

név: Matuska Timót
NEPTUN-kód: EEZVHD
feladat: 3012110201

Jelek és rendszerek II.

Első házi feladat villamosmérnök szakos hallgatóknak

Beadási határidő

7. oktatási hét

Megjegyzések

Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is és a *feladatlapot* is be kell adni. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos külalakra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, *nem elegendő a végeredményeket közölni!* A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de *a megoldás elvi lépéseit* ekkor is *részletesen* ismertetni kell.

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat gerjesztése a feszültségforrás feszültsége, ill. az áramforrás árama, válasza a megadott kimeneti jel. (A hálózat paramétereit és a gerjesztés adatait lásd a feladatlap végén!)

A feladat paramétere

hálózat száma: 30

hálózati paraméterek sorszáma: 12

jelalak száma: 11

gerjesztés adatainak száma: 02

kimeneti jel sorszáma: 01

1. feladat

A gerjesztés a mellékelt ábrán megadott alakú periodikus jel.

1.1. Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együtthatós alakban!

1.2. Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

1.3. Határozza meg a rendszer az átviteli karakterisztikáját!

1.4. Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben. Határozza meg a válasz effektív értékét!

1.5. (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

2. feladat

A gerjesztés a mellékelt ábrán megadott jel első periódusa (a $(0; T)$ intervallumon kívül zérus a jel értéke).

2.1. Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!

2.2. Ábrázolja az amplitúdó-spektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sáv szélességét! ($\varepsilon=0,05$)

2.3. Írja fel a válasz komplex spektrumát!

3. feladat

3.1. Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!

3.2. Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!

3.3. Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel a 3. feladatra megadott jel, illetve ennek hiányában 2. pont szerinti aperiodikus jel! Vázolja a válaszjelet!

4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

A hálózat paramétereit:

	R	C
12	25 kΩ	10 nF

A gerjesztés adatai:

sorszám	A_0/V	T/τ
2	12	0,8

Ha a gerjesztőjel áram, akkor $i_s R$ egyenlő a táblázatban adott A_0 értékkel.

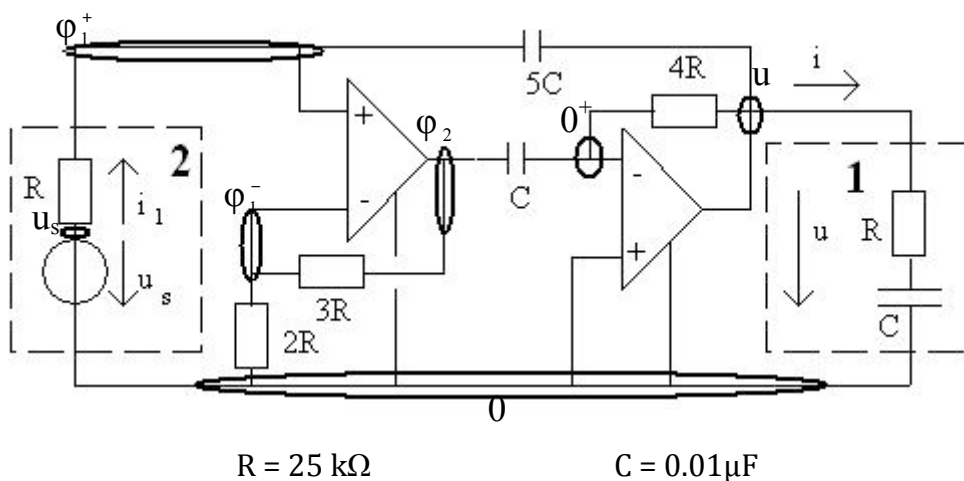
τ meghatározása: a 18. számú hálózatra $\tau = 0,25L/R$, a többire $\tau = aCR$, ahol L , R és C a hálózatra megadott értékek. Az "a" szorzót néhány hálózatra az alábbi táblázat tartalmazza, míg az itt nem szereplőkre: $a=1$.

