1. Feladat 3+6+4=13 pont)

Definiálja a Cauchy-sorozat fogalmát! Igazolja, hogy minden konvergens sorozat Cauchy! Igaz-e az állítás megfordítása $\mathbb{Q}$-ban, illetve $\mathbb{R}$-ben?

2. Feladat (3+3+9=15 pont)

(a) Mikor mondjuk, hogy az f valós függvény az I intervallumon konvex? (Adja meg a definíciót!)

(b) Kétszer deriválható függvények esetén milyen kapcsolat van a konvexitás és a második derivált között? (Mondja ki a tanult tételt!)

(c) Vizsgálja meg konvexitás szempontjából az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+3x^2}}$ függvényt!

3. Feladat (10 pont)

Az $f(x) = \sin(x)$ függvény grafikonjának a $[0, \pi]$ intervallumba eső részét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

4. Feladat (10 pont)

$$y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = 5\mathrm{e}^{3x}$$

Határozza meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását!

5. Feladat (4+11=15 pont)

(a) Mikor integrálható tagonként a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor? Mondja ki a tanult tételt!

(b) Határozza meg az $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$ hatványsor konvergenciatartományát és összegét!

6. Feladat (12 pont)

$$I = \int_{y=1}^{\mathrm{e}} \int_{x=1/\mathrm{e}}^{1/y} \cos(x - \ln x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Az integrálok sorrendjének felcserélésével határozza meg a fenti I integrál értékét! Készítsen ábrát az integrálási tartományról!

7. Feladat * (10 pont)

Legyen f az a 2π-szerint periodikus függvény, amelyre $x \in [-\pi, \pi)$ esetén $f(x) = x$. Határozza meg az f függvény Fourier-sorában az a_0, a_3 és b_5 együtthatókat!

8. Feladat * (4+7+4=15 pont)

(a) Definiálja két függvény konvolúcióját

(b) Igazolja, hogy a konvolúció kommutatív!

(c) Mi a kapcsolat a Fourier-transzformáció és a konvolóció között? Írja fel a tanult egyenlőséget! (Bizonyítani nem kell.)

(Felteheti, hogy „elegendően szép” függvényekkel dolgozunk.)

A $*$-al jelölt feladatokból legalább 7 pontot el kell érni!