Felsőbb matematika vizsga – 2014-01-28

Név ______________________________ **Neptun** __________

Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását $\mathbb{F}_3$ fölött! *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a standard bázisra vonatkozó mátrixát, amely a valós 3-dimenziós teret az $(1,0,0)$ vektor irányában az $x+y=0$ egyenletű síkra vetíti! *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Az alábbi mátrixok közül melyik pozitív definit? Amelyik nem, miért nem? Adjunk egyszerű indoklást! Melyik mátrix irreducibilis? *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ nem definit, mert 0 van a főátlóján, a $\mathbf{B}$ sem, mert első és harmadik sora azonos, így rangja < 3, tehát egyik sajátértéke 0, a $\mathbf{C}$ pozitív definit (minden főminora pozitív)!

Csak a $\mathbf{B}$ reducibilis.

4. Adjuk meg azt az $\mathbf{x}$ vektort, melyre az $\mathbf{Ax}$ vektor a lehető legközelebb van a $\mathbf{b} = (6,2,8,4)$ vektorhoz, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldása az $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ egyenletből $\mathbf{x} = (5,-1)$.

5. Írjuk fel a $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Adjuk meg azt a 2-rangú mátrixot, melynek az előző példabeli $\mathbf{A}$ mátrixtól való távolsága Frobenius-normában a legkisebb!

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot, ha *(2 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^2 & e^2 & e^2/2 & e^2/6 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 & e^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

8. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát! *(2 pont)*

$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, ahol $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, a Jordan-bázis elemei a C oszlopai.

9. Írjuk le a Perron–Frobenius-tételnek a nemnegatív mátrixok sajátértékeinek spektrálkörön való elhelyezkedéséről szóló részét! *(3 pont)*

Ha az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrix irreducibilis, és $r = \rho(\mathbf{A})$, akkor *(1)* az $\mathbf{A}$ mátrixnak a spektrálkör határára eső sajátértékei 1 multiplicitásúak, és felírhatók $\{r, r\varepsilon, \ldots, r\varepsilon^{k-1}\}$ alakba, ahol $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$, továbbá *(2)* $\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha a spektrálkörén csak egy sajátérték van, azaz minden $\lambda = r$ sajátértékére $|\lambda| < r$.

10. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrixot! Határozzuk meg 1- és ∞-normáját, és ezeket is használva – minél egyszerűbb módon – spektrálsugarát, és legnagyobb szinguláris értékét! *(5 pont)*

Minden sor- és oszlopösszeg 20, így az 1- és ∞-norma is 20. Mivel nemnegatív mátrixoknál a spektrálsugár a legnagyobb és legkisebb sorösszeg közé esik, a spektrálsugár is 20. A mátrix szimmetrikus, így szinguláris értékei a sajátértékeinek abszolút értékeivel megegyeznek, tehát a legnagyobb szinguláris érték is 20. (A spektrálsugár abból is látszik, hogy a mátrix egyik sajátvektora az $(1, 1, 1, 1) > \mathbf{0}$ vektor, ami a 20-hoz tartozik, így a Perron-tétel szerint 20 a legnagyobb abszolút értékű sajátérték.)

11. Írjuk le annak bizonyítását, hogy ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren diagonalizálható! *(4 pont)*