hálózat sorszáma	a
30	5

H30

Válaszjel: u , i , i_1

A vizsgált kétpólus: 1, 2

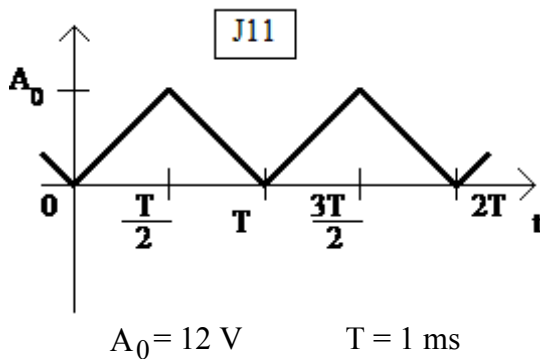


$$R = 25 \text{ k}\Omega$$

$$C = 0.01 \mu\text{F}$$

Gerjesztő jel

$$\begin{aligned} T/\tau &= 0,8 \\ \tau &= aRC = 5RC = 1,25 \text{ ms} \\ T &= 0,8\tau = 4RC = 1 \text{ ms} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 6,2832 \frac{\text{krad}}{\text{s}} \end{aligned}$$



Koherens egységrendszer:
(V, mA, kΩ, μF, ms, krad/s)

A 3.3. feladatban $A_0 \varepsilon(t) e^{-t/(0,8T)}$

1.1.

A Fourier-sor definíciós képlete:

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [U_k^A \cos(k\omega t) + U_k^B \sin(k\omega t)]$$

A gerjesztőjel időfüggvénye:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{2A_0}{T}t & \text{ha } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{2A_0}{T}t & \text{ha } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Innen az együtthatók:

1. Konstans összetevő:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} \left(\frac{2A_0}{T} t \right) dt + \int_{T/2}^T \left(2A_0 - \frac{2A_0}{T} t \right) dt \right] = \frac{A_0}{2} = 6$$

2. Szinuszos összetevő:

$$U_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega t) dt = 0, \text{ mert a jel páros}$$

3. Koszinuszos összetevő:

$$\begin{aligned} U_k^A &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} \frac{2A_0}{T} t \cos(k\omega t) dt + \int_{T/2}^T \left(-\frac{2A_0}{T} \right) t \cos(k\omega t) dt \right] = \\ &= \frac{4A_0}{T^2} \left\{ \left[t \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_0^{T/2} - \left[-\frac{\cos(k\omega t)}{(k\omega)^2} \right]_0^{T/2} - \left[t \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} \right]_{T/2}^T + \left[-\frac{\cos(k\omega t)}{(k\omega)^2} \right]_{T/2}^T \right\} = \\ &= \frac{4A_0}{T^2} \left\{ \underbrace{\frac{T \sin(k\omega T/2)}{2k\omega}}_0 + \frac{\cos(k\omega T/2)}{(k\omega)^2} - \frac{1}{(k\omega)^2} - \underbrace{\frac{T \sin(-k\omega T/2)}{2k\omega}}_0 - \frac{1}{(k\omega)^2} + \frac{\cos(-k\omega T/2)}{(k\omega)^2} \right\} = \\ &= \frac{4A_0}{T^2} \left(\frac{\cos(k\pi) + \cos(-k\pi) - 2}{k^2 \frac{4\pi^2}{T^2}} \right) = A_0 \left(\frac{2 \cos(k\pi) - 2}{k^2 \pi^2} \right) = \frac{A_0}{\pi^2} \left(\frac{2(-1)^k - 2}{k^2} \right) \end{aligned}$$

Minden páros k értékre $U_k^A = 0$,

és minden páratlanra pedig: $U_k^A = -\frac{4A_0}{k^2 \pi^2} = -\frac{48}{k^2 \pi^2}$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket megkapjuk a valós alakú Fourier-sort ($k = \{1, 3, 5, 7\}$):

$$u(t) = 6 - \frac{48}{\pi^2} \left(\cos(6,2832t) + \frac{1}{9} \cos(18,85t) + \frac{1}{25} \cos(31,416t) + \frac{1}{49} \cos(43,9823t) \right)$$

Komplex alak:

Definíció szerint: $u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_k^C e^{-jk\omega t}$

$$U_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega t} dt = 0, \text{ minden pozitív páratlan } k \text{ értékre (párosakra zérus).}$$

Minden páros k értékre pedig:

$$\begin{aligned} U_k^A &= 2 \operatorname{Re}\{U_k^C\} \\ U_k^B &= -2 \operatorname{Im}\{U_k^C\} \end{aligned} \quad \text{ezekből} \quad U_k^C = \frac{U_k^A}{2} - \frac{U_k^B}{2} j$$

Tehát:

$$U_k^C = -\frac{2A_0}{k^2 \pi^2} = -\frac{24}{k^2 \pi^2}$$

Behelyettesítés után ($k = \{1, 3, 5, 7\}$):

$$u(t) = -\frac{24}{\pi^2} \left(e^{-j6,2832t} + \frac{1}{9} e^{-j18,85t} + \frac{1}{25} e^{-j31,416t} + \frac{1}{49} e^{-j43,9823t} \right)$$

1.2.

