ANALÍZIS 1. **2019. január 18.**

Mérnökinformatikus szak **4. VIZSGADOLGOZAT** Munkaidő: 90 perc

1. feladat (10 pont)

Határozza meg a $(-\mathrm{i}z)^3 = 8$ egyenlet összes komplex megoldását algebrai alakban! Készítsen egy ábrát a gyökök elhelyezkedéséről!

2. feladat (7+6+7=20 pont)

a) Igazolja, hogy $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A > 0$ esetén $\sqrt{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{A}$!

b) *i)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2+2}{(n+1)^2}} = ?$ *ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1} - n\right) = ?$

3. feladat (4+5+6=15 pont)

a) Mit jelent, hogy az f függvény határértéke az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban A? Írja le a definíciót!

b) *i)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x^2+1)}{x^2} = ?$ *ii)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{arctg}(5x)} = ?$

4. feladat (4+11=15 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy az f függvény az I intervallumon konvex? Adja meg a definíciót!

b) Határozza meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ függvény konvex illetve konkáv! Hol van a függvénynek inflexiója?

5.* feladat (7+7+7=21 pont)

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,\mathrm{d}x = ?$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+3}\,\mathrm{d}x = ?$ *c)* $\displaystyle\int (3x+2)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = ?$

6.* feladat (4+6=10 pont)

a) Mondja ki a Newton–Leibniz tételt!

b) Számolja ki az $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ integrált!

7.* feladat (9 pont)

Ábrázolja az alábbi görbék által határolt tartományt és számolja ki a területét:

$$y = x^3, \qquad y = 2 - x, \qquad y = 0.$$

IMSC feladat (14 IMSC pont)

Jelölje $\overline{\mathbb{R}}$ az $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt!

a) Definiálja egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *torlódási pontjait*!

b) Jelölje $\operatorname{Acc} A \subset \overline{\mathbb{R}}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát! (Accumulation point.) Döntse el a következő állításokról, hogy igazak-e vagy nem! Ítéleteit igazolja!

i) $\forall A \subset \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{Acc} A \subset A$. *ii)* $\forall A \subset \mathbb{R}$ esetén $A \subset \operatorname{Acc} A$.

iii) $\exists A \subset \mathbb{R}$: $A \neq \emptyset$ és $\operatorname{Acc} A = \emptyset$. *iv)* $\exists A \subset \mathbb{R}$: $|A| = \infty$ és $\operatorname{Acc} A = \emptyset$.

A $*$-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!