TÖKI ZH2 elméleti összefoglaló

Valószínűség számítás összefoglaló

Logikai szita:

$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$
$\mathbf{P}(A+B+C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC)$

Boole-egyenlőtlenségek:

$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) \leq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3)$
$\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) \geq 1 - \mathbf{P}(\bar{A}_1) - \mathbf{P}(\bar{A}_2) - \mathbf{P}(\bar{A}_3)$

Feltételes valószínűség, szorzási szabály:

$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$, „$A$ feltéve B”, mekkora eséllyel következik be A, ha B-t tudjuk, hogy bekövetkezett.
$\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 A_4) = \mathbf{P}(A_4|A_1 A_2 A_3) \cdot \mathbf{P}(A_3|A_1 A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1)$

Teljes valószínűség tétele:

Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teljes eseményrendszer (pontosan egy következik be közülük), B tetszőleges esemény:
$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(B|A_2) \cdot \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(B|A_3) \cdot \mathbf{P}(A_3) + \cdots + \mathbf{P}(B|A_n) \cdot \mathbf{P}(A_n)$

Bayes-tétel:

Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ teljes eseményrendszer, B tetszőleges esemény:

$$\mathbf{P}(A_1|B) = \frac{\mathbf{P}(A_1 B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B|A_1) \cdot \mathbf{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B|A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i)}$$

Eloszlásfüggvény:

X egy valószínűségi változó: az $F_X(t) = \mathbf{P}(X < t)$ függvényt az X v.v. eloszlásfüggvényének hívjuk.
Eloszlásfüggvény tulajdonságai:
$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t \to x-0} F_X(t) = F_X(x)$ (=„balról folytonos”), F_X monoton nő.

Binomiális eloszlás:

$X \in B(n,p)$, $\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Használjuk, ha n független eseményből X következik be, mindegyik p valószínűséggel.

Poisson eloszlás:

$X \in Po(\lambda)$, $\mathbf{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, Ha n nagy és p kicsi, $\lambda = np$-re: $B(n,p) \approx Po(\lambda)$.
Használjuk, csak ha *NAGYON* muszáj, binomiális eloszlás közelítésére.

Geometriai eloszlás:

$X \in G(p)$, $\mathbf{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, Örökifjú!
Használjuk, ha egy kísérletet *ADDIG* ismételgetünk, *AMÍG* egy adott p valószínűségű esemény be nem következik (először). X az, ahányadikra elsőre bekövetkezett.

Exponenciális eloszlás:

$X \in E(\lambda)$, Örökifjú!
Sűrűségfüggvény: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, Eloszlásfüggvény: $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.
Használjuk, ha örökifjú dolgok élettartamáról van szó. X az az *IDŐ*, amikor elromlik (először).

Név:	Indikátor	Binomiális	Poisson	Geometriai
Jel:	$X \in I_A(p)$	$X \in B(n,p)$	$X \in Po(\lambda)$	$X \in G(p)$
Képlet:	$\mathbf{P}(X=0)=q$ $\mathbf{P}(X=1)=p$	$\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$	$\mathbf{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k \in \{0,1,2,\dots\}$	$\mathbf{P}(X=k)=p\cdot q^{k-1}$ $k \in \{1,2,3,\dots\}$
$\mathbf{E}(X)$	p	np	λ	$\frac{1}{p}$
$\boldsymbol{\sigma}^2(X)$	pq	npq	λ	$\frac{q}{p^2}$
$\boldsymbol{\sigma}(X)$	$\sqrt{pq}$	$\sqrt{npq}$	$\sqrt{\lambda}$	$\frac{\sqrt{q}}{p}$

Név:	Egyenletes	Exponenciális	Standard normál	Normális
Jel:	$X \in U(a,b)$	$X \in E(\lambda)$	$X \in N(0,1)$	$X \in N(m,\sigma)$
$f_X(x)$:	$\frac{1}{b-a}$, ha $x \in (a,b)$	$\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x>0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\varphi(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-m}{\sigma})$
$F_X(x)$:	$\frac{x-a}{b-a}$, ha $x \in (a,b)$	$1-e^{-\lambda x}$, ha $x>0$	$\Phi(x)$	$\Phi(\frac{x-m}{\sigma})$
$\mathbf{E}(X)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	0	m
$\boldsymbol{\sigma}^2(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	1	σ^2
$\boldsymbol{\sigma}(X)$	$\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\lambda}$	1	σ

Evolúciós egyenlet sorhosszra

A rendszerben a kezdő (nulladik) időpillanatban X_0 igény van. Vezessük be a következő jelöléseket:
X_n a sorhossz az n-edik időegység végén;
Y_n az n-edik időegységben érkezett új igények száma;
V_n azt mutatja meg, hogy a kiszolgáló a kapacitásából mennyit képes kiszolgálásra fordítani az n-edik időegységben, azaz legfeljebb hány várakozó igénynek tud szolgáltatást nyújtani.

