Haladó lineáris algebra

HARMADIK HÁZI FELADAT

Írjuk fel (számítógéppel generáljuk) egy $\boldsymbol{n}$-ismeretlenes ($\boldsymbol{n} > 3$) és $\boldsymbol{m}$ egyenletből álló ($\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$) ellentmondásos lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát véletlen együtthatókkal, teljes oszloprangú együtthatómátrixszal.

1. Az együtthatómátrix (a) pszeudoinverzének valamint (b) QR-felbontásának segítségével határozzuk meg az egyenletrendszer optimális megoldását!

A feladat megoldása során a MATLAB programot használtam, amellyel sikerült létrehoznom véletlen elemekből álló, ellentmondásos lin. egyenletrendszert Ehhez a következő parancsokat adtam ki.

```
n = 4; m = 5;

%%-- Kerjunk veletlen egeszeket 1 es 20 kozott
%%-- n+1, mert egy veletlen b vektort is kerunk a programtol
Ab   = randi(20,m,n+1);

%%-- Ab matrix elso negy oszlopa az egyutthatomatrix
A    = [Ab(:,1) Ab(:,2) Ab(:,3) Ab(:,4)];

%%-- Ab utolso oszlopa a b vektor
b    = Ab(:,5);
```

Tehát a program által létrehozott a bővített együtthatómátrix

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 10 & 16 & 20 & 17 \\ 14 & 20 & 6 & 11 & 6 \\ 14 & 7 & 11 & 3 & 17 \\ 4 & 12 & 14 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 18 & 6 & 19 \end{array}\right],$$

Az egyenletrendszer optimális megoldását *(a)* először az együtthatómátrix pszeudóinverzének segítségével kerestem meg. Az $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, így a pszeudóinverze a következő mátrixszorzással kapható meg

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},$$

és ebből az optimális megoldás mátrixegyenlete

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b},$$

A fenti kifejezést és a megoldást a következő módon számoltam ki.

```
%%-- A pszeudoinverz teljes oszloprangumatrixra
%%-- inv(A'*A) helyett ()\-et hasznaltam
A_plus = (A'*A) \ A';

%%-- Igy az optimalis megoldas pszeudoinverzzel
x_hat1 = A_plus * b;
```

A parancsok eredményei

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} -0{,}0047 & 0{,}0048 & 0{,}0850 & -0{,}0491 & -0{,}0112 \\ -0{,}0241 & 0{,}0466 & -0{,}0513 & 0{,}0595 & -0{,}0090 \\ -0{,}0016 & -0{,}0288 & 0{,}0141 & 0{,}0251 & 0{,}0385 \\ 0{,}0604 & 0{,}0037 & -0{,}0146 & -0{,}0425 & -0{,}0129 \end{bmatrix}, \text{ és } \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0{,}9360; & -0{,}8767; & 0{,}8956; & 0{,}3426 \end{pmatrix}.$$

A feladat *(b)* részében az optimális megoldást a QR-felbontással határoztam meg. A feladatot a MATLAB segítségével számoltam ki. A felbontás megvalósító függvény nem gondoskodik arról, hogy a kapott **R** mátrix főátlóiban pozitív elemek legyenek, így az ezzel kapcsolatos átalakításokat nekem kellett megtennem, ahogy az az alábbi kódrészleten látható.

```
%%-- Az egyutthato QR-felbontasa
[Q,R]  = qr(A,0);

% %--- az R(1:1) es R(2:2) helyen vannak negativ ertekek
% %--- szorozzuk be az elso es a masodik sorat -1-gye
R(1,:) = -1 * R(1,:);
R(2,:) = -1 * R(2,:);

% %--- de ekkor a Q elso es masodik oszlopat is meg kell, hogy ekvivalens
% %--- legyen az atlakitas
Q(:,1) = -1 * Q(:,1);
Q(:,2) = -1 * Q(:,2);
```