A jel **effektív értéke** definíció szerint:

$$\begin{aligned} U_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2A_0}{T} t \right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^0 \left(-\frac{2A_0}{T} t \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4A_0^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T/2} - \frac{4A_0^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-T/2}^0} = \\ &= \frac{2A_0}{T} \sqrt{\frac{1}{T} \left[\frac{T^3}{24} \right] - \frac{1}{T} \left[-\frac{T^3}{24} \right]} = 24 \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{24}} \approx 6,9282 \end{aligned}$$

Közelítéssel: definíció szerint: $U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{\sum_{i=1}^n U_i^2}{2}}$

$$U_{eff} = \sqrt{6^2 + \frac{(-4,8634)^2}{2} + \frac{(-0,5404)^2}{2} + \frac{(-0,1945)^2}{2} + \frac{(-0,01)^2}{2}} \approx 6,9275$$

A közelítés relatív hibája: $\delta = 100 \frac{6,9282 - 6,9275}{6,9282} \approx 0,01 \%$

1.3.

Potenciálegyenletek az ábrán bejelölt módon:

$$\varphi_1^+ : \frac{\varphi_1 - u_s}{R} + (\varphi_1 - u)5j\omega \cdot C = 0$$

$$\varphi_1^- : \frac{\varphi_1}{2R} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{3R} = 0$$

$$0^+ : -\varphi_2 \cdot j\omega \cdot C - \frac{u}{4R} = 0$$

MAPLE12-vel megoldva az egyenlet rendszert, majd kézileg tovább egyszerűsítve a megfelelő alakra, a következő átviteli karakterisztikát kapjuk:

$$H(j\omega) = \frac{-0,8j\omega}{(j\omega)^2 + 2,5j\omega + 2}$$

1.4.

Matlab-al megoldva, az előző feladatokban kiszámított átviteli karakterisztikából és a gerjesztés Fourier polinomjából számolva:

```
>>szam = [0 -8 0];
>>nev = [1 2.5 2];
>> om = 6.2832*[0 1 3 5 7];
>> Usk = -4*12/pi/pi*[0 1 1/9 1/25 1/49];
>> Usk(1) = 6;
>> Hk = polyval(szam, j*om)./polyval(nev, j*om);
>> Uk = Hk.*Usk;
>> abs(Uk)
ans =
    0    0.6016    0.0229    0.0049    0.0018
>> angle(Uk)
ans =
    0   -1.1739   -1.4382   -1.4912   -1.5140
>> angle(Uk)*180/pi
ans =
    0   -67.2605   -82.4028   -85.4409   -86.7434
```

$$u(t) = 0,6016 \cos(6,28t - 67,26^\circ) + 0,0229 \cos(18,85t - 82,4^\circ) + 0,0049 \cos(31,42t - 85,44^\circ) + 0,0018 \cos(43,98t - 86,74^\circ) \quad \text{V}$$

A válasz effektív értéke:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{(0,6016)^2}{2} + \frac{(0,0229)^2}{2} + \frac{(0,0049)^2}{2} + \frac{(0,0018)^2}{2}} = 0,4257 \text{ V}$$

2.1.

A megadott aperiodikus gerjesztő jel időfüggvénye:

$$\begin{aligned}
 u_s(t) &= \frac{2A_0}{T} t \left(\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \right) + \left(2A_0 - \frac{2A_0}{T} t \right) \left(\varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - \varepsilon(t - T) \right) = \\
 &= \frac{2A_0}{T} t \varepsilon(t) - \frac{2A_0}{T} \left(t - \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + 2A_0 \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - \frac{2A_0}{T} \left(t - \frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) - \\
 &- 2A_0 \varepsilon(t - T) + \frac{2A_0}{T} (t - T + T) \varepsilon(t - T) = \\
 &= \frac{2A_0}{T} t \varepsilon(t) - \frac{4A_0}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{2A_0}{T} (t - T) \varepsilon(t - T)
 \end{aligned}$$

