

## Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	8
Erről a jegyzetről.....	8
A tantárgyról.....	8
Ajánlott irodalom.....	8
Figyelmeztetés.....	8
Megjegyzés.....	8
1. előadás.....	9
Áram mágneses tere.....	9
Végtelen hosszúságú vezetők.....	9
Árammal átjárt vezetőhurokra ható forgatónyomaték.....	9
Mágneses dipólnyomaték.....	9
Mágneses térerősség vákuumban.....	10
2. előadás.....	10
Áramok mágneses tere.....	10
Vékony, árammal átjárt vezető.....	10
Gerjesztési törvény.....	10
Végtelen hosszú egyenes vezető.....	10
Rektifikálható (kiegyenesíthető) görbe.....	10
Szuperpozíció elve.....	11
Gerjesztési törvény definíciója.....	11
Szolenoid.....	11
Toroid.....	11
Mágneses tér anyagok jelenlétében.....	12
Bevezetés.....	12
Modell.....	12
Mágnesezettség.....	12
3. előadás.....	12
Mágneses szuszceptibilitás.....	12
Mágneses szuszceptibilitás.....	12
Anyagok vizsgálata.....	13
Anyagfajták.....	13
Kis kitérő - EISZ.....	13
Domének.....	14
A ferromágneses anyagok hiszterézis görbéje.....	14
Curie hőmérséklet.....	14
Az anyag előélete.....	14
Hiszterézis görbedarabok.....	14
Átmenet a különböző anyagok határfelületén.....	14
A villamos áram törvényei.....	15
1. gyakorlat.....	15
Első feladat (sorszám ismeretlen).....	15
Megoldás.....	15
Második feladat (sorszám ismeretlen).....	16
Feladat megoldása.....	16
Harmadik feladat (sorszám ismeretlen).....	17
Megoldás.....	17
Negyedik feladat (sorszám ismeretlen).....	17
Megoldás.....	18

Ötödik feladat (sorszám ismeretlen).....	18
Megoldás.....	18
4. előadás.....	19
Az Ohm törvény integrális alakja.....	19
Ellenállás, Ohm törvénye.....	19
Ohmikus ellenállás:.....	19
Egyenletes keresztmetszetű vékony vezető huzal ellenállása.....	19
Fajlagos vezetőképesség.....	19
Az Ohm törvény differenciális alakja.....	19
Folytonossági egyenlet (töltésmegmaradás).....	19
Egyenáram esetén.....	20
Az áramsűrűség vektor viselkedése különböző anyagok határfelületén.....	20
Fontos törvények.....	20
Joule törvény.....	20
Kirchhoff törvényei.....	21
Az indukált villamos tér törvényei.....	21
Indukció.....	21
A galvanométer.....	21
5. előadás.....	22
Érdekességek.....	22
Thompson ágyú.....	22
A megálló inga.....	22
Törvények.....	22
Lenz törvénye.....	22
Faraday-féle indukciós törvény.....	22
2. gyakorlat.....	23
Első feladat (241).....	23
Megoldás.....	23
Második feladat (247).....	24
A feladat megoldása.....	24
Harmadik feladat (263).....	24
Feladat szövege.....	24
Megoldás.....	24
Ciklotron.....	25
Negyedik feladat (260).....	25
Megoldás.....	25
Ötödik feladat (296).....	25
Megoldás.....	26
6. előadás.....	26
Mágneses indukció.....	26
Vezetőkeret.....	26
„Nyugvó” indukció:.....	26
Stokes tétele:.....	26
Kölcsönös indukció és önindukció.....	27
Induktív ellenállás:.....	27
A mágneses tér energiája.....	27
R-C áramkörök.....	27
Szolenoid.....	27
Probléma.....	28
7. előadás.....	28

A Maxwell egyenletek.....	28
Vezetési áram.....	28
Eltolási áram.....	28
A Maxwell-egyenletek teljes rendszere (táblázatba foglalva).....	28
Elektromágneses hullám egyenlete vákuumban.....	29
A hullámegyenlet megoldása.....	29
3. gyakorlat.....	29
Első feladat (295).....	29
Megoldás.....	30
Második feladat (299).....	30
Megoldás.....	30
Harmadik feladat (297).....	30
Megoldás.....	31
8. előadás.....	32
Elektromágneses hullám keltése.....	32
„Szemlélet”.....	32
Dipólusantenna.....	32
Elektromágneses energia terjedése.....	32
Rezgőkör.....	32
Az elektromágneses tér energiasűrűsége, a Poynting vektor.....	32
Vezetékpárban szállított energia (tökéletes vezető).....	33
fajlagos ellenállású vezeték esete.....	33
9. előadás.....	34
Elektromágneses sugárzás.....	34
A dipólussugárzás kvalitatív jellemzése.....	34
Látható fény.....	34
Dipólus sugárzási teljesítménye.....	34
Az elektromágneses hullámok impulzusa; fénynyomás.....	35
Kvalitatíve.....	35
Geometriai optika.....	35
Fényvisszaverődés.....	35
Fényvisszaverődés síktükroön.....	35
4. gyakorlat.....	36
Első feladat (216).....	36
Megoldás.....	36
Második feladat (264).....	36
Megoldás.....	36
Harmadik feladat (265).....	37
Megoldás.....	37
Negyedik feladat (sorszám ismeretlen).....	37
Megoldás.....	37
Ötödik feladat (sorszám ismeretlen).....	38
Megoldás.....	38
10. előadás.....	39
Kísérlet.....	39
11. előadás.....	39
Fényvisszaverődés.....	39
A fényvisszaverődés törvénye:.....	39
Fermat elv:.....	39
Fényvisszaverődés gömbtükroön:.....	39

Paraxiális közelítés:.....	39
Homorú tükör, valódi kép:.....	40
Homorú tükör, virtuális kép:.....	40
Domború tükör, virtuális kép.....	40
Előjel konvenció:.....	41
5. gyakorlat.....	41
Emlékeztető.....	41
Rendelkezésre álló képletek.....	41
Rendelkezésre álló ábrák.....	41
Első feladat (360).....	41
Megoldás.....	41
Második feladat (362).....	42
Megoldás.....	42
Harmadik feladat (365).....	42
Megoldás.....	42
Negyedik feladat (366).....	42
Megoldás.....	42
Ötödik feladat (367).....	42
Megoldás.....	43
12. előadás.....	43
Sugárdiagramm és nagyítás.....	43
Tükrök nevezetes sugármenetei.....	43
homorú tükör, valódi fordított kép.....	43
homorú tükör, egyenes állású virtuális kép.....	43
domború tükör, egyenes állású virtuális kép.....	43
Számítások.....	44
Nagyítás.....	44
A fénytörés.....	44
Törésmutató.....	44
Diszperzió.....	44
A fénytörés:.....	44
Az előadás jegyzete befejezetlen!.....	44
13. előadás.....	44
6. gyakorlat.....	44
Első feladat (373).....	44
Megoldás (számítással).....	45
Szerkesztéssel:.....	45
Második feladat (374).....	45
Megoldás:.....	46
Harmadik feladat(375).....	46
Megoldás:.....	46
Negyedik feladat(379).....	46
Megoldás.....	46
Ötödik feladat(380).....	46
Megoldás.....	47
14. előadás.....	47
15. előadás.....	47
7. gyakorlat.....	47
Első feladat (337).....	47
Megoldás:.....	47

Második feladat (338).....	48
Megoldás:.....	48
Harmadik feladat(339).....	48
Megoldás:.....	48
Negyedik feladat(340).....	48
Megoldás:.....	48
Ötödik feladat(341).....	48
Megoldás:.....	48
Hatodik feladat(342).....	48
Megoldás:.....	48
16. előadás.....	49
Zárthelyi.....	49
17. előadás.....	49
Optikai rácsok.....	49
A rács felbontása:.....	49
Diszperzió (rácsnál):.....	50
A röntgen-diffrakció.....	50
Röntgendiffrakciós módszerek.....	50
Fresnel diffrakció.....	50
Fresnel -féle zónalemez.....	50
8. gyakorlat.....	51
Segítség a feladatok megoldásához.....	51
Galilei-Newton transzformáció.....	51
Lorentz -féle transzformáció.....	51
Hosszkontrakció.....	51
Idődilatáció.....	51
Első feladat (sorszám ismeretlen).....	51
Megoldás.....	51
Második feladat (sorszám ismeretlen).....	52
Megoldás.....	52
Harmadik feladat (sorszám ismeretlen).....	52
Megoldás.....	52
18. előadás.....	52
Holográfia.....	52
A zónalemez.....	52
Holográfia.....	52
Hologram.....	53
A poláros fény.....	53
Polarizáció visszaverődéskor és szóráskor.....	54
19. előadás.....	54
A szórt fény polarizációja.....	54
Kettős törés.....	54
A fáziseltoló lemezek.....	54
Az optikai aktivitás.....	55
Fotoelasztikus anyag.....	55
Optikai aktivitás alkalmazása.....	55
Relativitáselmélet.....	55
Galilei-transzformáció.....	55
Galilei relativitás elve.....	56
Speciális relativitáselmélet alapjai.....	56

9. gyakorlat.....	56
Első feladat (5.09).....	56
Megoldás.....	56
Második feladat (5.11).....	56
Ábra.....	56
Megoldás.....	57
Harmadik feladat (5.12).....	57
Megoldás.....	57
20. előadás.....	58
Relativitás-elmélet.....	58
Órák szinkronizálása.....	58
Lorentz-transzformáció.....	58
Az órák összeigazítása.....	58
A mozgás irányával párhuzamos hosszmerések összehasonlítása.....	59
A relativisztikus impulzus.....	59
A relativisztikus sebesség összeadás.....	60
21. előadás.....	60
A relativisztikus energia.....	60
Munkatétel.....	60
Nyugalmi energia.....	60
Példa.....	61
A teljes relativisztikus energia.....	61
A mozgó órák aszinkronitása.....	61
Ikerparadoxon.....	61
A relativisztikus elmélet és az elektromágnesesség.....	61
K vezetőhöz rögzített inerciarendszer.....	61
K' sodródó elektronokhoz rögzített inerciarendszer.....	61
Az általános relativitáselmélet.....	61
Súlyos és tehetetlen tömeg hányadosa.....	62
Probléma.....	62
Jelenségek.....	62
Fényelhajlás.....	62
A vöröseltolódás.....	62
Téridő görbület.....	62
Feketelyuk.....	62
10. gyakorlat.....	62
Segítség a feladatok megoldásához.....	62
Első feladat (413).....	63
Megoldás.....	63
Második feladat (414).....	63
Megoldás.....	63
Harmadik feladat (416).....	63
Megoldás.....	63
Negyedik feladat (417).....	63
Megoldás.....	64
22. előadás.....	64
23. előadás.....	64
11. gyakorlat.....	64
Első feladat (422).....	64
Megoldás.....	64