A QR-felbontás végeredménye tehát

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0{,}2819 & 0{,}2628 & 0{,}3768 & 0{,}7897 \\ 0{,}6578 & 0{,}3528 & -0{,}5540 & 0{,}0478 \\ 0{,}6578 & -0{,}6626 & 0{,}1837 & -0{,}1913 \\ 0{,}1879 & 0{,}5918 & 0{,}2164 & -0{,}5560 \\ 0{,}1410 & 0{,}1314 & 0{,}6859 & -0{,}1686 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 21{,}2838 & 23{,}5390 & 20{,}8609 & 16{,}2565 \\ 0 & 12{,}8029 & 9{,}6817 & 9{,}7117 \\ 0 & 0 & 20{,}1019 & 6{,}7580 \\ 0 & 0 & 0 & 13{,}0667 \end{bmatrix}.$$

Az optimális megoldás képlete a QR-felbontást használva

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{b},$$

és a megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0{,}9360; & -0{,}8767; & 0{,}8956; & 0{,}3426 \end{pmatrix},$$

valamint a parancs.

```
%%-- Tehat a QR-felbontassal kapott optimalis megoldas
x_hat2 = R \ Q' * b;
```

2. Legyen **B** az együtthatómátrix transzponáltja, és **b** egy tetszőleges ***n***-dimenziós vektor. Írjuk fel a $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer összes megoldását az $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{+}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{+}\mathbf{B})\mathbf{y}$ képlettel, ahol **y** tetszőleges vektor.

Tehát a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Ebből az következik, hogy a **B** teljes sorrangú lesz, hiszen **A** teljes oszloprangú volt. Azaz a mátrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 14 & 4 & 3 \\ 10 & 20 & 7 & 12 & 5 \\ 16 & 6 & 11 & 14 & 18 \\ 20 & 11 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

majd kértem a MATLAB-tól egy véletlen **y** és **b** vektort

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7; & 4; & 6; & 13; & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12; & 10; & 1; & 7 \end{pmatrix}.$$

Így már meg tudtam határozni a $\mathbf{Bx} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer összes megoldását, a feladat szövegében megadott képlet segítségével. A $\mathbf{B^+}$ előállításánál más mátrixszorzást kellett elvégeznem, hiszen teljes sorrangú a mátrix

$$\mathbf{B^+} = \mathbf{B^T}(\mathbf{BB^T})^{\mathbf{-1}}.$$

Az összes megoldás tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_{part}} + \mathbf{x_{hom}} = \mathbf{B^+b} + (\mathbf{I} - \mathbf{B^+B})\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0{,}1239 \\ 0{,}5205 \\ 0{,}4190 \\ -0{,}2665 \\ -0{,}2769 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5367 \\ -0{,}6695 \\ 0{,}4408 \\ 0{,}9314 \\ -1{,}2476 \end{bmatrix}.$$

Ha jól megnézzük nem az összes megoldást kaptam meg, csak egy adott $\mathbf{y}$-hoz tartozót. Az $\mathbf{y}$ tetszőleges megváltoztatásával (úgy, hogy zérus vektor nem lehet) egy teljesen más $\mathbf{x_{hom}}$ megoldásvektort kaptunk volna. Gyakorlatilag az $\mathbf{y}$ vektor megváltoztatásával a $\mathcal{N}(\mathbf{B})$-be eső komponensének nagyságát változtatjuk meg, amely meg éppen az egyetlen nulltérbeli megoldás konstans szorosával egyezik meg. Másképpen fogalmazva minden egyes $\mathbf{y}$-nal egy másik nullteret kifeszítő bázist készítünk, azaz egy másik nulltérbeli megoldást.
A nullteret az ide eső vektorok feszítik ki, amelyeket az $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ egyenlet megoldása szolgáltat. Mivel most a nulltér egydimenziós, így egyetlen elemű lesz bármely bázisa. Egy ilyen ortonormált bázisa az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0{,}2930 \\ 0{,}3655 \\ -0{,}2406 \\ -0{,}5085 \\ 0{,}6812 \end{bmatrix}$$

megoldásvektor.

A MATLAB parancsok a következőek voltak.

