros átalakítóként, amikor elegendő a bemeneti csatornákra csak minden N -edik lépésben nullától különböző bemeneti értékeket juttatni, mivel azok erre N hosszúságú választ képesek generálni.



6.1. ábra. Egyszerű transzverzális szűrő és transzponáltja

7.6. Ortogonális transzformáció adatredukciós céllal

Főkomponens analízis/Karhunen-Loéve transzformáció

Az eddigi jelöléseket alkalmazzuk. A reprezentálandó jel mintáit az \mathbf{y} a reprezentáló értékeket pedig az \mathbf{x} vektorba rendezzük. Célunk az utóbbi dimenziójának csökkentése átlagos négyzetes kritérium szerint optimálisan. Ehhez egy ortogonális bázis-reciprok bázis rendszert keresünk a jelhez:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad \mathbf{T}^T = [\boldsymbol{\phi}_0 \quad \boldsymbol{\phi}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_{N-1}], \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij} \quad (459)$$

Az \mathbf{y} reprezentációja a teljes, ill. a redukált rendszerben:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}^T \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad \hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{M-1} x_i \boldsymbol{\phi}_i + \sum_{i=M}^{N-1} b_i \boldsymbol{\phi}_i \quad (460)$$

Látható, hogy $M < N$ számú együtthatóval akarjuk reprezentálni a jelet, a maradék $N - M$ bázisvektor súlytényezőjét pedig hibaminimalizálással határozzuk meg. A közelítés hibája:

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=M}^{N-1} (x_i - b_i) \boldsymbol{\phi}_i \quad (461)$$

Az átlagos négyzetes hiba:

Méréselmélet: 7. Modellalapú jelfeldolgozás

$$\varepsilon = E\{|\Delta \mathbf{y}|^2\} = E\{(\Delta \mathbf{y})^T \Delta \mathbf{y}\} = \sum_{i=M}^{N-1} E\{(x_i - b_i)^2\}. \quad (462)$$

Első lépésben keressük a minimális hibát okozó b_i tényezőket. A (462) összefüggés deriválásával $b_i = E\{x_i\}$, $i = M, M + 1, \dots, N - 1$. Mivel $x_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{y}$, ezért

$$b_i = \boldsymbol{\phi}_i^T E\{\mathbf{y}\} = \boldsymbol{\phi}_i^T \bar{\mathbf{y}}, \quad (463)$$

amit behelyettesítve a (462) összefüggésbe:

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\phi}_i^T E\{(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T\} \boldsymbol{\phi}_i = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{yy} \boldsymbol{\phi}_i, \quad (464)$$

ahol \mathbf{C}_{yy} a reprezentálandó jel kovariancia mátrixa. Második lépésként keressük azt a $\boldsymbol{\phi}_i$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$ bázisrendszert, amelyre $\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i = 1$, és a hibát minimalizálja. Ehhez a feltételes szélsőérték kereséshez a Lagrange multiplikatós módszert alkalmazzuk:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \sum_{i=M}^{N-1} \beta_i [\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i - 1] = \sum_{i=M}^{N-1} [\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C}_{yy} \boldsymbol{\phi}_i - \beta_i [\boldsymbol{\phi}_i^T \boldsymbol{\phi}_i - 1]], \quad (465)$$

β_i , $i = M, M + 1, \dots, N - 1$, a Lagrange multiplikátor. Deriválunk $\boldsymbol{\phi}_i$ szerint:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\phi}_i} = 2\mathbf{C}_{yy} \boldsymbol{\phi}_i - 2\beta_i \boldsymbol{\phi}_i. \quad (466)$$