A bevezetett mennyiségekről feltesszük, hogy
$\{Y_n\}$ független és azonos eloszlású sorozat;
$\{V_n\}$ is független és azonos eloszlású;
$\{V_n\}$ független $\{Y_n\}$-től;
az $\{\{Y_n\},\{V_n\}\}$ pár független X_0-tól.

Ekkor a sorhossz változását a következő evolúciós egyenlet írja le:

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1},$$

Tegyük fel, hogy

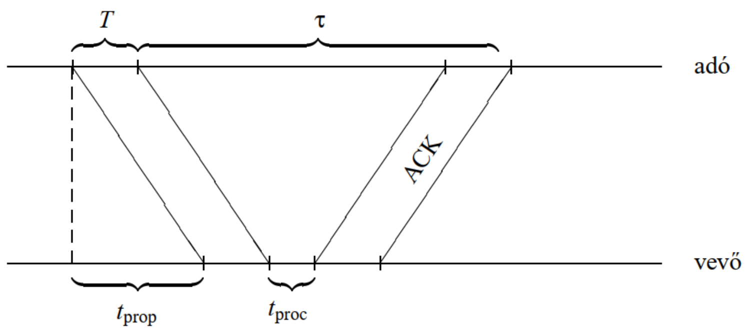
$$p_{ij} > 0, \text{ ha vagy } i=0 \text{ és } j=0,1 \text{ vagy } i>0 \text{ és } j=i-1,i,i+1,$$

továbbá

$$\mathbf{E}(Y_1) < \mathbf{E}(V_1) < \infty.$$

Ekkor az $\{X_n\}$ Markov-lánc stabil.

Stop-and-Wait protokoll



Legyen T egy csomag adásához szükséges idő, t_{prop} a jelterjedési idő, t_{proc} pedig az az idő, amely a vevőnek szükséges a csomag feldolgozásához és a nyugta visszaküldéséhez. Mivel új csomagot csak akkor küldhet az adó, amikor az előző csomag sikeres továbbításáról visszaérkezett a nyugta a vevőtől, ezért az adó időzítést állít be

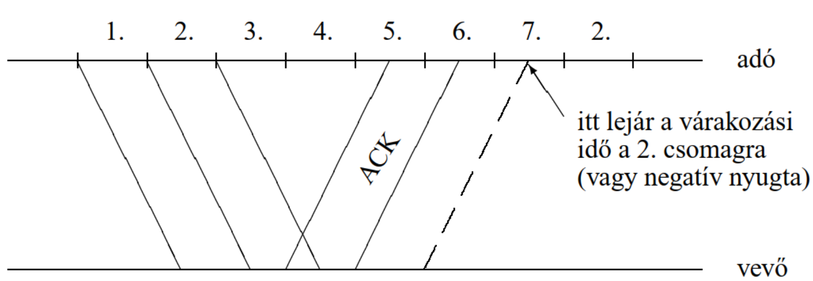
$$\tau = 2t_{\text{prop}} + T + t_{\text{proc}}$$

hosszra: ha ez alatt nem jön nyugta a csomag sikeres továbbításáról a vevőtől, akkor ezt átviteli hibának tekinti. A minimális idő, amelynek két sikeres csomag között el kell telnie: $T + \tau$.