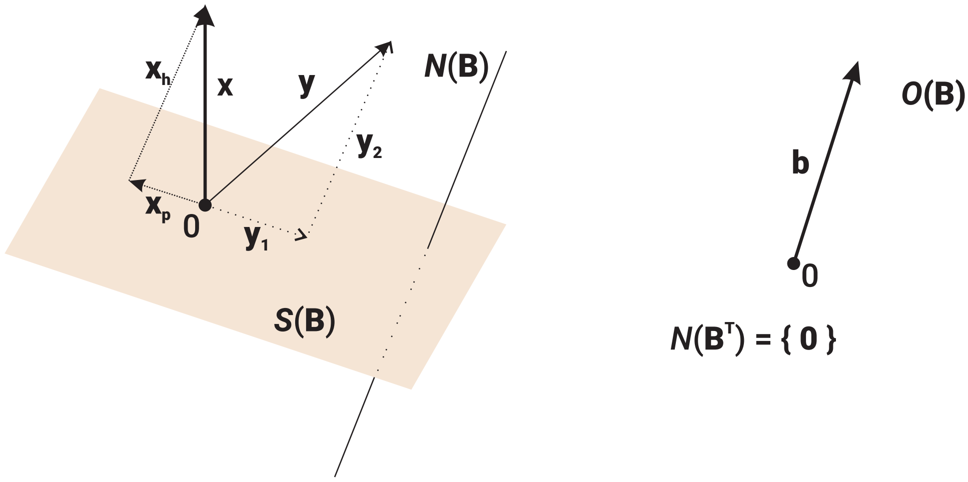
```
y   =  randi(20,1,m);
b_2 =  randi(20,1,n);
B_plus = B' / (B*B');

%%--- A partikularis resz
x_part = B_plus*b_2';

%%--- Es a homogen
x_hom  = (eye(length(y)) - B_plus*B)*y';

%%--- A nullter egy ortonomalt bazisa
x_hb = null(B);
```

3. Igazoljuk, hogy a fenti képlet valóban megadja az egyenletrendszer összes megoldását!.

A $\mathbf{B}$ mátrix négy kitüntetett alterét a következő oldali ábrán szemléltettem. Tudjuk, hogy $\mathbf{B}$ teljes sorrangú, hiszen egy teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltjaként kaptuk meg. Továbbá nulltere nem lesz üres, hiszen több ismeretlen szerepel a $\mathbf{Bx}$=$\mathbf{b}$ egyenletrendszerben, mint ahány egyenletünk van. Az $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ a teljes n-dimenziós valós vektortér lesz, hiszen az $\mathcal{N}(\mathbf{B^T}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$, mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú volt, így az $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$-nak a triviális megoldáson kívül nem volt más megoldása.
Azt már tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldása mindig két tagból áll: az összes homogén megoldásból $\mathbf{x_h}$ és egy $\mathbf{b}$-től függő partikuláris megoldásból $\mathbf{x_p}$, ahogy az az ábrán is látszik. A partikuláris megoldás a $\mathbf{B}$ sorteréből adódik úgy, hogy az $\mathbf{x}$-et a sortérre vetítjük

$$\mathbf{x_p} = \mathbf{B^+Bx}$$

a pszeudóinverz segítségével. A homogén összes megoldás $\mathbf{x_h}$ pedig a $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$-ból kapható meg.



A képletben is nagyon hasonló vehető észre

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{B}^{+}\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_p} + (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{+}\mathbf{B})\mathbf{y}.$$

Az egyenlet második tagjában egy tetszőleges nem nulla **y** vektor szerepel, amelynek ***egy*** homogén megoldást kell képviselnie az összes megoldásra vonatkozó állítás miatt. A **By**-nal készítünk egy oszloptéri $\mathbf{b_1}$ vektort, amelyhez egy $\mathbf{y_1}$ sortérbeli vektort rendelünk a $\mathbf{B}^{+}$ pszeudóinverzzel, tehát

$$\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{y_1}.$$

Végül a teljes tagot behelyettesítve

$$\mathbf{y_2} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{+}\mathbf{B})\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y_1}$$

és ebből észrevehető, hogy az $\mathbf{y_2}$ épp a nulltérbe eső komponens lesz, tehát egy homogén megoldása az egyenletnek. Ha véletlenül olyan **y** vektort választottunk volna, amely nulltérbeli, akkor a $\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, hiszen a valós test felett értelmezett mátrix esetén a nulltér és a sortér merőleges, így a nulltérből a sortérre való vetítés a zérus vektor szolgáltatja. Ha nem nulltérbeli vektor az **y**, akkor különböző **y**-okra különböző homogén megoldást kapnánk, tehát az összes homogén megoldásból egyet, ami persze egy adott lineáris kombinációja a nulltérbeli vektoroknak.