

1. (15p) Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2 - 1}{n^3 + 4}}$$

**Megoldás:**

Csak rendőr-elvvel lehet kiszámítani ezt a határértéket. Ehhez alsó és felső becslésre van szükség:

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5} \sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{3n^2 - n^2}{n^3 + 4n^3}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2 - 1}{n^3 + 4}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}$$

Mivel minden  $p \in \mathbb{R}^+$  konstansra  $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$ , továbbá  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ , így az alsó és felső becslés is 1-hez tart, azaz a rendőr-elv miatt az eredeti határérték is 1.

2. (20 p) Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken az  $f(x) = x + \frac{16}{x}$  függvény szigorú monoton! Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

**Megoldás:**

Ehhez először is a függvény értelmezési tartományát kell meghatároznunk.  $f(x)$  a nevező gyökeinek kivételével értelmezett, azaz  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n. A monotonitást az első derivált segítségével vizsgálhatjuk, ehhez:

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x^2 - 16) \quad x \neq 0$$

Mivel  $\frac{1}{x^2} > 0$  minden  $x \in D_f$ -re, így csak  $x^2 - 16$  előjelén múlik a derivált előjele. Ez egy felefele nyíló parabola, amely a két gyöke között negatív, így

$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ -ből,  $f'(x) > 0$  ha  $x \in (-\infty, -4)$  illetve  $x \in (4, \infty)$ , ezen két intervallumon a függvény szigorú monoton nő. Másrészt a két gyök között negatív a derivált, így a függvény szigorú monoton csökken  $(-4, 0)$ -n és  $(0, 4)$ -en.

Inflexiós pontja csak ott lehet a függvénynek ahol konvexitást vált, ehhez  $f''(x) = 0$  szükséges feltétel (ha kétszer deriválható a függvény). Így

$$f''(x) = \frac{32}{x^3} \quad x \neq 0$$

Mivel egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a második derivált sehol sem 0, tehát a függvénynek nincsen inflexiós pontja.

3. (15 p) Számítsa ki az alábbi határértéket, amennyiben létezik!

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x)^{\tan(x)}$$

**Megoldás:**

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sin(x)^{\tan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\ln(\sin(x)^{\tan(x)})} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\tan(x) \ln(\sin(x))}$$

Az  $e^x$  függvény folytonossága miatt elegendő a kitevő határértékét kiszámítani, majd a kapott határértéket visszahelyettesíteni a kitevőbe. A kitevő egy  $0 \cdot \infty$  alakú szorzat a 0-ban, így átalakítva:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \tan(x) \ln(\sin(x)) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin(x))}{\cotan(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\cos(x) \sin(x) = 0,$$

innen az eredeti határérték:  $e^0 = 1$ .

4. (15 p) Határozza meg az alábbi függvény érintőegyenésének egyenletét az  $x_0 = 1$  pontban!

$$f(x) = 3 \arcsin(1 - x) + 8$$

**Megoldás:** Az érintőegyenés egyenlete  $x_0$ -ban:

$$y_e = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

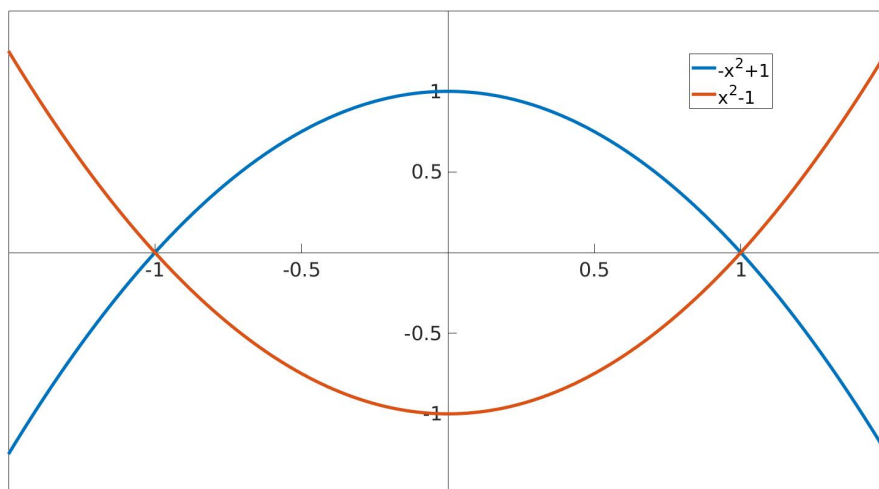
Ehhez  $f(x_0) = f(1) = 3 \arcsin(1 - 1) + 8 = 3 \arcsin(0) + 8 = 8$ , illetve