Második feladat (423).....	64
Megoldás.....	64
Harmadik feladat (437).....	65
Megoldás.....	65
Negyedik feladat (447).....	65
Megoldás.....	65
Ötödik feladat (454).....	65
Megoldás.....	65
Hatodik feladat (488).....	65
Megoldás.....	65
24. előadás.....	65
25. előadás.....	66
12. gyakorlat.....	66
Első feladat (sorszám ismeretlen).....	66
Megoldás.....	66
Második feladat (sorszám ismeretlen).....	66
Megoldás.....	66
Harmadik feladat (sorszám ismeretlen).....	66
Megoldás.....	67
Negyedik feladat (sorszám ismeretlen).....	67
Megoldás.....	67
Ötödik feladat (sorszám ismeretlen).....	67
Megoldás.....	67
Hatodik feladat (sorszám ismeretlen).....	67
Megoldás.....	67
Hetedik feladat (sorszám ismeretlen).....	67
Megoldás.....	67
Nyolcadik feladat (sorszám ismeretlen).....	68
Megoldás.....	68
Kilencedik feladat (sorszám ismeretlen).....	68
Megoldás.....	68
26. előadás.....	68
27. előadás.....	68
28. előadás.....	68

## **Bevezetés**

---

### ***Erről a jegyzetről***

Ezt a jegyzetet Kőrösi Tamás, Kántor Tibor és Kiss Dávid mérnök-informatikus hallgatók készítették Dr. Varga Gábor 2008-as tavaszi félévi előadásai alapján, önmaguk, valamint Metykó Cecília és Juhász Péter órai jegyzeteit felhasználva.

### ***A tantárgyról***

A tantárgy hivatalos adatlapjának elérhetősége:

<https://www.vik.bme.hu/kepzes/targyak/TE11AX04/>

### ***Ajánlott irodalom***

Az Alvin Hudson és Rex Nelson által írt Útban a modern fizikához című tankönyv tartalmazza a tárgy teljesítéséhez szükséges elméleti tananyagot, és számos példát, melyek segíthetik a zárhelyiken és vizsgákon kitűzött feladatok megoldását.

A felkészülés során hasznosnak bizonyulhat még Füzessy Zoltán fizika példatárának második kötete.

### ***Figyelmeztetés***

Bár a jegyzet többször is ellenőrizve lett, továbbra is tartalmazhat hibákat (és minden bizonnyal tartalmaz is számosat). Elolvasása nem helyettesíti az órákon való részvételt, vagy az ajánlott irodalom alapos áttanulmányozását, és nem kívánja helyettesíteni egyiket sem.

### ***Megjegyzés***

Ennek az összevont jegyzetnek az alapanyagainak jó részét már meg lehetett találni a **VIK-WIKI**n, azonban úgy éreztem, hogy a továbbbírásához szükséges egy fájlba integrálni a három ember által három különböző stílusban megalkotott anyagot.

Sajnos nem mondható el, hogy a jegyzet kész lenne, még számos előadás hiányzik.

Amennyiben valaki szeretne segítő kezet nyújtani befejezéséhez, forduljon a HaT-hoz (Hallgatói Tudásbázis), vagy személyesen valamelyik alkotóhoz.

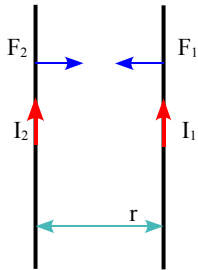
Kiss Dávid (Lordy)



## 1. előadás

### Áram mágneses tere

#### Végtelen hosszúságú vezetők



Az egy töltésre ható erő:  $\underline{F} = Q \cdot \underline{E}$

$$F_l = k \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} k &= 2 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \end{aligned} \right\} k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

Tekintsük az  $I_1$  áramú vezető  $l$  hosszúságú szakaszát. Ekkor az  $I_2$  áramú vezető mágneses terét  $B = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r}$  kifejezés jellemzi. Ezt a mennyiséget az áramvezető mágneses indukciójának nevezzük.

$$F_l = I_1 \cdot l \cdot B$$

$$Q = \frac{l}{v} I_1 \quad (v \text{ az elektron sodródási sebessége})$$

$$F_l = Q \frac{v}{l} \cdot l \cdot B = Q \cdot v \cdot B \rightarrow \underline{F} = Q(\underline{v} \times \underline{B}) \quad (\text{Lorentz-féle erőtvény})$$

Rövid vezetős szakaszra ható elemi erő:  $d\underline{F} = I d\underline{l} \times \underline{B}$

$$[B] = 1 \frac{Vs}{m^2} = 1T \quad (\text{tesla})$$

A két vezető akkor vonzza egymást, ha a bennük folyó áram iránya megegyezik, és akkor lép fel köztük taszítóerő, ha ellentétes.

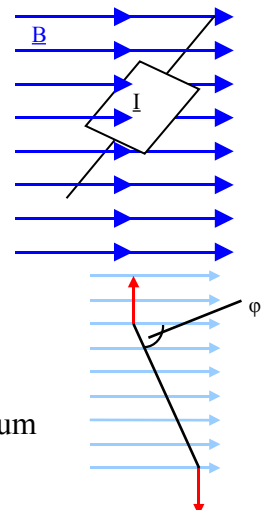
#### Árammal átjárt vezetőhurokra ható forgatónyomaték

A felületi normális segítségével szoktuk kiszámítani a  $\varphi$  szög értékét. Négyzetes keretnél  $M = I \cdot a \cdot B \cdot a \cdot \sin\varphi$  a forgatónyomaték értéke, ahol  $a$  az oldalhosszúságot, és  $a \cdot \sin\varphi$  az erőpár hatásvonalai közötti távolságot jelöli.

$\underline{M} = I(\underline{f} \times \underline{B})$ , ahol  $\underline{f}$  jelöli a felületi normálist (a hurok területét). Nem szükségszerű, hogy téglalap vagy négyzet alakú legyen a hurok!

#### Mágneses dipólnyomaték

$\underline{m} := \mu_0 \cdot I \cdot \underline{f}$ , ahol  $\underline{m}$  a mágneses dipólusnyomatékot és  $\mu_0$  a vákuum mágneses permeabilitását jelöli.



### Mágneses térerősség vákuumban

$$H := \frac{B}{\mu_0}, \text{ ahol } H \text{ a mágneses térerősséget jelöli.}$$

## 2. előadás

### Áramok mágneses tere

#### Vékony, árammal átjárt vezető

Az elektromosság és a mágnesség közötti kapcsolatot egy dán fizikus fedezte fel, előadás közben.

Mérések alapján felismerték, hogy a mágneses erők keletkezésének oka az elektromos töltések áramlása, majd rájöttek, hogy tetszés szerinti töltéseloszlástól adott pontban létrehozott elektromos térerősség kiszámításához először az elemi  $dq$  töltés által keltett  $dE$  elemi térerősséget kell meghatározni. Ezt a következő összefüggés adja meg:

$$d\vec{E} = \left( \frac{1}{4\pi \epsilon} \right) \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

Elsőként **Jean-Baptiste Biot** és **Félix Savart** adta meg, hogy egy  $dl$  hosszúságú,  $I$  áramerősségű vezetődarab mekkora  $d\vec{H}$  fluxussűrűségű mágneses erőteret hoz létre a

$$\text{vezetődarabtól } \vec{r} \text{ távolságra: } d\vec{H} = \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Emlékükre ezt a törvényt Biot-Savart törvénynek nevezzük.

#### Gerjesztési törvény

Tetszőleges, nem elhanyagolható keresztmetszetű áram terének meghatározására a gerjesztési törvény ad lehetőséget.

#### Végtelen hosszú egyenes vezető

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \stackrel{H \parallel d \rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{s} = H ds}{=} \oint H ds \stackrel{H = \text{állandó}}{=} H \oint ds = \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

#### Rektifikálható (kiegyenesíthető) görbe

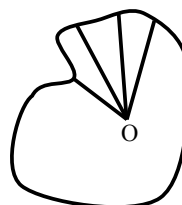
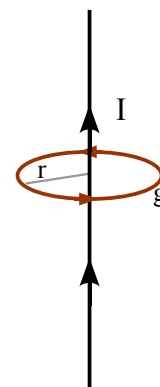
Kis körívvel közelítünk, egy középponthoz viszonyítva az egészet, a kis körívvel könnyű számolni, és az értékeket könnyű összegezni.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} \approx \sum_{[i]} \frac{I}{2r_i \pi} \cdot r_i \cdot \Delta \alpha_i = \sum_{[i]} \frac{I}{2\pi} \Delta \alpha_i \stackrel{\alpha_i \approx 2\pi}{=} \frac{I}{2\pi} \Delta \alpha_i \rightarrow 0$$

Ha a görbe nem veszi körbe az árammal átjárt vezetőt akkor

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0.$$

**Bizonyítás:**



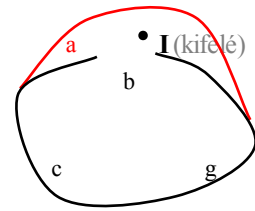
$\vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$

Kiegészítjük az ábrát az  $a$  szakasszal, majd felírjuk a következő egyenletet:

$$\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \oint_{g_1} \underline{H} d\underline{s} + \oint_{g_2} \underline{H} d\underline{s} = I - I_c$$

$$g_2 = (a, c) \curvearrowright$$

$$g_1(a, b) \curvearrowleft$$



### Szuperpozíció elve

$$\oint \underline{H} d\underline{s} = \sum I_k \curvearrowright$$

Ha a görbe egy adott irányához az áram jobbsodrású, akkor pozitív előjellel vesszük figyelembe. (+I)

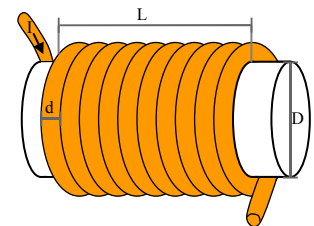
$$\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \int_A \underline{j} dA, \text{ ahol } \underline{j} \text{ az áramsűrűség vektorának jele.}$$

### Gerjesztési törvény definíciója

A mágneses térerősség tetszőleges görbére vonatkozó integrálja megegyezik a görbe által meghatározott felületen átmenő előjeles áramerősséggel.