Tudjuk, h: $u_s(s) = L^{-1}\{u_s(t)\}$

$$u_s(s) = \frac{2A_0}{T \cdot s^2} - \frac{4A_0}{T \cdot s^2} \cdot e^{-s \frac{T}{2}} + \frac{2A_0}{T \cdot s^2} \cdot e^{-sT} = \frac{1 - 2 \cdot e^{-s \frac{T}{2}} + e^{-sT}}{T \cdot s^2} \cdot 2A_0$$

Numerikus alakban, $T = 1\text{ms}$, $A_0 = 12\text{V}$ helyettesítéssel:

$$u_s(s) = \frac{24 - 48 \cdot e^{-\frac{s}{2}} + 24 \cdot e^{-s}}{s^2}$$

A Hurwitz kritérium miatt (az átviteli karakterisztika nevezőjének valós része egynemű) a rendszerünk GV stabilis, ezért $s = j\omega$ helyettesítéssel megkapjuk a gerjesztés **komplex spektrumát**:

$$u_s(j\omega) = \frac{24 - 48 \cdot e^{-\frac{j\omega}{2}} + 24 \cdot e^{-j\omega}}{(j\omega)^2}$$

2.2.

Az ábrázolást a Matlab matematikai segédprogrammal végeztem, a következő parancsokkal:

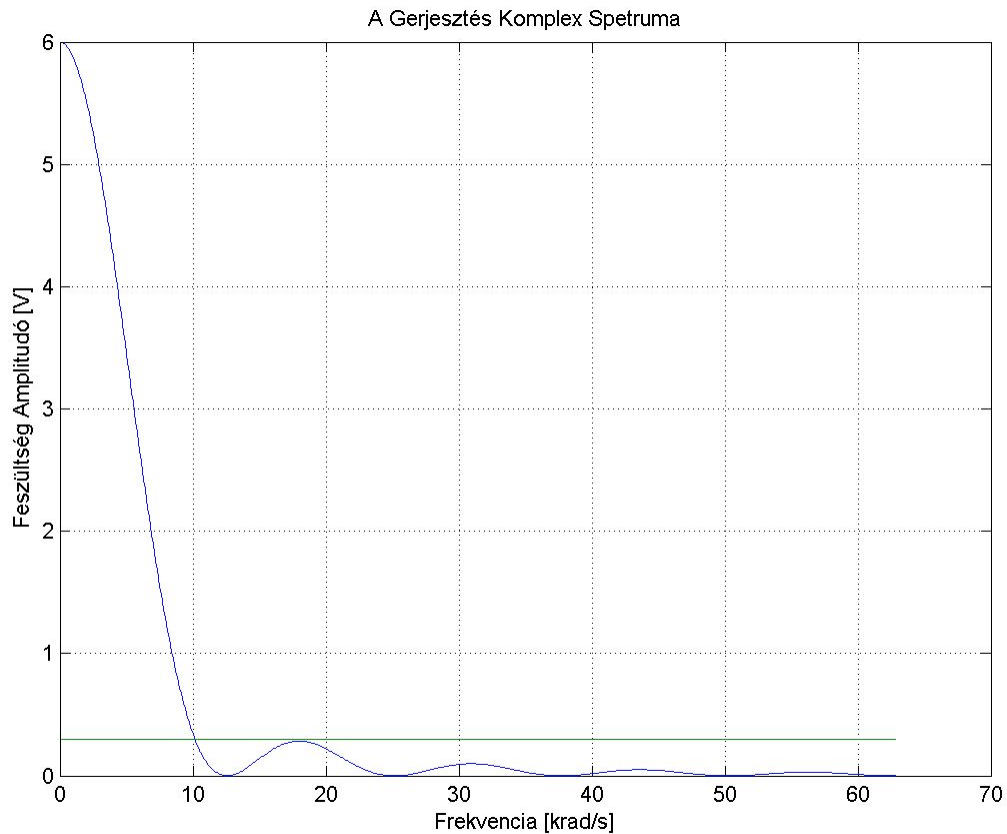
```

>> om = 0.1:0.1:62.8318; % a körfrekvencia 10-szereséig ábrázolok
>> Uom = (24-48*exp(-j*om/2)+24*exp(-j*om))./(j*om).^2;
>> plot(om, abs(Uom), om, 0.05*max(abs(Uom))*ones(size(om)))
>> grid
>> title('A Gerjesztés Komplex Spetruma')
>> xlabel('Frekvencia [krad/s]')
>> ylabel('Feszültség Amplitudó [V]')

```

Ahol az egyenes metszi a görbét az lesz a jel sávszélessége. Felnagyítva az ábrát leolvasható a

sávszélesség: $\Delta\omega = 10,1532 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$



2.3.