A (466) összefüggés egyenlő nulla feltételből:

$$\mathbf{C}_{yy} \boldsymbol{\phi}_i = \beta_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad (467)$$

azaz a Lagrange multiplikátorok az \mathbf{y} vektor \mathbf{C}_{yy} kovariancia mátrixának alkalmas sajátértékei. Ezt visszahelyettesítve a (464) kifejezésbe:

$$\varepsilon_{min} = \sum_{i=M}^{N-1} \beta_i \quad (468)$$

azaz az átlagos négyzetes értelemben legkisebb közelítési hiba eléréséhez bázisvektorokként az \mathbf{y} kovariancia mátrixának sajátvektorai közül azt a M darabot kell kiválasztani, amelyhez az M legnagyobb sajátérték tartozik. (Ezek az ún. főkomponensek.) A (468) összefüggés szerint ugyanis a közelítés átlagos négyzetes hibáját a legkisebb $M - N$ darab sajátérték összege adja. (Korábban már láttuk, hogy a kovariancia mátrix tulajdonsága, hogy sajátértékei pozitív számok.)

Megjegyzés: Ugyancsak korábban tárgyaltak felhasználásával:

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{T} \mathbf{C}_{yy} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \mathbf{C}_{yy} \mathbf{T}^T = \text{diag} \langle \beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{N-1} \rangle \quad (469)$$

8. A nemlineáris jelfeldolgozás alapjai

Jellemzés: (1) A szuperpozíció hiánya; (2) Az általános elmélet hiánya.

Próbálkozások: (1) speciális bemenőjelek, (2) speciális struktúrák, (3) sorfejtések alkalmazása, (4) nemlineáris szűrők.

Az első három esetben sok vonatkozás a lineáris elméletből.

8.1. Speciális bemenőjelek

Színuszos bemenőjel, leíró függvény módszer: a kimenőjel Fourier komponenseire színuszos analízis. Hagyományosan így kezeljük a klasszikus nemlineáris áramköröket, mint az egyenirányítókat, oszcillátorokat, tápegységeket.

8.2. Speciális struktúrák

a dinamikus rész lineáris, és kiegészül statikus nem-linearitásokkal. A lineáris rész kezelhető frekvenciatartománybeli módszerekkel, a nemlineáris marad az időtartományban. Periodikus bemenet esetén iteratív megoldás (pl. harmonic balance technique.)

Homomorf jelfeldolgozás: a szuperpozíció általánosítása. A szuperpozíció az alábbi tulajdonság:

$$\begin{aligned} T[x_1(n) + x_2(n)] &= T[x_1(n)] + T[x_2(n)] \\ T[cx_1(n)] &= cT[x_1(n)] \end{aligned} \quad (470)$$

ahol T egy rendszer transzformáció.

Általánosítás:

- \oplus jelöli a „+” műveletet a bemeneten,
- \circ jelöli a „+” műveletet a kimeneten,
- $:$ jelöli a „c”-vel való szorzást a bemeneten,
- \neg jelöli a „c”-vel való szorzást a kimeneten.

$$\begin{aligned} H[x_1(n) \oplus x_2(n)] &= H[x_1(n)] \circ H[x_2(n)] \\ H[c: x_1(n)] &= c\neg H[x_1(n)], \end{aligned} \quad (471)$$

ahol H egy rendszer transzformáció.

Példa: multiplikatív homomorf rendszerek: $\oplus \rightarrow$ szorzás, $:$ \rightarrow hatványozás.

$$x(n) = [x_1(n)]^\alpha [x_2(n)]^\beta \quad (472)$$

1. lépés:

$$\hat{x}(n) = \log[x(n)] = \alpha \log[x_1(n)] + \beta \log[x_2(n)] = \log|x(n)| + j \arg[x(n)] \quad (473)$$

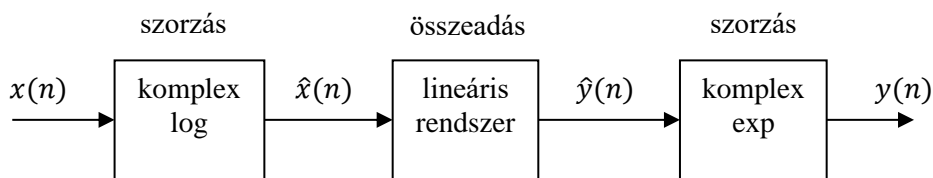
2. lépés: feldolgozás lineáris hálózattal:

$$\hat{x}(n) \rightarrow \hat{y}(n) \quad (474)$$

3. lépés:

$$y(n) = e^{\hat{y}(n)} = e^{|\hat{y}(n)|} e^{j \arg[\hat{y}(n)]} \quad (475)$$

Lásd **62. ábra**. Az eljárás multiplikatív jellegű zavarok elnyomására jól használható.