### Szolenoid

A szolenoid egy hosszú, egyenes tekercs, például egy henger palástjára feltekercselt, szigetelt huzal. Nagy mágneses térerősség létrehozására alkalmas.



**Bizonyítás:** Gerjesztési törvény segítségével:

$$\oint \underline{H} d\underline{s} = \sum I_k$$

Belül feltesszük, hogy  $H = \text{áll}$ , valamint, hogy a szórt tér közelítőleg  $\approx 0$

$$\oint \underline{H} d\underline{s} = \oint \underline{H} d\underline{s} = \int \underline{H} |d\underline{s}| = H \cdot l = N \cdot I$$

N-szer döfi át az áram a  $g$  görbe által meghatározott téglalapot.

$$H \cong \frac{NI}{l}$$

### Toroid

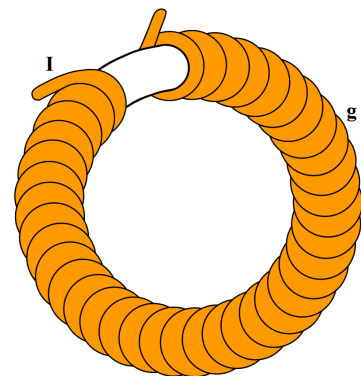
„szorosan úszógumira csévált tórusz”

$$\oint \underline{H} d\underline{s} \cong Hl = NI \quad l \text{ a középvonala hossza}$$

$$H = \frac{NI}{l} \text{ pontosabb érték}$$

Vektoranalízis **Stokes-tételéből:**

$$\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \int_A \text{rot } \underline{H} dA = \int_A \underbrace{j dA}_{\text{integrális alak}} \rightarrow \underbrace{\text{rot } \underline{H}}_{\text{differenciális alak}} = \underline{j}$$



Örvényes mennyiség, mert a rotációja 0-tól különböző.

## Mágneses tér anyagok jelenlétében

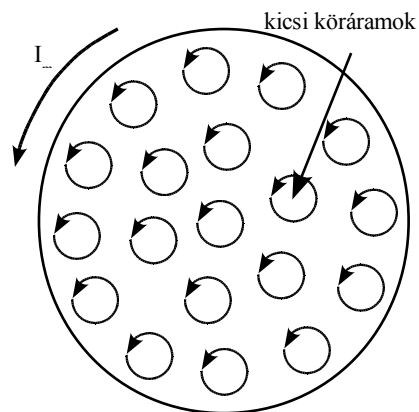
### Bevezetés

Mágneses anyaggal kitöltött szolenoidban a mágneses tér  $B$  indukciója megváltozik. A változás az atomok mágneses nyomatékának következménye, amely az atomi áramok, illetve az atomban lévő elektronok saját mágneses nyomatékainak eredőjeként jön létre.

A szolenoid keresztmetszete:

Belül 0 az áram, mert a szomszédok kiejtik egymást. A felületen kívül 0-tól különböző áram jelenik meg, az árammal átjárt tekercshez hasonlóan.

$I_m$  mágnesezettségi áram jelölése.



### Modell

A szolenoidban folyó vezetési áram és a mágnesezettséghez tartozó mágnesezettségi áram szuperponálódik, ekkor a szolenoidban

$$\underline{B} = \mu_0 \frac{nI + I_m}{l} \text{ mágneses indukció alakul ki.}$$

### Mágnesezettség

$AM = \mu_0 AI_m$ , ahol  $A$  jelöli a keresztmetszetet,  $l$  a hosszúságot,  $M$  pedig a mágnesezettséget. Látható, hogy egyfajta nyomatékról van szó, a mágneses dipólnyomatékról, „mintha egy nagy köráram lenne”

A mágnesezettség vektora az egységnyi térfogatra vonatkoztatott eredő mágneses dipólnyomaték.

$$M = \frac{\mu_0 I_m}{l} \text{ mágnesezettség vektorának abszolút értéke}$$

$$B = \mu_0 \frac{I_m}{l} + M$$

$$\frac{1}{\mu_0} (B - M) = \frac{nI}{l} = H \text{ Ez indokolja H jogosultságát}$$

Általános esetben  $\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{M}$  (anyagegyenlet), ahol  $\underline{B}$  jelzi a mágneses indukció vektorát,  $\underline{H}$  és  $\underline{M}$  pedig a térerősség és a mágnesezettség vektorait.

## 3. előadás

### Mágneses szuszceptibilitás

#### Mágneses szuszceptibilitás

Fejtsük ki bővebben az anyagegyenletet:

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{M} = \mu_0 \underline{H} + \mu_0 \chi_m \underline{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}, \text{ ahol:}$$

$\chi_m$  := *mágneses szuszceptibilitás*

$\mu_0$  := *vákuum mágneses permeabilitása*

$\mu_r$  := *relatív mágneses permeabilitás*

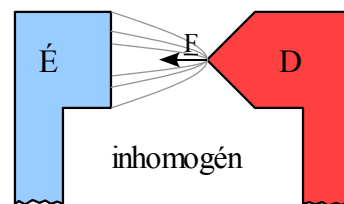
$$\underline{M} \approx \mu_0 \chi_m \underline{H}$$

$\mu_r$  függhet szinte bármitől, ami módosítja a részecskék egymáshoz képest elfoglalt helyzetét az anyagban, például a nyomástól, hőmérséklettől, vagy mágneses térerősségtől.

## Anyagok vizsgálata

### Anyagfajták

- **izotróp** anyag: nincs kitüntetett iránya, irányfüggetlen az adott fizikai tulajdonságra.
- **anizotróp** anyag: irányfüggő az adott fizikai tulajdonságra, mely bármi lehet, például a mágnesesség a mágnesnek (észak-déli pólus), vagy a fotonok egy atomi rácsnál (lásd a napszemüvegek bizonyos fajtáit).
- **homogén** anyag: minden egyes pontban ugyanúgy viselkednek részecskéi.
- **inhomogén** anyag: részecskéi az anyag szerkezetében elfoglalt helyzetük függvényében viselkednek.
- **diamágneses** anyag: a csúcsalakú pólus taszítja. Önmagukban nincsenek mágneses dipólusok benne, de ha változó térbe helyezzük, a változást akadályozó köráram indukálódik benne.  $\mu_r < 1$   
A mágneses momentumok 0-t adnak, de az indukció hatására olyan köráramok jelennek meg, melyek a csúcs alakú pólus taszítását eredményezik. Ilyen anyag például a bizmut és az antimon.
- **paramágneses** anyag: a csúcs alakú pólus vonzást gyakorol, de nem túl nagy erővel.  $\mu_r > 1$ . Ilyen például az alumínium és a platina.
- **ferromágneses** anyag: a csúcs alakú pólus erős vonzást fejt ki.  $\mu_r \gg 1$  (jóval nagyobb). Ilyen anyagok a kobalt, a vas és a nikkell. Ezeknél az anyagoknál fontos a finomszerkezet!



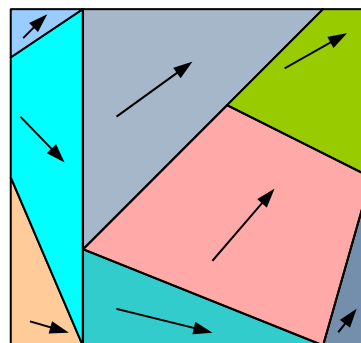
### Kis kitérő - EISZ

Amennyiben komolyabb, mágnesességhez kapcsolatos feladat merül fel, érdemes Kittel: Bevezetés a szilárdtest-fizikába című könyvéhez fordulni, vagy a Budapesti Műszaki egyetem hálózataról ingyenesen elérhető Science Direct angol nyelvű, fizikával foglalkozó folyóiratokhoz. Ezeket a <http://www.eisz.hu> címen lehet elérni BME-s IP-címről. Az EISZ az Egyetemi Információs Szövetség rövidítése.

### Domének

Ferromágneses anyagok esetében speciális kristályszerkezet, struktúra alakul ki. Ennek a különböző tartományait nevezzük doméneknek. (az ábrán a különböző színű részek jelzik a doméneket, és a nyilak a domének eredő mágneses dipólnyomatékát).

A domének miatt egyrészt makroszkópikus, szabad szemmel is látható hatások, valamint kvantummechanikai hatások is fellépnek. Ilyen az e-spin (avagy a perđület). Az energiaminimumra való törekvés lép fel spinként.

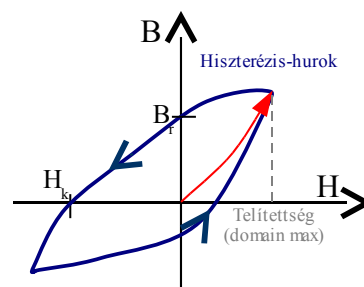


### A ferromágneses anyagok hiszterézis görbéje

A hiszterézis görbe az indukció megmutatására szolgál a térerősség függvényében.

$B_r$  := remanens indukció

$H_k$  := koercitív erő



### Curie hőmérséklet

Fontos tulajdonsága az anyagoknak. Amennyiben

$T < T_c$ , az anyag ferromágneses anyagként viselkedik,

míg ha a hőmérséklet a Curie hőmérséklet felett van, az anyag paramágneses tulajdonságokkal rendelkezik.

### Az anyag előélete

Egy anyagdarab „mágneses előéletét” hőkezeléssel, vagy megfelelő frekvenciájú rázással tudjuk törölni. Ekkor voltaképpen „formázzuk” a doméneket.

### Hiszterézis görbedarabok

Ha a telítettség elérése után nem növeljük a térerősséget, csak görbedarabokat kapunk. A teljes hurok speciális eset. A koercitív erő mondja meg, hogy milyen mágneses térerősség esetén lesz az indukció nagysága nulla.

### Átmenet a különböző anyagok határfelületén

$\oint \underline{B} d \underline{A} = 0$ , és  $\text{div } \underline{B} = 0$ , tehát a tér forrásmentes, nincs töltés, és ezért a határfelületre merőleges komponens folyamatosan megy át.

