Eredmények, részeredmények, pontok

1. feladat — 12 pont

Az $y = y(x)$ kétszer deriválható függvény eleget tesz a

$$\sin(xy) + xy + y\cos x = 2$$

egyenletnek.

Mennyi lehet $y(0)$? Mennyi lehet $y'(0)$? Mennyi lehet $y''(0)$?

Megoldás: $y(0) = 2$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

$(y + xy')\cos(xy) + y + xy' - y\sin x + y'\cos x = 0$ miatt $y'(0) = -4$ $\boxed{\textbf{7p.}}$

$(2y' + xy'')\cos(xy) - (y + xy')^2\sin(xy) + 2y' + xy'' - 2y'\sin x - y\cos x + y''\cos x = 0$ miatt $y''(0) = 18$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

2. feladat — 14 pont

Számolja ki a következő integrálokat!

(a) $\displaystyle\int x^2 \cdot \left(3x + \sqrt{x} - 3x^{-3} + \frac{5}{x^5}\right) \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \left(3x^2 + 1\right) \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{3}{(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x$

Megoldás:

(a) $= \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\ln|x| - \dfrac{5}{2x^2} + c;$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

(b) $= (x^3 + x)\operatorname{arctg} x - \dfrac{x^2}{2} + c;$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

(c) $= 3\ln(\operatorname{arctg} x) + c;$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

3. feladat — 12 pont

Számolja ki a következő integrált!

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + x^2 - 2}{(x + 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + x)} \mathrm{d}x$$

Megoldás: $= \displaystyle\int 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x} \mathrm{d}x$ $\boxed{\textbf{5p.}}$

$A + D = 0,\ 2A + B + 3D = -2,\ A + B + C + 3D = -1$ és $D = -2$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

$A = 2,\ B = 0,\ C = 3$ és $D = -2$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$\displaystyle\int \ldots \mathrm{d}x = x + 2\ln|x + 1| - \frac{3}{2(x+1)^2} - 2\ln|x| + c$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

4. feladat **12 pont**

Adja meg a $[-2,1]$ intervallumon az $f(x)=\sin\left|\frac{\pi}{4}x\right|$ függvény $F(x)$ integrálfüggvényét! Hol folytonos, és hol deriválható F? Adja meg az F' deriváltat!

Megoldás: $F(x)=\begin{cases}\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), & \text{ha } x\geq 0;\\ \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)-\frac{4}{\pi}, & \text{ha } x<0;\end{cases}$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

Mindenhol folytonos és deriválható, és $F'(x)=f(x)$. $\boxed{\textbf{4p.}}$