62. ábra. Multiplikatív zajok elnyomása

8.3. Sorfejtések alkalmazása

- munkaponti linearizálás: „kicsiben” minden lineáris.
- nemlineáris állapot- és megfigyelési egyenlet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \\ \mathbf{y}(k) &= \Psi[\mathbf{x}(k), k] \end{aligned} \quad (476)$$

Az állapotegyenletet az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ és $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ pontban “linearizálva” (Taylor sorba fejtve) a következő alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(k+1) &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, k} \Delta \mathbf{x}(k) + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, k} \Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{A}(k) \Delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k) &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, k} \Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{C}(k) \Delta \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (477)$$

Ezzel egy kis környezetben lineáris egyenletrendszerre visszavezetve oldjuk meg a problémát. A következő lépésben “kicsit” továbblépve újból linearizálunk, és így haladunk tovább. Fogalmazhatunk úgy, hogy szakaszonként linearizálunk.

- Volterra sorok alkalmazása: A konvolúciós integrál általánosítása. Egyváltozós esetben a rendszer leírása:

$$y(t) = F[u(\tau); t_0 \leq \tau \leq t] + y(t_0) \quad (478)$$

F egy funkcionál (függvény függvénye), amelyet funkcionálok sorozatával közelítünk:

$$\begin{aligned} F_0 &= h_0(t) \\ F_1 &= h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 \\ F_2 &= h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} h_2(t, \tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \vdots \\ F_N &= h_0(t) + \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} h_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) u(\tau_1) u(\tau_2) \dots u(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \end{aligned} \quad (479)$$

Méréselmélet: 8. A nemlineáris jelfeldolgozás alapjai

Ezek felhasználásával: $F[u(\tau); t_0 \leq \tau \leq t] = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$, és ebből a Volterra-sor (funkcionál hatványsor):

$$y(t) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t h_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) u(\tau_1) u(\tau_2) \dots u(\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k + y(t_0) \quad (480)$$

Lineáris rendszermodell esetén:

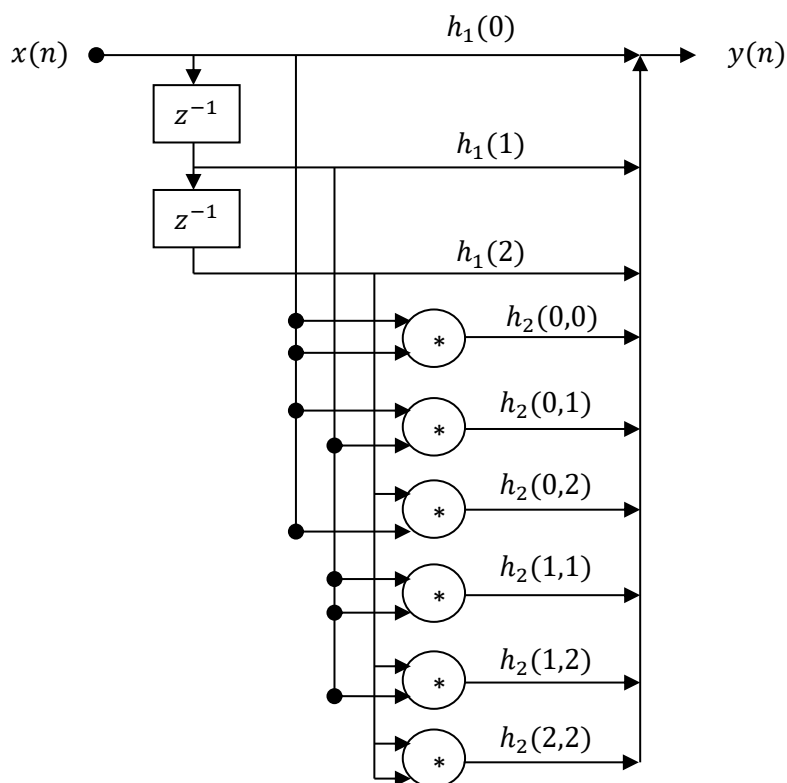
$$y(t) = h_0(t) + \int_{t_0}^t h_1(t, \tau_1) u(\tau_1) d\tau + y(t_0) \quad (481)$$