Dirac feltételezte, hogy van töltés, azonban tévedett.

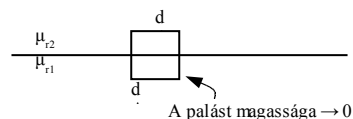
$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \begin{array}{c} \mu_{r_2} B_{2n} \uparrow \\ \mu_{r_1} B_{1n} \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow B_2 \\ \uparrow B_1 \end{array}$$

**Bizonyítás:**

$$\oint \underline{B} d\underline{A} = B_{1n} dA + B_{2n} dA = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

$$\text{Ha } \int_g \underline{H} d\underline{s} = 0 = H_{1t} l - H_{2t} l \Rightarrow H_{1t} = H_{2t}$$

$$[H] = 1 \frac{A}{m} \quad [B] = 1 \frac{Vs}{m^2} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$



### A villamos áram törvényei

Az áramforrások kémiai energia (például galvánelemek), mechanikai energia (dinamó, generátor), esetleg termoelem, napenergia felhasználásával gondoskodnak az adott feszültségen a szükséges töltésmennyiség szétválasztásáról.

**Áramerősség:** a vezető adott keresztmetszetén egységnyi idő alatt átáramló töltés mennyiségének mértéke.

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}; \quad [I] = 1A$$

1 amper áram folyik abban az igen hosszú vezetőben, amelynek 1 méteres darabjára a tőle 1 méter távolságban vele párhuzamosan futó másik vezető  $2 \cdot 10^{-7} N$  nagyságú erőt fejt ki, amennyiben abban is ugyanaz az áram folyik.

Az áram iránya a pozitív töltések áramlásának az iránya.

Az áramsűrűség vektor nagysága az áramlás irányára merőleges infinidezimális  $dA$  fe-

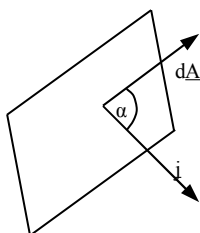
lületen áthaladó  $dI$  áramerősséggel a  $j = \frac{dI}{dA}$  alakban adható meg.

Az áramsűrűség mértékegysége:  $[j] = \frac{A}{m^2}$

$$dI = j \cdot dA$$

$$dI = j \cdot dA \cdot \cos(\alpha)$$

$$I = \int_A j \cdot dA = \int_A j_n \cdot dA$$



## 1. gyakorlat

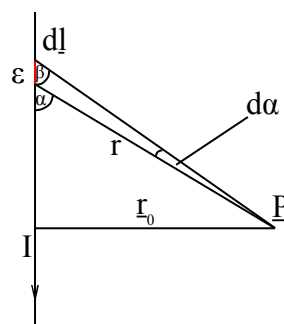
### Első feladat (sorszám ismeretlen)

Egy végtelen hosszú, egyenes vezetőben  $I$  áram folyik. Határozza meg ebben a P pontban a mágneses térerősség értékét és irányát!

### Megoldás

A megoldás menete:

1. Felírjuk a Biot-Savart törvényt
2. Az egész hosszön integrálunk minden véges hosszú vezetődarabra (így igazítjuk a feladathoz a törvényt)



3. Az eddigieket kifejtjük formálisan
4.  $\alpha$ -ra behelyettesítjük  $dl$ -et
5. Behelyettesítünk
6. Integrálunk a megfelelő tartományban (itt a felső félkör a tartomány, majd ezt kétszer vesszük)
7. A feladatot megoldottuk

Tehát:

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{Biot-Savart törvény}$$

$$P \text{ pontban: } \vec{H}_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{teljes hossz}} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\alpha \rightarrow \beta, \quad d\alpha \rightarrow 0$$

$$H_p = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I dl r \sin \alpha}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

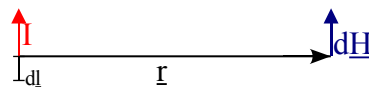
2 változó:  $l$  és  $\alpha$

$$dl \cong \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} \quad \text{az ábra alapján}$$

Keressünk összefüggést  $r$  és  $r_0$  között:

$$\left. \begin{array}{l} r = r_0 \sin \alpha \\ dl \cong r_0 \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow H_p = \frac{1}{4\pi} \int \frac{I r d\alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha r_0^2} \sin \alpha = \frac{I}{4\pi r_0} \int \sin \alpha d\alpha$$

Ekkor  $H_p = \frac{I}{4\pi r_0} [-\cos \alpha]_0^\pi \cdot 2 = 2 \frac{I}{4\pi r_0}$ , és az iránya a táblából (lapból, síkból) kifele mutat.



## Második feladat (sorszám ismeretlen)

Oldja meg az első feladatot ismét, ezúttal a gerjesztési törvényt felhasználva!

### Feladat megoldása

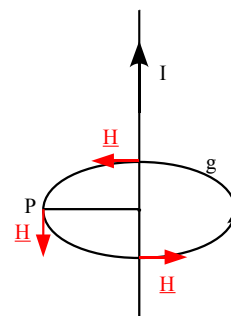
$P$  távolsága elegendően kicsiny a tv. alkalmazásához

$$\text{A gerjesztési törvény: } \oint_g \vec{H} d\vec{s} = \sum_{\{k\}} I_k$$

Első lépésként felvesszük  $g$  görbét.  $H$  érintőirányú, és  $P$  nem kitüntetett pont. Szimmetriai okok miatt  $g$  görbe mentén a mágneses térerősség értéke állandó:  $\vec{H} \parallel d\vec{s}$ ,  $\int \vec{H} d\vec{s}$ .

Mivel  $|\vec{H}| = \text{áll.}$  és  $\vec{H} \parallel d\vec{s}$ , levezethetjük  $H$  abszolút értékének képletét:

$$\int_g \vec{H} d\vec{s} = \int_g H ds = H \int_g ds = H r 2\pi = I \Rightarrow H = \frac{I}{2r\pi}$$



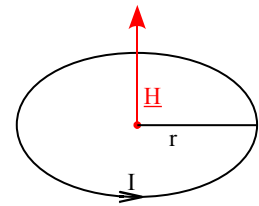


### Harmadik feladat (sorszám ismeretlen)

Egy  $A=10 \text{ mm}^2$  keresztmetszetű vastag körvezetőn  $I=20 \text{ A}$  erősségű áram folyik keresztül. Mekkora az elektromos poten-

ciál, ha a mágneses térerősség abszolút értéke  $|\underline{H}| = 178 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ , és a

vezető fajlagos ellenállása  $\rho = 0.017 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$ ?



### Megoldás

Az ohmikus ellenállást a következő képlettel számíthatjuk ki:  $R_{ohm} = \rho \frac{l}{A}$  (nem tanultuk, azonban szerepel a középiskolás fizika tananyagban).  $l$  értéke azonban ismeretlen,

ki kell számítanunk:  $H = \frac{I}{2r}$

$$d\underline{H} = \frac{I d\underline{l} \times \underline{r}}{r^3} \cdot \frac{1}{4\pi}$$

Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy

$$d\underline{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \cdot d\underline{l} \cdot r}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{1}{r^2} d\underline{l}$$

$$H_0 = \int \frac{I}{4\pi} \frac{1}{r^2} d\underline{l} = \frac{I}{2r}$$

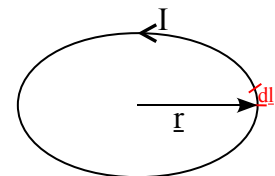
$$r = \frac{I}{2\pi}$$

Szintén a középiskolás tananyagból emlékezhetünk Ohm törvényére:  $R_{ohm} = \frac{U}{I}$ . Ezt a

képletet átrendezve  $U = R_{ohm} I$ -t kapunk, melyet tovább alakíthatunk:

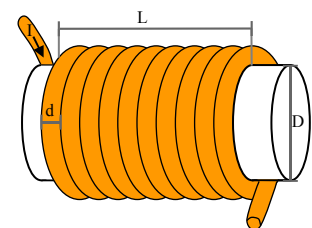
$$U = R_{ohm} I = \rho \frac{\left(2 \frac{I}{2\pi} \pi\right) l}{A} = \frac{I^2 \pi \rho l}{A H}$$

tékű változó, így kiszámíthatjuk, hogy a feszültség értéke  $U \cong 0,012 \text{ A}\Omega = 0,012 \text{ V}$ .



### Negyedik feladat (sorszám ismeretlen)

Egy szolenoid tekercselése  $d = 0.8 \text{ mm}$  vastagságú rézhuzalból készült. Mekkora a térerősség a tekercs belsejében, ha  $I = 1 \text{ A}$  erősségű áram folyik a vezetőkben? A menetek szorosan illeszkednek egymáshoz.



### Megoldás

A feladat megoldása annak a ténynek a felfedezésében rejlik, hogy a szolenoid hossza, melyet nem ismerünk, kiszámítható, hiszen  $L = N \cdot d$  ! A menetszám szintén ismeretlen mennyiség, de ha felírjuk a térerősség képletét, és l-t behelyettesítjük, akkor kiesik:

$$H = \frac{NI}{L} = \frac{NI}{Nd} = \frac{I}{d}$$

Így már minden szükséges mennyiség a rendelkezésünkre áll,  $H = 1250 \frac{A}{m}$ .

### Ötödik feladat (sorszám ismeretlen)

Egy  $L = 20cm$  hosszú,  $D = 5cm$  átmérőjű szolenoidban a térerősség  $H = 1000 \frac{A}{m}$ .

- Mekkora az  $NI$  szorzat értéke?
- Mekkora a feszültség (U), ha a huzal átmérője  $d = 0.5mm$ , és rézből készült ( $\rho = 0.017 \frac{\Omega mm^2}{m}$ ) ?

Ügyeljen a helyes mértékegységek használatára!

### Megoldás

- Azt tudjuk, hogy szolenoidnál  $H = \frac{NI}{L} \rightarrow NI = HL$ . Így  $NI = 200Am$  értéket állapíthatunk meg.
- Ohm törvényét a feszültségre rendezve  $U = RI = \rho \frac{l}{a} I$ , ahol l és a a vezeték hosszát, illetve keresztmetszetének területét jelölik.

(Ebben a feladatban a szabályosság kedvéért átírtam a jelöléseket, a nagybetűk jelölik a szolenoidra, és a kisbetűk a vezetékre vonatkozó mennyiségeket, ez órán nem volt így egységesítve, ami szerintem nehezíti a megértést - Kiss Dávid).

