A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\left(\binom{n}{4} + \binom{n}{3}\right)$ teljesül minden pozitív egész n számra.

A baloldalon álló mennyiség azt számlálja le, hogy egy n csúcsú (és ilyenformán $\binom{n}{2}$ éllel rendelkező) gráfból hányféleképp lehet két különböző élt kiválasztani. (2 pont)
Két különböző él összesen 3 vagy 4 különböző végpontot határoz meg. (2 pont)
Ha 4 végpont adott, akkor ezeken 3-féleképp lehet 2 élt úgy kiválasztani, hogy mind a 4 végpontot felhasználjuk. (2 pont)
Ha pedig 3 pont van megadva, akkor az azok között futó 3 élből szintén 3-féleképp választhatunk ki kettőt. (2 pont)
Ezek szerint a vizsgált kifejezés jobboldala is éppen azt számolja meg, hogy hányféleképp lehet a K_n-ből két különböző élt kiválasztani. Ezzel a feladat állítását igazoltuk. (2 pont)

Lehet persze favágással is.

A baloldali kifejezést kifejtve kapjuk, hogy $\binom{\binom{n}{2}}{2} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) = \frac{1}{8}n(n-1)\left(n(n-1)-2\right) = \frac{1}{8}(n^2-n)(n^2-n-2) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3-n^2+2n)$. (4 pont)
A jobboldali kifejezéssel is megküzdünk: $3\left(\binom{n}{4}+\binom{n}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\right) = 3\left(\frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n) + \frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)\right) = \frac{1}{8}\left(n^4-6n^3+11n^2-6n+4(n^3-3n^2+2n)\right) = \frac{1}{8}(n^4-2n^3-n^2+2n)$, (4 pont)
ami bámulatosan egyezik a korábban kiszámolt kifejezéssel, így a feladatbeli azonosságot szerencsésen igazolja. (2 pont)

2. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ estén az $i - j$ szám 5-tel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

Világos, hogy az 1 és 2, a 2 és 3, a 3 és 4, a 4 és 5, az 5 és 6, a 6 és 7, valamint a 7 és 1 között él fut, a G gráf definíciója alapján. (3 pont)
Ezek az élek éppen egy 7 hosszú kört alkotnak G-ben, (3 pont)
márpedig azt tanultuk, hogy páros gráfban nem létezhet páratlan kör. (3 pont)
Ezek szerint G nem páros gráf. (1 pont)

3. Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát, úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?

Feleljen meg a G gráf az egységkocka (ill. a testátlókkal ellátott kocka) élhálójának. Ha valahogyan elkészítjük drótokból az élvázat, akkor minden drótdarab a gráf egy sétájának felel meg úgy, hogy G minden egyes éle pontosan az egyik sétához tartozik. Azt kell tehát meghatároznunk, mi a legkisebb számú séta, amire G élhalmaza felbontható. (1 pont)
A G gráf minden páratlan fokú csúcsában véget kell érnie legalább egy drótnak. (2 pont)
Ha G a kockának felel meg, akkor mind a 8 csúcsának a foka 3, (1 pont)
így legalább 4 drótdarab kell, hogy legyen 8 drótvégünk. (1 pont)
Az is világos, hogy 4 drótdarab elég: pl a fedőlap egy függőleges éllel, az alsó lap egy függőleges éllel egy-egy drótból meghajtható, és a maradék két függőleges élhez is kell egy-egy egységnyi hosszú drót. (1 pont)
Ha G a testátlókat is tartalmazza, akkor mind a 8 csúcs páros fokú. (1 pont)
Ráadásul G összefüggő is, (1 pont)
ezért van Euler-körsétája. (1 pont)
A tanult tétel miatt tehát vanz Euler körsétája, és a drótot e mentén meghajogatva látjuk, hogy nincs szükség ebben az esetben darabolásra. (1 pont)

