

## TÉTELEK

(A \* -gal jelöltek bizonyításait nem kérdezzük.)

## I. SOROZATOK

- (1) A határérték egyértelmősége.
- (2) Konvergens sorozat korlátos (a konvergencia szükséges feltétele).
- (3) Műveletek konvergens sorozatokkal.  
 Összeg, konstansszoros, szorzat határértéke.  
 \* Reciprok, hányados határértéke.  
 $\sqrt[n]{a_n}$  határértéke.  
 Példák: Racinoális tört határértéke.  
 Gyökös kifejezések határértéke.
- (4) A határérték monotonitása.
- (5) Rendőrelv.
- (6) Nevezetes határértékek.  
 \*  $a^n$ , \*  $n/2^n$ , \*  $\log n/n$  határértéke.  
 \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = 1$   
 \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n/n! = 0$   
 \*  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n = 0$   
 \*  $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  konvergens.  
 Példák nevezetes határértékekkel.
- (7) \* Korlátos és nullához tartó sorozat szorzata.
- (8) \* Végtelenhez illetve nullához tartó sorozatok reciproka.
- (9) \* Monoton részsorozat létezése.
- (10) \* Monoton és korlátos sorozat konvergens.
- (11) Teljes indukció módszere.
- (12) Példák: rekurzív sorozatok monotonitásának, korlátosságának a bizonyítása teljes indukcióval.
- (13) \* Bolzano - Weierstrass kiválasztási tétel.
- (14) Torlódási pont létezése. Sorozatok limeszszuperiorja, limeszinferiorja, kapcsolata a limesszel.
- (15) \* Cauchy konvergencia kritérium sorozatokra.

## II. SOROK

- (1) Geometriai sor.
- (2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergens.
- (3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$  (konvergens).
- (4) Konvergens numerikus sorok összege, konstansszorosa.
- (5) Sor konvergenciájának szükséges feltétele.  
 (Általános tag tart a nullához.)
- (6) Cauchy konvergencia kritérium sorokra.
- (7) \* Leibniz típusú sor konvergens.
- (8)  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konv.  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konv.
- (9) Pozitív tagú sor konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele.  
 (Részletösszegek korlátossága.)

- (10) Majoráns, minoráns kritérium.  
Példák.
- (11) Sorösszeg közelítése, a hiba becslése (\*Leibniz sornál és pozitív tagú sornál).
- (12) \* Integrál kritérium.
- (13)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$  konvergenciája.

### III. FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

- (1)  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$  folytonossága.
- (2)  $f(x) = \sqrt{ax + b}$  folytonossága  $x_0$ -ban ( $x_0$ ,  $a$ ,  $b$  adott).
- (3)  $f(x) = x^2$  folytonossága.
- (4) \* Átviteli elv (kapcsolat a függvény és a sorozat határértékfogalom között).
- (5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  nem létezik.
- (6) \*  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  nem létezik.
- (7) A határértékekkel végezhető műveletek. (Átviteli elvvel.)
- (8) \* A határérték monotonitása.
- (9) \* Rendőrelv.
- (10) \* Korlátos és nullához tartó függvények szorzata.
- (11) \* Végtelenhez illetve nullához tartó függvények reciproka.
- (12)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
- (13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$   
Következmény:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(1/n) = 1$
- (14)  $x^n$  hatvány függvény, polinomok, racionális törtkifejezések folytonossága.
- (15) Szakadási helyek osztályozása. A Dirichlet függvény szakadási helyei.
- (16) \* A  $\sin x$ ,  $\cos x$  függvények folytonossága.
- (17) \* Összetett függvény folytonossága.
- (18) Pontban folytonos, pozitív függvény a pont egy környezetében pozitív.
- (19) \* Bolzano tétel
- (20) Egyenletek megoldásának létezése. (A Bolzano tétel alkalmazása.)
- (21) Páratlan fokszámú polinomnak van valós gyöke.  
(A Bolzano tétel alkalmazása.)
- (22) \* Weierstrass I. és II. tétele. (Korlátosság illetve abszolút maximum és minimum létezése. )
- (23) \* Kompakt halmazon folytonos függvény egyenletes folytonossága.
- (24) Az  $1/x$  nem egyenletesen folytonos a  $(0, 1)$  illetve az  $x^2$  nem egyenletesen folytonos az  $[1, \infty)$  intervallumon.