Szükségünk van a vezeték keresztmetszetének területére:  $a = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$ .

NI szorzat értékét az a) részben számítottuk ki,  $N = \frac{L}{d}$ , tehát  $I = \frac{HL}{N}$ . A kapott

képleteket felhasználva írjuk fel az ellenállás képletét:  $R = \frac{\rho D \pi M}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi}$ . Most már

minden szükséges értéket ismerünk a feszültség kiszámításához, melyet az

$$U = IR = \frac{HL}{N} \frac{\rho DN}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{HL\rho D}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

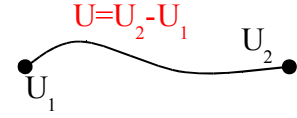
## 4. előadás

### Az Ohm törvény integrális alakja

#### Ellenállás, Ohm törvénye

Integrális alak  $R = \frac{U}{I}$

- fémek: szabad elektronok
- folyadékok: pozitív/negatív töltésű ionok
- gázok: molekulák, pozitív/negatív töltésű ionok



#### Ohmikus ellenállás:

$[R] = \frac{1V}{1A} = 1\Omega$ , azaz az ellenállás akkor egy ohm, ha 1 volt feszültség hatására 1 amper erősségű áram folyik.

#### Egyenletes keresztmetszetű vékony vezető huzal ellenállása

Mérések alapján  $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$  egy egyenletes keresztmetszetű vékony vezető huzal esetén, ahol  $R$  jelöli a huzal ellenállását,  $\rho$  a fajlagos ellenállást,  $l$  a vezető hosszát, és  $A$  a vezető keresztmetszetét.

#### Fajlagos vezetőképesség

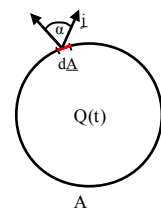
$\sigma = \frac{1}{\rho}$  [ $\rho$ ] =  $1\Omega m$ ,  $U = R \cdot I = \rho \frac{l}{A} I$ ;  $I = A \cdot j$  és  $U = lE$ , ahol  $I$  jelöli az áramerősséget,  $A$  a keresztmetszetet,  $l$  a vezető hosszát, és  $E$  az elektromos térerősséget.

$$lE = \rho \frac{l}{A} j \cdot A \rightarrow E = \rho j \rightarrow \underline{E} = \rho \underline{j} \Rightarrow j = \sigma E$$

### Az Ohm törvény differenciális alakja

#### Folytonossági egyenlet (töltésmegmaradás)

$\oint_A \underline{j} d\vec{A}$  kifejezés azzal egyenlő, hogy egységnyi idő alatt mennyi töltés áramlik ki a zárt terület által határolt részből.  $\underline{j} d\vec{A} = j \cdot A \cdot \cos \alpha$ , ha skaláris mennyiségekkel akarunk számolni.



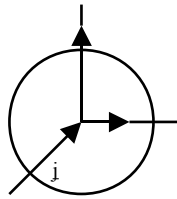
$$\oint \underline{j} d\vec{A} = - \frac{\partial Q(t)}{\partial t} \rightarrow \oint j dA + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\oint_A \underline{j} d\vec{A} = \int \text{div } \underline{j} dV = - \frac{\partial Q}{\partial t} = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \rightarrow \text{div } \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \text{ ahol}$$

$\rho$  jelöli a töltést,  $\int \text{div } \underline{j} dV$  a differenciált,  $-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$  az integrális,  $\text{div } \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$  pedig a differenciális alakot.

A rendezésben segítségünkre volt a vektoranalízis, valamint a Gauss-Osztopradszkij tétel.

### Egyenáram esetén



Egyenáramnál  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{div } \underline{j} = 0$ , azaz a forrás = 0.

### Az áramsűrűség vektor viselkedése különböző anyagok határfelületén

$$\oint \underline{j} \cdot d\underline{A} = 0$$

Mivel a palást (felület) mérete a nullához tart, ezért a járuléka is a nullához tart (folyamatosan megy át), tehát:

$$\oint \underline{j} \cdot d\underline{A} \cong \int_{\text{alaplappal}} \underline{j} \cdot d\underline{A} = j_{1n} dA - j_{2n} dA = 0 \rightarrow j_{1n} = j_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \text{ (L s kritérium)}$$

$$j_{1t} = \rho_1 E_{1t}; j_{2t} = \rho_2 E_{2t}$$

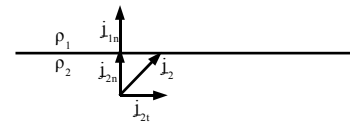
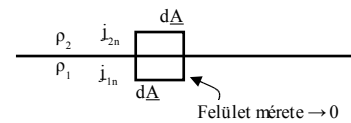
↓

$$j_{1t} = \frac{\rho_1}{\rho_2} j_{2t}$$

Ebből következik, hogy ha  $\rho_2 \gg \rho_1$ , akkor  $j_{1t} \rightarrow 0$ .

Az áram (2)-ből (1)-be merőlegesen lép

$$j_{1t} \neq 0; j_{2t} \neq 0$$



### Fontos törvények

#### Joule törvény

A villamos tér  $W = Q \cdot U$  munkát végez

$$P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI$$

Ezt a teljesítményt az áramforrás szolgáltatja, a vezető pedig általában a környezetének adja át hőközlés útján.

$$W = Pt = UIt = I^2 Rt \text{ Joule-hő}$$

$$P = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R} \text{ A teljesítmény integrális alakja}$$

$w = \frac{P}{V} = \frac{UI}{lA} = Ej = \rho E^2; [w] = \frac{W}{m^3}$  a differenciális alak, ez megadja a vezető minden pontjában disszipálódó teljesítménysűrűséget.

### ***Kirchhoff törvényei***

- **Huroktörvény:** bármelyik zárt hurokban a feszültségek algebrai összege nulla (kisfrekvenciájú áramkörök esetén).
- **Csomóponti törvény:** a bármely pontba befolyó összáramerősség egyenlő az onnan eltávozó áramok összegével.

### ***Az indukált villamos tér törvényei***

#### ***Indukció***

Faraday 1831-ben tette felfedezését, miszerint a mágnesség időbeli változása indukált áramot hoz létre. Ez a jelenség az indukció jelensége.

#### ***A galvanométer***

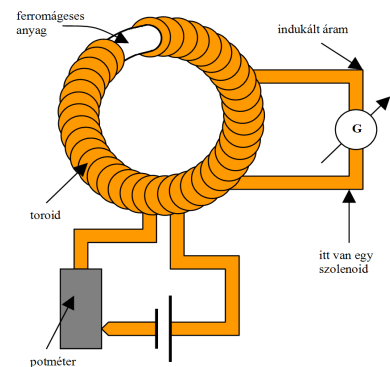
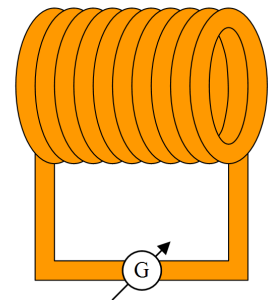
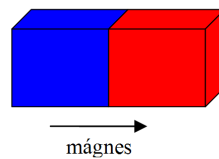
A galvanométer akkor jelez, ha a mágnes tekercshez viszonyított relatív sebessége nem egyenlő nullával. Ekkor a benne lévő vezetőkeretben  $I$  áram indukálódik.

Ha a potenciométeren állítunk, akkor változik a feszültség, így megváltozik az áram. Emiatt megváltozik a mágneses érerősség is, tehát áram indukálódik.

De vajon a térerősség, vagy a mágneses indukció fluxusa számít ebben az esetben? Ha ferromágneses anyagot rakunk a toroidba, akkor az indukált áram drasztikusan megváltozik:

$$B = \mu_0 H + M. \quad B \text{ megváltozik, de } H \text{ nem } \left( H = \frac{NI}{l} \right),$$

időbeli lefutása lényegében változatlan marad a vasmag nélküli esethez képest, ezért  $B$  fluxusa számít.

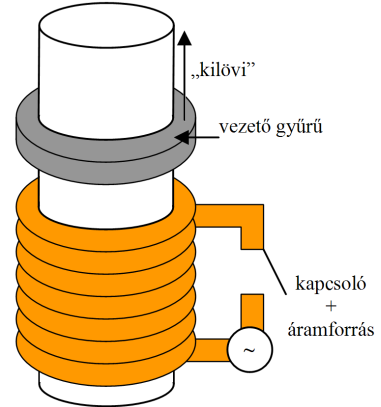


## 5. előadás

### Érdekességek

#### Thompson ágyú

A vezető anyagból készült gyűrű az áramkör zárása után lerepül a vasmagról, mert a gyűrűben indukált áram jelenik meg, hogy akadályozza a  $\Phi$  változását. Ha a gyűrű nem zárt (meg van szakítva) akkor nem történik semmi.

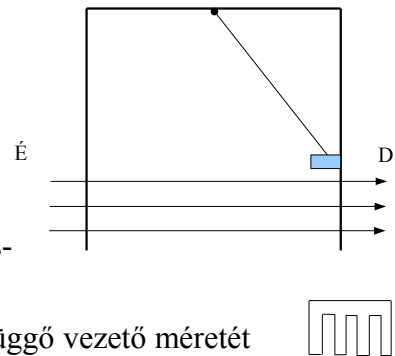


#### A megálló inga

Az inga indulása után rövidesen megáll, mert ahogy belép a mágneses térbe az ingában Lenz törvénye szerint köráramok indukálódnak. (ezek az örvényáramok), és ezek fékezik az inga mozgását.

**Ellenpélda:** ha az inga „fémfésű” akkor a csillapodás mértéke sokkal kisebb lesz, mert az örvényáramok kevésbé jelennek meg( a méretük és nagyságuk csökken)

Az örvényáramokat úgy lehet csökkenteni, ha az egybefüggő vezető méretét (térfogatát, felületét) csökkentjük.