Legyen egy csomag hibás átvitelének valószínűsége p. Tegyük fel, hogy egy csomagot tetszőlegesen sokszor újraküldhetünk. A gyakorlatban ez általában nem igaz, ugyanis ha a sikertelen átviteli próbálkozások száma elér egy előre megadott értéket, akkor az összeköttetést hibásnak nyilvánítják, és a felsőbb rétegek feladata a probléma megoldása. A visszacsatolás esetleges hibáját elhanyagoljuk, tehát egy leadott nyugta mindig rendben visszaér az adóhoz. Ha az adás az i-edik kísérletre sikeres, a továbbítási idő $i(T+\tau)$, melynek eloszlása $(1-p)$ paraméterű geometriai eloszlás. Így egy csomag sikeres átvitelének átlagos ideje:

$$\mathbf{E}(t_{\text{trans}}) = \frac{T+\tau}{1-p}.$$

Go-Back-N protokoll



A Stop-and-Wait protokollnál megismert időjellemzőket felhasználva a Go-back-N protokollnál két csomag adása között csak minimum T időnek kell eltelnie (nem pedig $T+\tau$ időnek).

$$\mathbf{E}(t_{\text{trans}}) \quad = \quad \frac{p\tau + T}{1-p}$$

Poisson folyamat

lambda = intezitás

t = jövőbeli idő

k = bekövetkezett esemény

$$\mathbf{P}(X(t)=k)| = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \quad (t>0, k\in S);$$

Véges Markov lánc stabilitás

tétel. Egy véges állapotú, irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc stabil.

Foster kritérium

Egy $\mathcal{X}$ homogén Markov-lánc stabilitására az 1.11. tétel ad elégséges feltételt. Az ott megkívánt tulajdonságok közül az irreducibilitást és az aperiodikusságot általában könnyebben, míg a pozitív visszatérőséget nehezen lehet ellenőrizni. A tétel jelentősége, hogy amennyiben egy irreducíbilis és aperiodikus Markov-lánc esetén létezik $i,j\in S$ úgy, hogy $p_{ij}^{(n)}$ nem 0-hoz tart, akkor az a lánc pozitív visszatérő, tehát stabil is. Ezt a tétel végén mondottak alapján úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha egy irreducíbilis és aperiodikus Markov-láncnak van legalább egy állapota, melynek valószínűsége nem 0-hoz tart, akkor az a lánc stabil.

A továbbiakban Foster egy eredményét mutatjuk meg, amely egy elégséges feltételt ad a stabilitásra, és amelynek bizonyítása az előző megjegyzésre épül.

Foster-kritérium Legyen az $\mathcal{X}$ Markov-lánc irreducíbilis és aperiodikus. Tegyük fel, hogy léteznek $I\geq 0$, $C>0$ és $d>0$ számok úgy, hogy $k\leq I$ esetén

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq C,$$

és $k>I$ esetén

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq k-d.$$

Ekkor a lánc stabil.

Tegyük fel, hogy a stacionárius eloszláshoz tartozó második momentum véges és $\{V_n\}$ bináris. Ekkor

$$\mathbf{E}(X_0') = \frac{\mathbf{E}(Y_1)(1-2\mathbf{E}(Y_1)) + \mathbf{E}\left(Y_1{}^2\right)}{2(\mathbf{E}(V_1) - \mathbf{E}(Y_1))}.$$

Átlagos késleltetés (Little formula)

(Little-formula). Ha $Y_1, Y_2, \ldots$ az egymás utáni időegységekben érkező igények száma, amelyről feltesszük, hogy független, azonos eloszlású sorozat, akkor

$$\bar{D} = \frac{\mathbf{E}(X_0')}{\mathbf{E}(Y_1)},$$

ahol X_0' eloszlása a határeloszlás.

Poisson és binomiális eloszlás kapcsolata

3.1. tétel. Legyen a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < p_n < 1)$ számsorozat olyan, hogy

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0.$$

Ekkor az n-edrendű, p_n paraméterű binomiális eloszlás k-adik tagja $n \to \infty$ esetén tart a λ paraméterű Poisson-eloszlás k-adik tagjához, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n{}^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Markov lánc visszatérőség

Az $i \in S$ állapotot visszatérőnek nevezzük, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1,$$

és nem visszatérőnek, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1.$$

Egy $\mathcal{X}$ Markov-láncot visszatérőnek nevezünk, ha minden állapota visszatérő, és nem visszatérőnek, ha minden állapota nem visszatérő.

Az $i \in S$ állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Az $i \in S$ állapot pontosan akkor nem visszatérő, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

A sorhossz stacionárius eloszlása

$$\gamma = \frac{b}{a}.$$

$$p_0 = 1 - \frac{q}{p}.$$