A válasz komplex spektruma:

$$U(j\omega) = U_s(j\omega) \cdot H(j\omega) \rightarrow$$

$$\rightarrow U(j\omega) = \frac{24 - 48 \cdot e^{-\frac{j\omega}{2}} + 24 \cdot e^{-j\omega}}{(j\omega)^2} \cdot \frac{-0,8j\omega}{(j\omega)^2 + 2,5j\omega + 2}$$

Maple12-vel egyszerűsítve a következő alakra jutottam:

$$U(j\omega) = \frac{38,4 \left(2 \cdot e^{-\frac{j\omega}{2}} - e^{-j\omega} - 1 \right)}{j\omega(2(j\omega)^2 + 5j\omega + 4)}$$

Ezt tovább egyszerűsítve kézzel a következőt alakra jutottam:

$$U(j\omega) = \frac{38,4 \cdot e^{-\frac{j\omega}{2}} - 19,2 \cdot e^{-j\omega} - 19,2}{(j\omega)^3 + 2,5(j\omega)^2 + 2j\omega}$$

3.1.

Mivel a rendszer kauzális ezért az átviteli karakterisztikából $j\omega = s$ helyettesítéssel megkapom az átviteli függvényt:

$$H(j\omega)\big|_{j\omega=s} = H(s) \Rightarrow H(s) = \frac{-0,8s}{s^2 + 2,5s + 4}$$

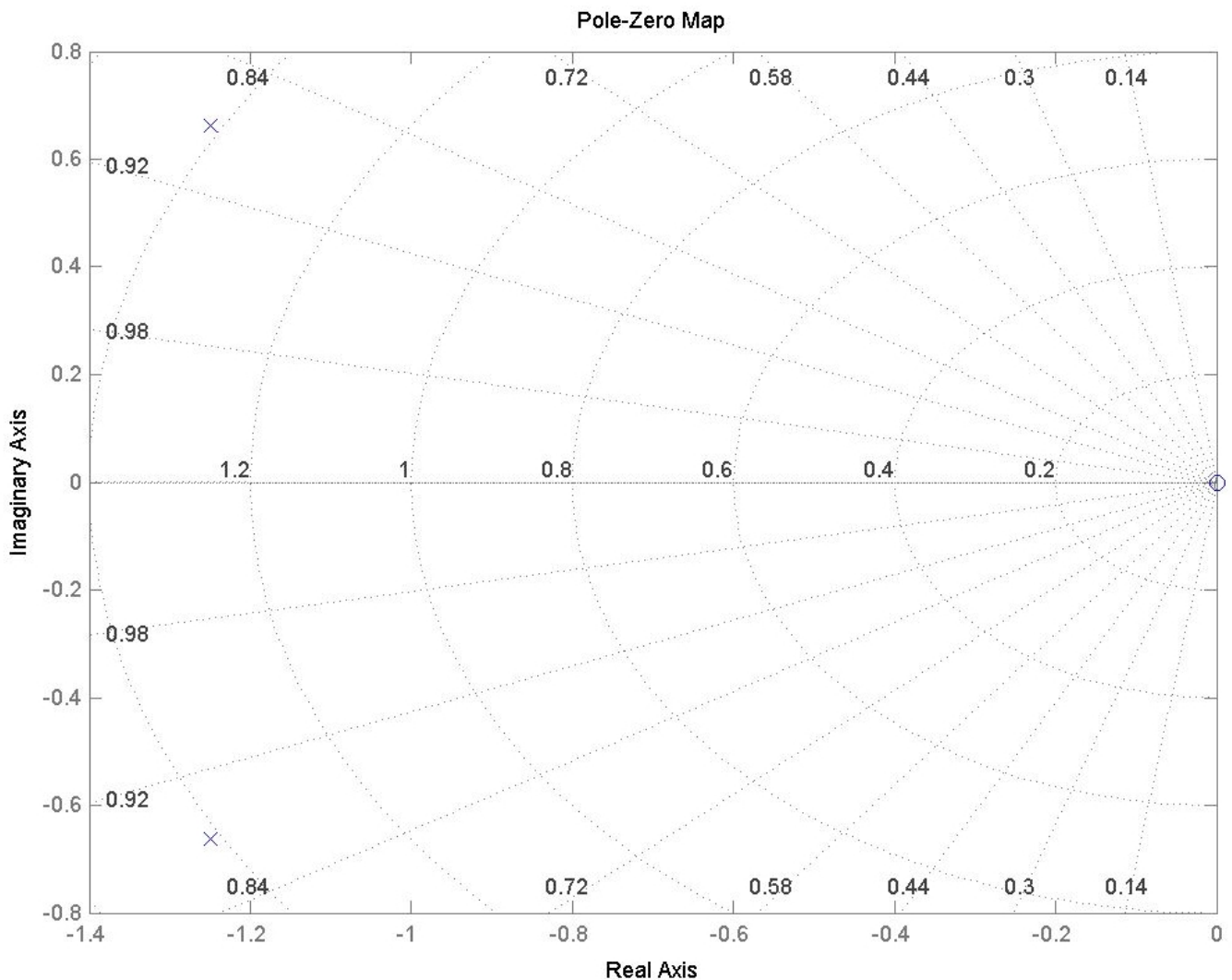
A **pólus zérus elrendezést** Matlab-la számoltam, a következő módon:

```
>> szam = [-.8 0];  
>> nev = [1 2.5 2];  
>> [pole, zero] = pzmap(szam,nev)  
pole =  
    -1.2500 + 0.6614i  
    -1.2500 - 0.6614i  
  
zero =  
    0
```

