A cirkuláris konvolúció

2007. november 19.

Tegyük fel, hogy van két sorozatunk, $\{x_i\}$, i = 0,1,2,...N-1, and $\{y_n\}$, n = 0,1,2,...,N-1. A két sorozat konvolúcióját úgy szeretnénk kiszámítani, hogy a folytonos Fourier-transzformációra vonatkozó kifejezést (konvolúció-tétel), mely szerint a konvolúció megkapható a két jel Fourier-traszformáltjának szorzatát inverz Fourier-transzformálva:

$$c(\tau) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau - t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(\tau - t)\,\mathrm{d}t = F^{-1}\{F\{x(t)\}\cdot F\{y(t)\}\}, \tag{1}$$

a diszkrét esetre alkalmazzuk.

$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p-i}, \, p = 0{,}1{,}2N-2, \tag{2}$$

és az összeget az adott p-re *létező* párokra számítjuk ki, például:

$$\begin{aligned} c(0) &= x_0 y_0 \\ c(1) &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ c(2) &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \, . \\ &\vdots \\ c(2N\text{-}2) &= x_{N-1} y_{N-1} \end{aligned} \tag{3}$$

A felcserélhetőség itt is fennáll:

$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p-i} = \sum_i y_i x_{p-i}, \, p = 0{,}1{,}2N-2, \tag{4}$$

Ennek megfelelően pl. Matlab-ban a következőt kapjuk:

```
      conv([1,0.1,0],[j,j/100,0])
          0 + 1.000i     0 + 0.1100i     0 + 0.0010i     0     0
```

A p indexet lehetne így is skálázni:

$$c(p) = \{x_i\} * \{y_n\} = \sum_i x_i y_{p+(N-1)-i}, \, p = -(N-1), \ldots -1{,}0{,}1, (N-1), \tag{5}$$

így $c(p)$ kifejezése a nullára szimmetrikus szerkezetű lenne, de ez a lényegen nem változtat.

Alkalmazható-e a diszkrét esetre a konvolúció-tétel? Ha a DFT-ket felírjuk, a következőt látjuk:

$$\begin{aligned} c_{circ}(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi\frac{ki}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}\right) e^{j2\pi\frac{km}{N}} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n e^{-j2\pi\frac{k(i+n)}{N}}\right) e^{j2\pi\frac{km}{N}}, \quad m = 0{,}1{,}\ldots N-1 \end{aligned} \, . \tag{6}$$

Vegyük észre, hogy a $p=n+i$, $p=0,1,2,...,(2N-2)$ átlók mentén nézve az exponenciális nem változik, ezért kiemelhető, és belül éppen $c(p)$ értékét kapjuk(lásd (3)): ha $n=p-i$, és csak erre az átlóra összegzünk, akkor

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n\, e^{-j2\pi\frac{k(i+n)}{N}} \Rightarrow \sum_{p=0}^{N-1}\ \sum_{i=0}^{p} x_i y_{p-i}\, e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} = \sum_{p=0}^{N-1} c(p)\, e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} \quad \text{ha } p \le N-1$$

$$. \qquad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x_i y_n\, e^{-j2\pi\frac{k(i+n)}{N}} \Rightarrow \sum_{p=N}^{2N-2}\ \sum_{i=p-(N-1)}^{N-1} x_i y_{p-i}\, e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} = \sum_{p=N}^{2N-2} c(p)\, e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} \quad \text{ha } p > N-1$$

ezt behelyettesítve:

$$c_{circ}(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ \sum_{p=0}^{2N-2} c(p) e^{-j2\pi\frac{kp}{N}} e^{j2\pi\frac{km}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\ \sum_{p=0}^{2N-2} c(p) e^{j2\pi\frac{k(m-p)}{N}}, \quad p = 0,1,2,\ldots 2N-2,\ m = 0,1,2,\ldots,N-1 . \qquad (8)$$

Ez a k szerinti összeg általában 0-t ad, kivéve, ha a kitevő N-nek egész számú többszöröse. Ezeket az értékeket kiemelve:

$$c_{circ}(m) = c(m) + c(m+N),\ m = 0,1,2,\ldots,N-1\ . \qquad (9)$$

Amit kaptunk az az, hogy a DFT-kre vonatkozó konvolúciós tétel NEM a szokásos értelemben vett konvolúciót adja, hanem a konvolúciónak és N-nel való eltoltjának az összegét. Ennek közvetlen jelentése is van. Vizsgáljuk meg a következő sémát ($N=7$):

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \\
y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0| & y_6 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\
 & & & & & \uparrow & & & & & & \downarrow & &
\end{array}$$

A függőleges vonaltól balra eső párok *c(m)*-et adják (a rajzon *c(1)*-et), a jobbra esők *c(m+N)*-et. Úgy is felfogható, mintha eltoláskor az y_n sorozatot mintegy körbefordulva tolnánk az x_i sorozat előtt. Vagyis azt bizonyítottuk be, hogy az IDFT(DFT·DFT) művelet *cirkuláris konvolúciót* ad, vagyis ez felel meg a folytonos Fourier-transzformáció konvolúciós tulajdonságának.

Ha a két sorozat hossza eltérő, akkor a két DFT eltérő helyen számolja ki a diszkrét transzformáltat, és ezért a sorozatokat nem is tudjuk megfelelően összeszorozni, a konvolúciós tulajdonságnak nincs értelme. A rövidebb sorozatot azonban nullákkal kiegészíthetjük, és ezen végezhetjük el a műveletet:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & \\
0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0| & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0
\end{array}$$

A cirkularitás a nullákkal kiegészített sorozatokra teljesül.

„Igazi” konvolúció úgy számítható ki, ha mindkét sorozatot annyi nullával egészítjük ki, hogy a cirkularitást jelentő párok mind kiessenek, és az eredményből kiválogatjuk a kívánt tagokat:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccc}
 & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0
\end{array}$$

A példában látható 11-pontos DFT nem számítható ki könnyen. Ezért annyi nullát érdemes behelyezni, hogy a minták számával a legközelebbi 2-hatványt elérjük (itt ez 16).