### IV. FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHÁNYADOSAI

- (1) A pillanatnyi sebesség és a gyorsulás fogalma. A derivált néhány jelentése.
- (2)  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ ,  $a = 0$  deriváltja.
- (3) Példák: lineáris tört kifejezés,  $\sqrt{ax + b}$ , és az  $1/\sqrt{ax + b}$  deriváltja  $x_0$ -ban (a definíció alapján, ha  $x_0$ ,  $a$ ,  $b$  adott).
- (4) A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltétele.  
(Differenciál fogalma, érintőegyenes.)
- (5) A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolata.
- (6) A deriváltra vonatkozó műveleti szabályok.
- (7) \* Összetett függvény differenciálhatósága.
- (8) Polinomok, racionális törtek deriváltja.

- (9)  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  deriváltja.
- (10) Inverz függvény differenciálhatóságának geometriai jelentése.
- (11) A trigonometrikus függvények inverzeinek deriváltjai.
- (12) \* Az exponenciális függvény tulajdonságai.
- (13) Az  $e^x$  függvény deriváltjának visszavezetése  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  határértékre.
- (14) Az  $a^x$  és az  $x^\alpha$  deriváltja.
- (15) A logaritmus függvény deriváltja.
- (16) Az

$$f(x)^{g(x)} \quad \text{deriválása.}$$

- (17) Implicit egyenletet kielégítő függvények deriválása.
- (18) A hiperbolikus függvények és inverzei.  
(sinh, cosh, arsh, arch).

## V. A DIFFERENCIÁLHÁNYADOS ALKALMAZÁSA

- (1) Differenciálható függvény lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele.
- (2) Rolle tétel.
- (3) \* Lagrange középértéktétel.
- (4) \* L'Hospital szabály.
- (5) Intervallumon csak a konstans függvény deriváltja nulla.
- (6) Az integrálszámítás I. alaptétele.
- (7) Intervallumon differenciálható függvények monotonitása.
- (8) Elégséges feltétel inverzfüggvény létezésére ( $f'(x) > 0$  vagy  $f'(x) < 0$ ).
- (9) \* Intervallumon egyszer differenciálható függvények konvexitása.
- (10) \* Intervallumon kétszer differenciálható függvények konvexitása.
- (11) A lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele egyszer differenciálható függvényeknél.
- (12) \* A lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele kétszer differenciálható függvényeknél.
- (13) \* Az inflexió létezésének szükséges feltétele.
- (14) \* Az inflexió létezésének elégséges feltételei.
- (15) Paraméteres megadású görbe felírhatósága  $y = f(x)$  alakban,  
 $f'(x_0)$ ,  $f''(x_0)$  meghatározása.
- (16) Abszolút szélsőérték keresése.

## VI. FÜGGVÉNYEK HATÁROZOTT ÉS HATÁROZATLAN INTEGRÁLJA

- (1) A primitív függvények csak konstansban térnek el egymástól (intervallumon). Határozatlan integrál.
- (2) \* Határozatlan integrál additivitása, homogenitása.
- (3) \* A Riemann integrál alsó, felső közelítő összegének tulajdonságai.
- (4) \* Riemann integrál közelíthetősége integrál közelítő összeggel (a Riemann integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei 3. tétel).
- (5) \* A Riemann integrálhatóság elégséges feltétele a folytonosság (véges sok pont kivételével).
- (6) \* A Riemann integrál additív és homogén tulajdonsága.
- (7) \* A Riemann integrál tulajdonságai  
(monotonitás, abszolútérték integrálja).
- (8) \* Terület számítás integrálással.

- (9) \* Forgástest térfogata, ívhossz, elsőrendű nyomaték.
- (10) \* Az integrálszámítás II. alaptétele.  
(Az integrálfüggvény folytonossága, differenciálhatósága, differenciálás a felső határ szerint.)
- (11) \* Newton-Leibniz formula.
- (12) Az integrálás technikái (teljes négyzetté alakítás, azonos átalakítások).
- (13) Parciális integrálás.
- (14) Racionális tört függvényintegrálása. (Parciális törtekre bontás, részlet törtek integrálása).
- (15) Az integrál transzformációja (új változó bevezetése határozott és határozatlan integrálnál).
- (16) Improprius integrál típusai.
- (17)  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ ,  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ ,  $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  konvergenciája.
- (18) \* Improprius integrál abszolút és feltételes konvergenciája.

## VII. SOROZATOK ÉS SOROK NAGYSÁGRENDJE

- (1) A kisordó, nagyordó, teta s omega függvények.
- (2) \* Stirling formula.

2007. december