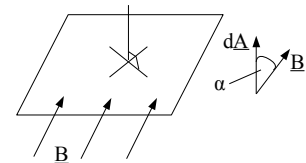
### Törvények

#### Lenz törvénye

Általában az indukált áram mindig olyan irányú, hogy az indukciót létesítő változás mágneses indukció fluxus változását akadályozza.

elemi fluxus:  $d\Phi = \underline{B} \cdot d\underline{A} = A \cdot \cos \alpha$

integrálos alak:  $\Phi = \int_A \underline{B} \cdot d\underline{a}$



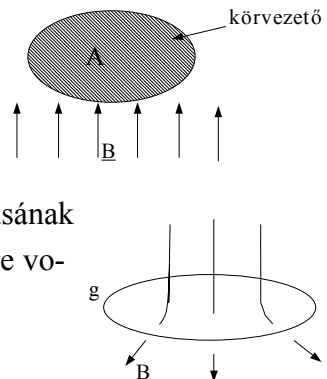
#### Faraday-féle indukciós törvény

$$[V] = U_e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad ; \quad \Phi = \int_A \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

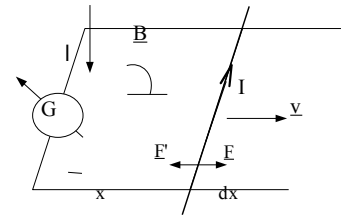
$$U_e = \oint_g \underline{E} \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int \underline{B} \cdot d\underline{A}$$

A mágneses indukcióvektor zárt vezetőre vonatkoztatott fluxusának idő szerinti deriváltjának ellentettje megegyezik a zárt vezetőre vonatkozó indukált elektromotoros erővel.

**Nyugalmi indukció:**  $B$  változik,  $g$  változatlan (nem mozog)



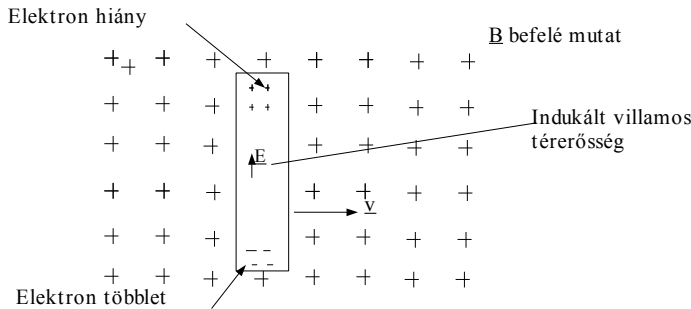
**Mozgási indukció:** a keretet bezáró 4. élet mozgatjuk, azzal indukálunk áramot.



$$\Phi = B \cdot l \cdot x$$

Faraday:  $|U_e| = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$

Lorentz:  $F dx = \underbrace{I \cdot l \cdot B dx}_{U_e = B \cdot l \cdot v} = U_e I dt$



Lorentz erő:  $\underline{F}_L = Q \cdot (\underline{v} \times \underline{B})$

indukált térerősség:  $\underline{E} = \frac{\underline{F}'_L}{Q} = \underline{v} \times \underline{B}$

Ha zárnánk az áramkört *b*-től *a* felé folya az áram. Úgy viselkedik, mint egy áramforrás, melynek pozitív pólusa „*b*”-nél van.

Egy vezetődarabra:  $d U_e = (\underline{v} \times \underline{B}) d \underline{s}$

## 2. gyakorlat

### Első feladat (241)

- Számítsuk ki a *H* térerősséget és a *B* mágneses indukciót egy  $r = 7 \text{ cm}$  sugarú toroid belsejében! A toroid menetszáma  $N = 500$ , az áramerősség  $I = 7 \text{ A}$  ( $\mu_r = 500$ )
- Hogyan módosulnak az a) részben kiszámított értékek 0,5 cm légrés esetén?

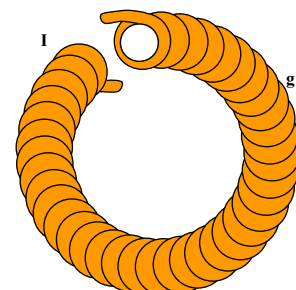
### Megoldás

- Tudjuk, hogy  $H = \frac{NI}{l}$ . *N* és *I* értékeket ismerjük, de ki kell számítanunk a hosszúságot:  $l = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 \text{ cm}$ . Így már a térerősséget is ki tudjuk számítani,

$$H = 265.39 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

A mágneses indukció kiszámításához is minden szükséges érték a rendelkezésünkre áll:  $B = \mu_r \cdot \mu_0 H = \dots$ . Ezzel a feladat első felét megoldottuk.

- A légrés azt jelenti, hogy a toroid belsejét nem teljesen tölti ki a mag. Ekkor a térerősség nem lesz állandónak tekinthető a toroid belsejében, és ezt kell kiszámítanunk a következő módon:



$$B = \mu_r \mu_0 H, \text{ H speciális eset, } B = \mu_0 (H + H_{\text{ind}})$$

$$\oint \underline{H} d\underline{s} = NI$$

A határfelületen  $B_{\perp n} = B_{\perp n}; H_{\parallel t} = H_{\parallel t}$  (B-nek csak a határfelületre merőleges komponense van, ezért B állandó)

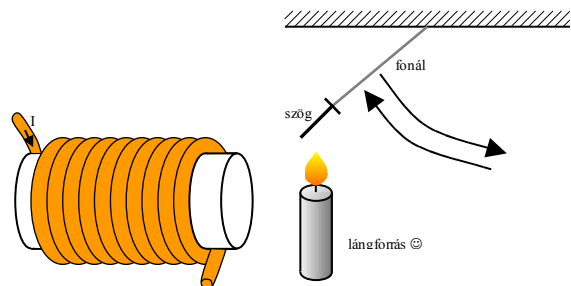
$$\oint \underline{H} d\underline{s} = H_{\text{vasmag}}(l - \delta) + H_{\text{levegő}}(\delta) = NI$$

### Második feladat (247)

Egy magas hőmérsékletet is tűrő, vékony fonálra felfüggesztünk egy vasszeget, majd az ábrán látható módon elhelyezzük egy elektromágnessel és egy Bunsen-égővel együtt. A mágnes bekapcsolásakor a szeg a láng felé mozdul, kitér hirtelen függőleges irányba, majd vissza. Értelmezze a jelenséget!

#### A feladat megoldása

A ferromágneses anyagok bizonyos hőmérsékleten elvesztik mágneses tulajdonságaikat, és paramágneses anyagként viselkednek. Ez a hőmérséklet a Curie hőmérséklet. A vasszeget egészen addig vonzza az elektromágnes, amíg a láng fölött el nem éri a Curie hőmérsékletet. Ekkor elveszti mágneses tulajdonságait, a vonzóerő megszűnik, és a gravitációs erőnek engedelmessé elindul visszafelé útján, kikerülve a láng fölé. A hőmérséklete rohamosan csökkenni kezd, hőmérséklete a Curie-hőmérséklet alá csökken ismét, és a folyamat újratekődik.



### Harmadik feladat (263)

#### Feladat szövege

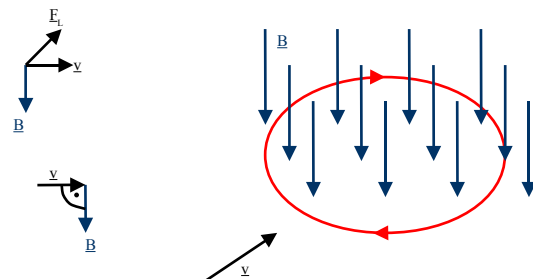
Mutassuk ki, hogy homogén mágneses térben az erővonalakra merőleges  $v$  sebességgel belőtt, elektromosan töltött részecske a mágneses térben körpályán halad, változatlan  $v$  sebességgel! Határozzuk meg a részecske által leírt kör területét és keringési idejét!

#### Megoldás

Első lépésként tegyük fel, hogy a részecske pozitív töltésű. Ekkor

$$\underline{F}_L = Q\underline{v} \times \underline{B}, \quad (Q > \cdot)$$

A sebesség merőleges a térerősségre, ezért  $\underline{F}_L$  a füzetre merőleges síkban lesz, és a részecskének nincs függőleges irányú gyorsulása. A részecske függőleges irányú sebessége változatlan ( $= \cdot$ ). A részecske tehát síkban fog mozogni.





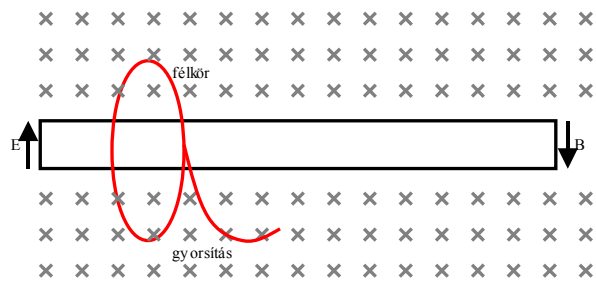
Nem relativisztikus esetben ( $m = \text{áll}$ )  $\rightarrow r = \text{áll} \rightarrow \text{körpálya}$ , egyrészt Newton II. törvénye alapján, másrészt mert  $F_L = Qv\underline{B} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{QB}$ . Ezzel a feladatot megoldottuk.

### Ciklotron

A ciklotron egy olyan eszköz, melyet elektromosan töltött részecskék gyorsítására használunk.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{QB} \text{ (periódusidő)}$$

$$K = 2\pi r = \frac{2\pi m v}{QB} \text{ (körpálya)}$$



### Negyedik feladat (260)

Galvanométer tekercsének menetszáma  $N = 400$ ,  $A = 3\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 6\text{cm}^2$ . A tekercs egy fonálon függ,  $B = 0.1 \frac{Vs}{m^2}$  térben, benne  $I = 10^{-7} A$  erősségű áram folyik. Mennyi a tekercsre ható erő forgatónyomatéka, ha

- a tekercs síkja párhuzamos a mágneses erőter irányával?
- a tekercs  $60^\circ$ -os szöget zár be a mágneses erőter irányával?

### Megoldás

a)  $\underline{M} = \underline{m} \times \underline{H}$ ,  $\underline{m} = \mu_0 I \underline{f}$  ( $f$  a kis hurok felületi normálisa, és ebben az esetben maximális)

$$M = \mu_0 I f \frac{B}{\mu_0} = IfB. \text{ Ezért } M_{\text{összes}} = NIfB, \text{ és a feladatot megoldottuk.}$$

b)  $M_{\text{összes}} = NIfB \sin 30^\circ$ , az a) részből következően.