Ha a rendszernek nincsen dinamikus eleme, azaz a rendszer egy statikus nemlinearitást valósít meg, akkor a vázolt módszer közönséges hatványsorra vezet: $h_0(t) = c_0$, $h_1(\tau) = c_1 \delta(\tau)$, $h_2(\tau_1, \tau_2) = c_2 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2)$, ..., amivel (c_0, c_1, c_2, \dots , alkalmas konstansok):

$$y(t) = c_0 + c_1 u(t) + c_2 u^2(t) + \dots \quad (482)$$

Megjegyzés:

A fenti megfontolások időben diszkrét esetben is használhatók. Ha a nemlinearitás polinom révén valósul meg, akkor ún. polinomiális szűrőkről beszélünk. Egy másodfokú polinomiális szűrő blokkvázlatát mutatja a **63. ábra**. Itt $x(n)$ és korábbi mintái mellett ezen minták négyzete és szorzataik is részt vesznek a kimenet meghatározásában lineáris kombináció segítségével. Az ilyen rendszereknél az adaptivitást/tanulást az eddigiek szerinti iteratív eljárások felhasználásával is megkísérelhetjük. (Lásd adaptív lineáris kombinátor.)



63. ábra. Egyszerű polinomiális szűrő

Méréselmélet: 9. Gyakorló feladatok

1. Két konstans érték között ugrásszerűen változó jelet detektálunk két zajos megfigyelésre alapozva. A megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók a és $7a$ ($a = 3$) várható értékkel, $\sigma_n = 0.5$ szórással. H_0 jelzi azt a hipotézist, hogy a jel a értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_0=0.9$. H_1 jelzi az a hipotézist, hogy a jel $7a$ értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_1=0.1$. A feltételes sűrűségfüggvények:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}} \text{ ill. } \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(z-7a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 0$. Határozza meg a döntési küszöb értékét! Mi a feltétele annak, hogy a döntési küszöb $4a$ legyen?

2. Mutassa be a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő, a minimális átlagos abszolút hibájú becslő, és a maximum a posteriori becslő kritérium függvényét! Adja meg ezen becslők származtatási módját abban az esetben, ha ismert a megfigyelés a posteriori sűrűségfüggvénye!
3. Egy megfigyelés a posteriori sűrűségfüggvénye csak a $[0,4]$ intervallumban különbözik nullától. $[0,1]$ között 0.125 , majd $(1,3)$ között lineárisan nő 0.125 -ről 0.625 -re, végül $[3,4]$ között konstans. Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő, a minimális átlagos abszolút hibájú becslő, és a maximum a posteriori becslő értékét!
4. Mérendő egy ismert jel ismeretlen amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z_k = as_k + n_k$, $k = 0,1, \dots, N-1$. Az ismeretlen a paraméter és az n_k zaj Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és varianciával. $E\{a\} = \mu_a$, $var\{a\} = \sigma_a^2$, $E\{n_k\} = 0$, $cov\{n_i, n_j\} = \sigma_n^2 \delta_{ij}$, $cov(a, n_j) = 0$, $\forall i$ -re, $\forall j$ -re. Használja a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját, és adja meg a paraméter legjobb MAP (\hat{a}_{MAP}) becslését! Bizonyára ismeri, hogy:

$$\left. \frac{\partial f(a|z)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0, \quad f(a|z) = \frac{f(z|a)f(a)}{f(z)}$$

Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (\hat{a}_{MS}) értékét is!