Vagyis a rendszernek egyetlen zérusa van nullában és a pólusok $p_{1,2} = -1,25 \pm 0,6614j$.

Ábrázolás Matlab-al:

```
>> pzmap(szam,nev)  
>> grid
```



Tudjuk, hogy $h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$

Hogy meghatározzuk az átviteli függvény inverz Laplace transzformáltját, először részlet törtekre kell bontani. Erre a Matlab kínál is megoldást:

```
>> [r,p,k] = residue(szam,nev)
r =
    -0.4000 - 0.7559i
    -0.4000 + 0.7559i

p =
    -1.2500 + 0.6614i
    -1.2500 - 0.6614i

k =
    []
```

Ebből az átviteli függvény:

$$H(s) = A + \frac{B}{s-p} + \frac{B^*}{s-p^*} = 0 + \frac{-0,4 - 0,756j}{s - (-1,25 + 0,661j)} + \frac{-0,4 + 0,756j}{s - (-1,25 - 0,661j)}$$

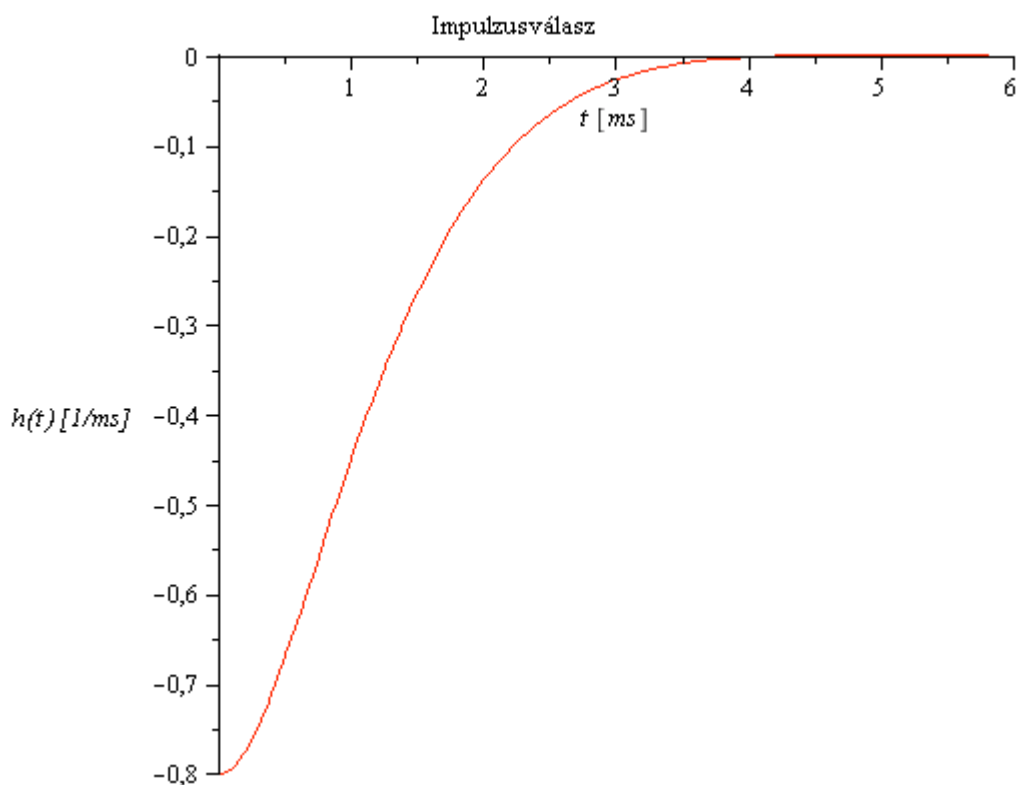
Felhasználva a következő azonosságot: $L^{-1}\left\{\frac{B}{s-p} + \frac{B^*}{s-p^*}\right\} = 2\operatorname{Re}\{B \cdot e^{p \cdot t}\} \cdot \varepsilon(t)$