### Ötödik feladat (296)

Egy  $r = 2\text{cm}$  sugarú, kör alakú vezetőt a síkjára merőleges,  $B = 0.2 \frac{Vs}{m^2}$  mágneses indukciójú erőterbe helyezzük. A körvezető ellenállása  $R_{\text{kör}} = 1\Omega$ . Mekkora töltésmennyiség áll elő, ha  $\Delta\alpha = 90^\circ$ -kal elfordítjuk?

**Megoldás**

$$U_e = \frac{d\phi}{dt}; \quad \phi = \int B dA; \quad R = \frac{U_e}{I}; \quad I = \frac{dQ}{dt}.$$

$$Q = \int I dt = \int_{(1)}^{(2)} \frac{U_e}{R} dt = - \int_{(1)}^{(2)} \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{R} dt = - \frac{1}{R} [\phi]_{(1)}^{(2)} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{Br^2\pi}{R}, \text{ hiszen}$$

$$\phi_1 = Br^2\pi$$

$$\phi_2 = 0$$

**6. előadás**

**Mágneses indukció**

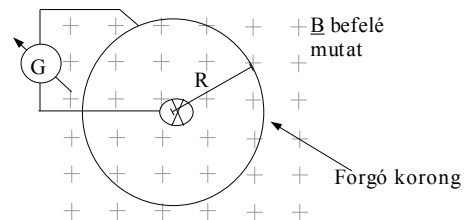
**Vezetőkeret**

A) Ha az egész keret mozog, nincs indukált áram.

$$\frac{dQ}{dt} = 0; \text{ másrészt mozgási indukcióval: } \sum U_L = 0$$

B) **Unipoláris dinamó:**

$$U_l = \int_0^R E dr = \int_0^R v \cdot B = \int_0^R r \cdot \omega \cdot B dr = \frac{R^2 \cdot \omega \cdot B}{2}$$



**„Nyugvó” indukció:**

$$U_l = \oint_g \underline{E} ds = \frac{-dQ}{dt} = \frac{-d}{dt} \int \underline{B} dA$$

integrálos alak:  $\oint_g \underline{E} ds = \frac{-d}{dt} \int_{(A)} \underline{B} dA$  Ez a **II. Maxwell egyenlet**

Ha „g” állandó, akkor bevihetjük az idő szerinti deriváltat az integrál mögé.

$$\oint_g \underline{E} ds = \frac{-\int dB}{dt} dA$$

**Stokes tétele:**

$$\int_{(A)} \text{rot } \underline{E} dA = \frac{-\int dB}{dE} dA$$

differenciális alak:  $\text{rot } \underline{E} = \frac{-dB}{dt}$  Ez a **II. Maxwell egyenlet**

v sebességgel mozgó zárt vezető esetén:  $U_l = \int_{|g|} \underline{E} ds = \int_A \frac{\partial B}{\partial t} dA + \oint_{(g)} v + B ds$

### Kölcsönös indukció és önindukció



$$\Phi_1 = M_{1,2} \cdot I_2 \quad \Phi_2 = M_{2,1} \cdot I_1$$

Meg lehet mutatni, hogy  $M_{1,2} = M_{2,1}$  (ez a kölcsönös indukciós együttható)

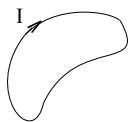
$$[M] = 1 \frac{V \cdot s}{A} = 1 H \text{ (Henry)}$$

Faraday-féle indukciós törvény alapján:

$$U_2 = \frac{-d\Phi_2}{dt} = \frac{-M_{2,1} \cdot dI_1}{dt}$$

$$U_1 = \frac{-d\Phi_1}{dt} = -M_{1,2} \frac{dI_2}{dt}$$

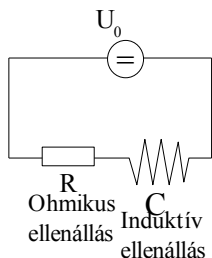
### Induktív ellenállás:



$\Phi = L \cdot I$  ahol L az önindukciós együttható

## A mágneses tér energiája

### R-C áramkörök



$$U_0 - L \frac{dI}{dt} = R \cdot I$$

$$U_0 = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I$$

$$\text{Legyen } R \approx 0 \Rightarrow U_0 = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_0 \cdot I \, dt = L \frac{dI}{dt} I \, dt$$

$$W_L = \int_0^I L \cdot I \, dI = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \quad \text{Induktív ellenállásban eltárolható energia}$$

$$\text{(kondenzátornál: } W_{\text{kondi}} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \text{)}$$

### Szolenoid

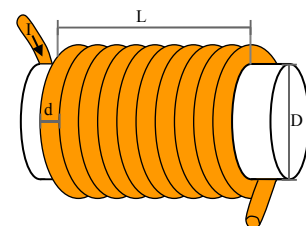
$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

$$\Phi = N \cdot B \cdot A = N \cdot \mu \cdot H \cdot A = N \frac{\mu \cdot N \cdot I}{l} A$$

$$\Phi = \mu \frac{N^2 \cdot I}{l} A$$

$$\Phi = L \cdot I = \mu \frac{N^2 \cdot I}{l} A$$

$$\rightarrow L = \mu \frac{N^2}{l} A$$



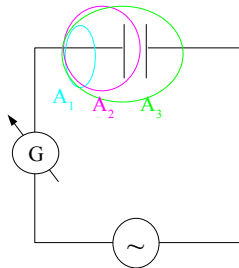
Ahol  $N$  jelöli a tekercs menetszámát,  $A$  a keresztmetszetet, és  $I$  az áramerősséget.

$$\text{energia: } W_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2}{l} A \cdot I^2 = \frac{1}{2} \underbrace{A \cdot l}_{\text{térfogat}} \cdot \mu \left( \frac{N \cdot I}{l} \right)^2$$

$$\text{egységnyi térfogatra: } W_m = \frac{W \cdot L}{A \cdot l} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} H \cdot B$$

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} H \cdot B \\ \text{általában: } W_L &= \frac{1}{2} E \cdot D \end{aligned}$$

### Probléma



gerjesztési törvény integrálos alakja:  $\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \sum k$

$$\oint \underline{H} d\underline{s} = I \quad (\text{A1 és A3 esetén})$$

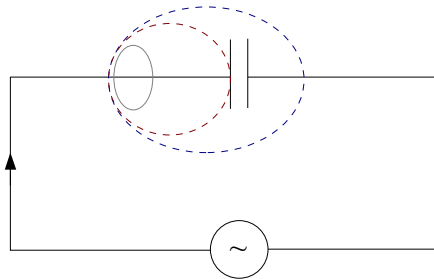
$$\oint \underline{H} d\underline{s} = 0 \quad (\text{A2 esetén})$$

$\text{rot } \underline{H} = \underline{j}$  differenciális alak  $\rightarrow \text{div } \underline{j} = 0$  ez ellentmond a töltésmegmaradásnak.

## 7. előadás

### A Maxwell egyenletek

#### Vezetési áram



$$\int_g \underline{H} d\underline{s} = I = \int_A \underline{j} d\underline{A}$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_{A_1, A_3} \underline{j} d\underline{A} &= I \\ \oint_{A_2} \underline{j} d\underline{A} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

vezetési áram

#### Eltolási áram:

$$I_v = \frac{dQ}{dt}; \quad I_e = A \frac{dD}{dt} \quad D = \frac{Q}{A} \rightarrow I_e = \frac{dQ}{dt} \rightarrow I_v = I_e$$

#### A Maxwell-egyenletek teljes rendszere (táblázatba foglalva)

I.	$\text{rot } \underline{H} = \underline{j}_v + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$	$\oint_g \underline{H} d\underline{s} = \int_A (\underline{j}_v + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}) d\underline{A}$
II.	$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$	$\oint_g \underline{E} d\underline{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \underline{B} d\underline{A}$
III.	$\text{div } \underline{B} = 0$	$\oint_A \underline{B} d\underline{A} = 0$
IV.	$\text{div } \underline{D} = \rho$	$\oint_A \underline{D} d\underline{A} = \int_V \rho dV$

V.	$\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$	$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$ ( $\underline{P}$ a polarizáció vektora)
VI.	$\underline{B} = \mu \underline{H}$	$\underline{B} = \mu_0 \underline{H} + \underline{M}$
VII.	$\underline{j}_v = \delta \underline{E}_i + \underline{E}$	( $\delta$ : vezetőképesség, $E_i$ : idegen térerősség)
VIII.	$\omega = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{D} + \frac{1}{2} \underline{H} \underline{B}$	(térenergia sűrűség)

Az első négy egyenletet nevezzük **definíciós egyenleteknek**, az ötödik, hatodik és hetedik egyenlet gyűjtőneve pedig: **anyagegyenletek**.

### **Elektromágneses hullám egyenlete vákuumban**

Ebben a helyzetben a Maxwell-egyenleteknek speciális eseteit használjuk:

$$1. \quad \text{rot } \underline{H} = \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$2. \quad \text{rot } \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

$$3. \quad \text{div } \underline{H} = 0$$

$$4. \quad \text{div } \underline{E} = 0$$

$$\text{I.} \quad \text{rot}(\text{rot } \underline{H}) = \dots \rightarrow \Delta \underline{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2}$$

$$\text{II.} \quad \text{rot}(\text{rot } \underline{E}) = \dots \rightarrow \Delta \underline{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2}$$

Ez ugyanaz, mint a rugalmas közegben terjedő hullám egyenlete:  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$  a közegbeli fénysebesség kiszámításának képlete.

### **A hullámegyenlet megoldása**

1. A hullámfrontok a terjedés irányára merőleges síkfelületek.
2. A Maxwell-egyenletekből következik, hogy  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  merőlegesek egymásra.
3.  $\underline{E}$  és  $\underline{B}$  azonos fázisú (vákuumban, illetve valós törésmutató esetén).
4. A közegbeli fénysebesség  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ .
5.  $\underline{E} = \underline{B} * c$   $\underline{E} = \underline{B} \times \underline{c}$  ( $c$  a fénysebesség vektorának jele)

## **3. gyakorlat**

### **Első feladat (295)**

Egy  $B = 0.1 \frac{Vs}{m^2}$  mágneses indukciójú homogén mágneses erőterben az erővonalakra merőlegesen elhelyezünk egy  $A = 25cm^2$  területű, négyzet alakú keretet, amely  $1mm^2$  keresztmetszetű rézdrótból készült. Mennyi töltés halad át egy adott ponton, ha az erőteret kikapcsoljuk?