5. Mérendő egy ismeretlen paraméter N megfigyelésre alapozva: $z_k = a + n_k$, $k = 0,1, \dots, N-1$. Az n_k zaj Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és varianciával. $E\{n_k\} = 0$, $cov(n_i, n_j) = \sigma_n^2 \delta_{ij}$, $cov(a, n_j) = 0$, $\forall i$ -re, $\forall j$ -re. Az a paramétről nincsen előzetes információnk. Adja meg a csatorna-karakterisztika összefüggését! Vezesse le az a paraméter maximum likelihood (\hat{a}_{ML}) és Gauss-Markov (\hat{a}_{GM}) becslőjét! Határozza meg mindkét becslő varianciáját! Vezesse le a Cramer-Rao alsó korlát kifejezését, és ellenőrizze, hogy a becslők varianciája eléri-e a Cramer-Rao alsó korlátot, azaz minimális varianciájú becslők-e? Vizsgálja meg mindkét becslő torzított vagy torzítatlan voltát! Határozza meg mindkét becslő esetére az átlagos négyzetes hibát!
6. Zajjal terhelt megfigyeléseink vannak. Milyen mérési modell és milyen zaj modell esetén lesz optimális az ideális átlagolás?
7. A mért adatainkról feltételezzük, hogy felírhatók: $y_n = a_0 + a_1 u_n + w_n$, $n = 0,1, \dots, N-1$; ill. vektorokkal-mátrixokkal $z = Ua + w$ formában, azaz modellt illesztünk. Határozza meg a paraméterek legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőjét ha $\sum_{n=0}^{N-1} u_n = 0$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 = 100$, $\sum_{n=0}^{N-1} y_n = 5$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n = 100$, $N = 10$!
8. $E\{(y - \hat{y})^2\}$ kritérium alkalmazásával illesztjük az $\hat{y} = a_0 + a_2 u^2$ függvényt az $y(u)$ függvényre. Adja meg, hogy u és y mely momentumainak ismerete szükséges az ismeretlen paraméterek meghatározhatóságához!