$$h(t) = \varepsilon(t) \cdot 2\operatorname{Re}\{0,855 \cdot e^{-j1,084} \cdot e^{(-1,25+0,661j)t}\} = \varepsilon(t) \cdot 1,71 \cdot e^{-1,25t} \cdot \operatorname{Re}\{e^{j(0,661t-1,084)}\}$$

$$h(t) = \varepsilon(t) \cdot 1,71 \cdot e^{-1,25t} \cdot \cos(0,661t - 1,084)$$

Ábrázolás Maple12-vel:

$\text{plot}(1,71 \cdot e^{-1,25 \cdot t} \cdot \cos(0,661t - 1,084) \mid t = 0 \dots 6)$



3.3.

Gerjesztő jel: $U_s(t) = A_0 \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{0.8T}} = 12 \cdot \varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{0.8T}}$

A gerjesztés Laplace-transzformáltja:

$$L\{U_s(t)\} = 12 \cdot \frac{1}{s + 1,25T} \Big|_{T=1} = \frac{12}{s + 1,25}$$

$$U(s) = U_s(s) \cdot H(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow U(s) = \frac{12}{s + 1,25} \cdot \frac{-0,8s}{s^2 + 2,5s + 4}$$

Ezt Maple12vel rendezve, majd kézzel tovább egyszerűsítve a következő megoldásra

jutottam:
$$U(s) = \frac{-9.6s}{s^3 + 3.75s^2 + 7.125s + 5}$$

Hogy megkapjam a válasz időfüggvényét, Laplace transzformálni kell U(s)-t, de ehhez előbb részlet törtekre kell bontani. Erre ismét a Matlab-ot használtam.

```
>> Usz = [-9.6 0];
```

```
>> Un = [1 3.75 7.125 5];
```

```
>> [R,P,K] = residue(Usz,Un)
```

```
R =
    -2.4615 + 3.0745i
    -2.4615 - 3.0745i
     4.9231
```

```
P =
    -1.2500 + 1.5612i
    -1.2500 - 1.5612i
    -1.2500
```

```
K =
     []
```

Ebből: $\Rightarrow$

$$U(s) = \frac{A}{s - P_2} + \frac{B}{s - P_1} + \frac{B^*}{s - P_1^*} = \frac{4.923}{s + 1,25} + \frac{-2,462 + 3,075j}{s - (-1,25 + 1,561j)} + \frac{-2,462 - 3,075j}{s - (-1,25 - 1,561j)}$$

$$L^{-1}\{U(s)\} = U(t)$$



$$U(t) = \varepsilon(t) \left[2 \operatorname{Re} \left\{ 3.9392 \cdot e^{-0,8957j} \cdot e^{(-1,25+1,561j)t} \right\} + 4.923 \cdot e^{-1,25t} \right] =$$

$$\varepsilon(t) \left(4.923 \cdot e^{-1,25t} + 7,8784 \cdot e^{-1,25t} \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{j(-0,8957+1,561t)} \right\} \right)$$

$$\boxed{U(t) = \varepsilon(t) \left(4.923 \cdot e^{-1,25t} + 7,8784 \cdot e^{-1,25t} \cdot \cos(-0.8957 + 1,561t) \right)}$$

Ábrázolás Maple12-vel:

$\text{plot}(4.923 \cdot e^{-1,25t} + 7,8784 \cdot e^{-1,25t} \cdot \cos(-0.8957 + 1,561t), t = 0..6)$