$$f'(x) = 3 \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}}$$

Innen  $f'(1) = -3$ , azaz a keresett egyenes egyenlete:  $y_e = -3(x - 1) + 8 = -3x + 11$ .

5. (15 p) Határozza meg az  $f(x) = x^2 - 1$  és a  $g(x) = -x^2 + 1$  függvények görbéje által határolt korlátos síkidom területét!

**Megoldás:**



A felső határoló függvény az  $g(x) = -x^2 + 1$ , az alsó az  $f(x) = x^2 - 1$ . A metszéspontok az  $f(x) = g(x)$  megoldásából  $x^2 - 1 = -x^2 + 1$ , azaz  $2x^2 - 2 = 0$ , így  $(x - 1)(x + 1) = 0$ . A két metszéspont tehát az  $x_1 = -1$  és az  $x_2 = 1$ . Így a keresett terület az alábbi integrál kiszámításával kapható meg:

$$\int_{-1}^1 -x^2 + 1 - (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 -2x^2 + 2 dx = \left[ \frac{-2x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \frac{-2}{3} + 2 - \left( \frac{2}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3}$$

6. (20 p) Számítsa ki az alábbi integrálokat (tipp: az egyik integrál kiszámításához alkalmazza az  $t = e^x$  helyettesítést)!

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

**Megoldás:**

Az első integrál  $\frac{f'}{f}$  alakú, itt nem szükséges helyettesíteni, hanem közvetlenül

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln |e^x + 1| + C,$$

ahol  $C \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós konstans.

A másodikhoz alkalmazzuk a  $t = e^x$  helyettesítést! Ekkor  $e^{2x} = t^2$ , illetve  $e^x = t$ -ből  $x = \ln(t)$ , innen  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$ , azaz

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{t^2}{1 + t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{t + 1} dt = \int \frac{t + 1 - 1}{t + 1} dt = \int 1 + \frac{-1}{t + 1} dt =$$

$$t - \ln |t + 1| + C = e^x - \ln |e^x + 1| + C,$$

ahol  $C \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós konstans.

7. (+15 p) *(Ezen feladat megoldása nem szükséges a maximum pontszám eléréséhez.)*  
Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2 = 0$$

### Megoldás:

Írjuk fel  $z$ -t  $z = a + ib$  algebrai alakban, ekkor:

$$\begin{aligned} (a + ib)^2 + 2 \left( \sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 + (a - ib)^2 &= 0 \\ a^2 + 2aib - b^2 + 2(a^2 + b^2) + a^2 - 2aib - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor a képzetes rész a baloldalon kiesik, így minden  $a, b$  párra igaz lesz a képzetes részekre vonatkozó  $0 = 0$  egyenlet. A valós részre vonatkozó egyenlet:

$$a^2(1 + 2 + 1) + b^2(-1 + 2 - 1) = 4a^2 = 0$$

Ennek egyetlen valós megoldása az  $a = 0$ . Így azt kapjuk, hogy az egyenletet kielégíti minden olyan komplex szám, amelynek valós része 0, képzetes része pedig tetszőleges, azaz ha  $t \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós paraméter, akkor  $z = it$  megoldása az eredeti egyenletnek.

**Az alábbi feladatot csak a 40% eléréséhez javítjuk ki.**

8. (15 p) Döntse el, hogy van-e az alábbi mátrixnak inverze! (Ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{bmatrix}$$

### Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így ennek kiszámításához a fenti mátrixot Gauss-elimináljuk (mivel nincs benne sok 0 a kifejtési tétel itt nem célszerű).

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 11 \\ 0 & -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz

$$7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-5) \neq 0,$$

tehát invertálható a mátrix.