4. Legyen G a $(2, 3, 7, 2, 4, 3, 3, 2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G-nek Hamilton-köre?

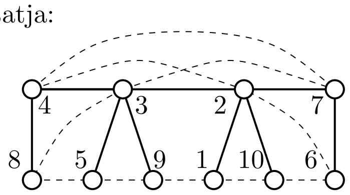
Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért F-nek 10 csúcsa van. (1 pont)
Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (2 pont)
Ezek szerint F-ben a maximális fokszám a 4. (2 pont)
Mivel G az F komplementere, G-ben a minimális fokszám $9-4=5$ lesz, vagyis G bármely csúcsának fokszáma

legalább 5. (1 pont)
Dirac tétele szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (3 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 10$-re, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

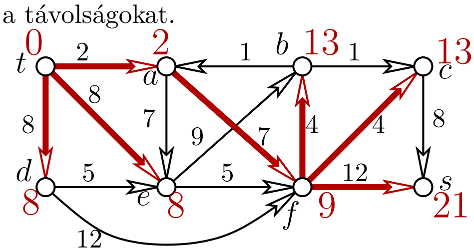
1	5	6	7	8	4	9	3	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10



(5 pont)

Az a kérdés, hogy az F fa 10 csúcsán van-e olyan kör, aminek egyik éle sem esik egybe F valamelyik élével. (2 pont)
Ha ügyesek vagyunk, könnyen találunk ilyen kört. Egyet pl szaggatott vonalakkal rajzoltunk az ábrába. (2 pont)
Az tehát a válasz, hogy a G gráfnak van Hamilton köre. (1 pont)

5. Határozzuk meg az ábrán látható gráfban a legrövidebb út hosszát s-ből t-be a Dijkstra algoritmus segítségével, és adjuk meg a csúcsoknak azt a sorrendjét, ahogyan megállapítjuk a távolságokat.



A Dijkstra algoritmust a tanultak szerint végrehajtva s, a, d, e, f, b, c, t sorrendben vesszük be a csúcsokat az S halmazba, aholis azok a csúcsok vannak, amiknek a s-től való távolságát már megállapítottuk. (Helyes az a sorrend is, ahol a d, e vagy a b, c pontok sorrendje fordított. (5 pont)
Az ábrán látható az algoritmus futása után kapott eredmény, ahonnan az látszik, hogy t távolsága s-től pontosan 21. (5 pont)

6. A mellékelt ábrán látható hálózatban a 12 kapacitású df él elromlott, kapacitása 0 lett. Határozzuk meg a kapott hálózatban a maximális st folyam nagyságát. Kiderült közben, hogy a kiesett élt egy p kapacitású éllel tudjuk pótolni. Határozzuk meg, hogyan függ a maximális nagyságú st folyam nagysága a p paraméter értékétől!

Az az első feladat, hogy $p = 0$-ra határozzunk meg egy maximális nagyságú folyamot. Ezt az órán tanultak szerint végezzük, a folyam maximalitását egy folyamnagysággal azonos kapacitású vágással igazoljuk. (3 pont)
Az 1. ábrán látható a megoldás, egy 9 értékű folyam és egy ugyanilyen kapacitású st-vágás, amit a jelölt X halmaz határoz meg. (A kisebben szedett számok a folyam nagyságát mutatják az adott élen, ahol nincs ilyen szám, ott nem folyik folyam. (3 pont)
Ebben a folyamban most elkezdünk a p kapacitású él segítségével további növelő utakat keresni. Találunk is egyet, amin növelve $p \leq 8$ esetén egy $9 + p$ nagyságú folyamot kapunk. (2 pont)
Az Y által meghatározott st-vágás mutatja, hogy ennél nagyobb folyam nem lehetséges. (1 pont)
Hátra van még a $p > 8$ eset. Ekkor az $Y \setminus \{d\}$ olyan st vágást határoz meg, aminek a kapacitása 17, azaz $p > 8$ esetén a 17 nagyságú folyam elérhető, de ennél nagyobb nem lehetséges. (1 pont)