Méréselmélet: 9. Gyakorló feladatok

9. Vezesse le az adaptív lineáris kombinátor esetére érvényes Wiener-Hopf egyenletet! Határozza meg a súlytényezőket arra az esetre, amikor $\mathbf{P}^T = [0 \quad -0.5 * \sin(4\pi/N)]$, \mathbf{R} első sora = $[0.5 \quad 0.5 * \cos(4\pi/N)]$, \mathbf{R} második sora = $[0.5 * \cos(4\pi/N) \quad 0.5]$, ahol $N = 12$! A lineáris kombinátor bemeneteire egységnyi amplitúdójú, szinuszos hullámformájú jelek mintáit vezetjük. Határozza meg ezen jelek egymáshoz viszonyított fázishelyzetét! Határozza meg a lineáris kombinátor kimenetén megjelenő hullámformát!
10. Vezesse le, hogyan vezetjük vissza az adaptív IIR szűrők problémáját adaptív FIR szűrési problémára és rajzolja fel a megvalósítandó szűrő blokkvázlatát!
11. Az LMS eljárás példáján keresztül mutassa be a stabilitáselméleti megközelítés lényegét, és határozza meg a bátorsági tényező célszerű, konvergenciát biztosító értéktartományát!
12. Rajzolja le a skalár Kalman szűrő blokkvázlatát, és vezesse le a szűrő optimális paramétereit megadó ortogonalitási feltételeket!
13. Egy autonóm diszkrét idejű rendszer állapotátmenet mátrixa: $\mathbf{A} = \text{diag} \langle 0.9, -0.9 \rangle$, megfigyelési mátrixa $\mathbf{C} = [1, 1]$. Határozza meg a rendszerhez illesztett megfigyelő \mathbf{G} erősítés mátrixának elemeit úgy, hogy a megfigyelő véges lépésben konvergáljon!
14. Adja meg $N=4$ esetére a diszkrét Fourier és a diszkrét Walsh transzformáció mátrixait! Határozza meg azt a 4×4 -es mátrixot, amely a diszkrét Fourier transzformált mátrixából kiindulva előállítja a diszkrét Walsh transzformáció mátrixát ($\mathbf{W} = \mathbf{V}_1 \mathbf{F}$)!
15. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $(1, 1-j, 1, 1+j)$ értékű Fourier transzformált jellemez!
16. Valósítsa meg a $H(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$ átviteli függvényt rezonátor alapú struktúrával! Rajzolja le a szűrő blokkvázlatát! Határozza meg a szűrő átvitelét nulla frekvencián, és a mintavételi frekvencia felénél! Hová célszerű helyezni a rezonátor pólust?
17. A megfelelő elsőfokú, komplex együtthatós rezonátorok átviteli függvényéből kiindulva vezesse le egy másodfokú, valós együtthatós diszkrét rezonátor átviteli függvényét! Rajzoljon fel egy olyan számítási vázlatot, amely ezt az átviteli függvényt valósítja meg! Adja meg a struktúra transzponáltját, és bizonyítsa be, hogy ennek az átvitele ugyanaz!
18. Vezesse le annak feltételét, hogy a visszacsatolt rezonátoros struktúra eredő átvitele ne haladja meg az egyet!
19. Rajzolja fel a másodfokú polinomiális szűrő blokkvázlatát!
20. $N=5$ esetére tervezzen véges impulzusválaszú szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás segítségével! A szűrő átvitele nulla frekvencián egységnyi, $0.2 * f_m$ és $0.4 * f_m$ frekvencián (f_m a mintavételi frekvencia) pedig nulla. Rajzolja fel a szűrőt magvalósító számítás blokkvázlatát, és vezesse le az amplitúdó karakterisztikáját megadó összefüggést! Mekkora a szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * f_m$ frekvencián?

10. Irodalmak

- [1] D.G. Luenberger, An Introduction to Observers, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-16, No.6, pp. 596-602, Dec. 1971. DOI: [10.1109/TAC.1971.1099826](https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826)
- [2] Schnell László (főszerk.), Jelek és rendszerek mérés technikája, Műszaki Könyvkiadó, 1985.
- [3] Rózsa Pál, Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, 1974.
- [4] S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume 1: Estimation Theory, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1993.
- [5] M.A. Woodbury, *Inverting modified matrices*, Memorandum Rept. 42, Statistical Research Group, Princeton University, Princeton, NJ, 1950, 4pp [MR38136](#)
- [6] B. Widrow, S. D. Stearns, Adaptive Signal Processing, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [7] W.L. Mills, C.T. Mullis, R.A. Roberts, Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-26, No.4, pp. 334-338, August 1978. DOI: [10.1109/TASSP.1978.1163114](https://doi.org/10.1109/TASSP.1978.1163114)
- [8] P.P. Vaidyanathan, The Discrete-Time Bounded-Real Lemma in Digital Filtering, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, No. 9, pp. 918-924, Sept. 1985. DOI: [10.1109/TCS.1985.1085815](https://doi.org/10.1109/TCS.1985.1085815)
- [9] P.P. Vaidyanathan, V. Liu, An Improved Sufficient Condition for Absence of Limit Cycles in Digital Filters, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-34, No. 3, pp. 319-322, March 1987. DOI: [10.1109/TCS.1987.1086118](https://doi.org/10.1109/TCS.1987.1086118)
- [10] C.T. Mullis, R.A. Roberts, Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-23, No. 9, pp. 551-562, Sept. 1976. DOI: [10.1109/TCS.1976.1084254](https://doi.org/10.1109/TCS.1976.1084254)