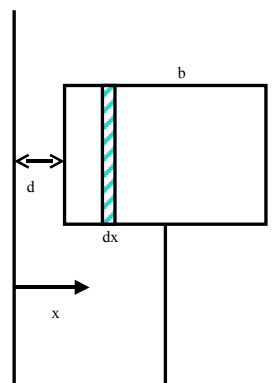
$$\rho_{réz} = 0.017 \frac{\Omega mm^2}{m}; \quad l = 20cm = 0.2m.$$

**Megoldás**

$$R = \rho \frac{l}{A}, \text{ és } Q = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{BA - \phi_2}{\rho \frac{l}{A}} = 0.0735C, \text{ mert } \phi_2 = 0 \text{ (az erőteret kikapcsoljuk)}$$

**Második feladat (299)**

Derékszögű, négyszög alakú vezetőkeret (téglalap) síkjában az éllel párhuzamosan elhelyezünk egy végtelen hosszúnak tekinthető egyenes vezetőt, amelyben  $I = I_0 \cos(\omega t)$  áram folyik keresztül. Legyen  $d$  a vezető és a vezetőkeret vezetőhöz közelebbi, azzal párhuzamos oldala.



- Mekkora a keretben indukált elektromotoros erő effektív értéke?
- Mekkora az egyenes vezető és a vezetőkeret közötti kölcsönös induktivitási együttható?

$$a = 50\text{cm}; \quad b = 20\text{cm}; \quad d = 1\text{cm}; \quad I_{\text{eff}} = 20\text{A}; \quad f = 200\text{Hz}$$

**Megoldás**

- Vegyünk föl a vezetőkeret  $b$  oldala mentén egy nullához tartó  $dx$  távolságot. Erre a  $dx \cdot a$  területű téglalagra már alkalmazhatjuk Faraday indukciós törvényét, így:

$$I = I_0 \cos(\omega t) \text{ és } B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{I}{2\pi x}.$$

$d\phi = B \cdot a dx = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} a dx$ . Nekünk az egész vezetőkeret fluxusa szükséges, ezért az egész szélességre integráljuk ezt az értéket:

$$\phi = \int_d^{b+d} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{\mu_0 I \cdot a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right) I_0 \cos(\omega t).$$

Tudjuk, hogy  $U = \frac{d\phi}{dt}$ , ezért  $U_e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right) \cdot I_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot \omega$

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} \frac{a \omega \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$\text{b) } \phi = M \cdot I \rightarrow M = \frac{\phi}{I_{\text{eff}}} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right).$$

**Harmadik feladat (297)**

Egy  $N = 100$  menetszámú,  $A = 2\text{cm}^2$  keresztmetszetű és  $l_0 = 20\text{cm}$  hosszúságú tekercsben  $I = 0.5\text{A}$  áram folyik. Ekkor a tekercset mechanikai rezgésbe hozzuk, hogy

hossza a  $l = l_0(1 + a \cdot \cos(\omega t))$  függvény szerint változzék, ahol  $a = 0.05$  és  $\omega = 400 \frac{1}{s}$ .

Mennyi a csúcspotential közelítő értéke? Felhasználható, hogy  $a \ll 1$ .

**Megoldás**

$$\phi = B \cdot A \cdot N = \mu_0 \frac{NI}{l} AN = \mu_0 \frac{AN^2 I}{l_0(1 + a \cdot \cos(\omega t))}$$

$$U_e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 AN^2 I}{l_0} (1 + a \cos(\omega t))^{-2} (-1)a\omega(-\sin(\omega t)) =$$

$$= -\mu_0 A \frac{N^2 I}{l_0} \cdot \frac{1}{(1 + a \cos(\omega t))^2} a\omega \sin(\omega t)$$

$$U_{e\max} = \mu_0 A \frac{N^2 I}{l_0} a\omega, \text{ hiszen a szinusz és a koszinusz függvények maximális értéke 1.}$$

## 8. előadás

### **Elektromágneses hullám keltése**

#### **„Szemlélet”**

Az, hogy egy részecske hullámot kelt-e, a sebessége határozza meg. Ha ez a sebesség nulla, akkor a körülötte lévő erővonalak egyenesen oszlanak el. Ha a sebessége nem nulla, akkor az erővonalak eloszlása egyenlőtlen lesz. Ha folytonosan mozgatjuk a részecskét, akkor hullámot hozunk létre.

#### **Dipólusantenna**

A dipólusantenna két vége között állandóan változik a polaritás, így más és más erők jönnek létre. Mikor a töltés az antenna közepén van, hullámfrontleválás történik.

#### **Elektromágneses energia terjedése**

Maxwell elektromágneses elméletének közzététele (1865):

Elektromágneses hullámnak léteznie kell.

Ezt Hertz kísérletei igazolták 1887-ben.

#### **Rezgőkör**

$$f = 10^8 \text{ Hz}$$

$$\lambda = c * T = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}$$

A rezgőkörben árammaximumok és -minimumok periodikus ismétlődése figyelhető meg, tehát joggal feltételezhető, hogy a vezetékpar mentén elektromágneses hullámok terjednek és az interferenciajelenségek révén állóhullámok alakulnak ki.

Ha a vezetékparat mozgatjuk, akkor a jelenség hol erősödik, hol gyengül; periodikus hatást tapasztalhatunk.

Az áram arányos a mágneses térerősséggel,

A feszültség arányos a villamos térerővel.

#### **Az elektromágneses tér energiasűrűsége, a Poynting vektor**

$$D = \epsilon * E$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon * E^2 \text{ (vektorok nélküli, speciális eset) a villamos tér energiasűrűsége}$$

$$\omega_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu H^2 \text{ De } \underline{E} = c * B \text{ alapján } c = \frac{1}{\sqrt{\mu * \epsilon}} \text{ (} B = \mu H \text{)}$$

$$\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon c^2 B^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \rightarrow \omega_{teljes} = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \quad \omega_{teljes} = \mu H^2 = \mu \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E H = \sqrt{\mu \epsilon} E H$$



Valamely terjedési irányra merőleges  $f$  felületen  $\Delta t$  idő alatt annyi energia áramlik keresztül, amennyi benne van egy  $c \Delta t$  hosszúságú és  $kis f$  alapterületű hasában.

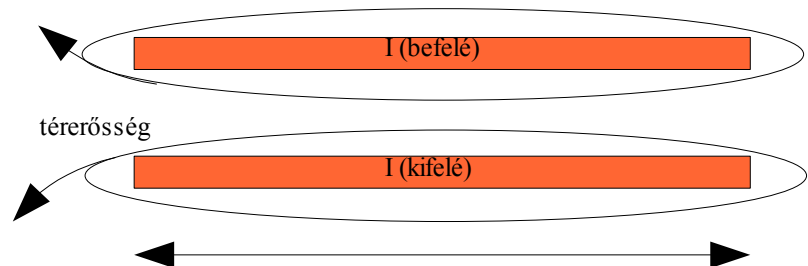
$$W = \sqrt{\epsilon \mu} E H (c \Delta t) \rightarrow S' = \frac{W}{f \Delta t} = E H$$

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$  Poynting vektor, az energia áramsűrűségének vektora, elektromágneses hullám intenzitása  $[\frac{W}{m^2}]$

### Vezetékpárban szállított energia (tökéletes vezető)

$U$  feszültség

$$E b = U \rightarrow E = \frac{U}{b}$$



A vezetékben folyó áram mágneses teret gerjeszt. Ha a **szórt** teret elhanyagoljuk, a gerjesztési törvény alapján:

$$H a = I \rightarrow H = \frac{I}{a} \rightarrow S = E H; P = S a b = E H a b = \frac{U}{b} \frac{I}{a} a b = U I, \text{ ahol } a \text{ és } b \text{ a felület két}$$

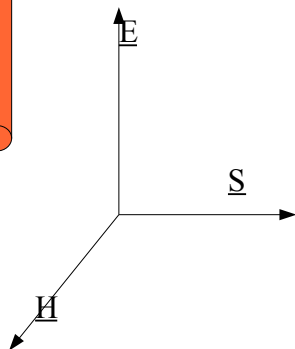
oldala, az  $UI$  szorzat pedig a feszültségforrás teljesítménye. A vezeték ideális, tehát nincs benne villamos tér, mert ellenkező esetben végtelen áramerősség jelenne meg. Tehát az energia csak a vezeték körüli térben áramlik.

### $\rho$ fajlagos ellenállású vezeték esete



$$(1) \underline{E} = \rho \underline{j}; j = \frac{I}{R^2 \pi}$$

$$(2) H = \frac{j r^2 \pi}{2 r \pi} = \frac{j r}{2} \text{ (gerjesztési törvény)}$$



Nézzük meg mennyi energia áramlik be az  $l$  hosszúságú hengerfelületen  $1s$  idő alatt.

$\underline{E} \times \underline{H}$  E-t H-ba viszem jobbsodrással (S)

A paláston befelé mutat

$$P = 2\pi l \underline{E} \underline{H} = 2\pi l (\rho j) \frac{j r}{2} = r^2 \pi l \rho j^2, \text{ tehát időegy-}$$

ség alatt térfogategységre  $\rho j^2$  energia jut, ez pontosan a Joule-hő.

A Poynting vektornak vezető felületére merőleges komponense pontosan annyi energiát szállít, mint a Joule-hő.

## 9. előadás

### Elektromágneses sugárzás

#### A dipólussugárzás kvalitatív jellemzése

Villamos dipólus



Rezgés (pl.: hőmozgás)

$p = q \cdot l$  Gyorsuló töltés elektromágneses hullámot bocsát ki.

#### Látható fény

A látható fény hullámhossza :  $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}m$  -től  $7.8 \cdot 10^{-7}m$  -ig

A hullámzónában (néhány  $10 \cdot \lambda$  távolságra vagyunk a villamos dipólustól)

$$p = q \cdot Z = q \cdot Z_0 \exp(i \cdot \omega \cdot t)$$

$$\frac{dZ}{dt^2} = -\omega^2 \cdot Z \Rightarrow \omega^2 \text{ szerepel H, E alakjában}$$

$$\text{vákuumban: } \mu_0 \cdot H^2 = \epsilon_0 \cdot E^2 \Rightarrow E = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot c} H \quad c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

#### Dipólus sugárzási teljesítménye

$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$  Poynting vektor

$S = a' \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$   $P$  a dipólus sugárzási teljesítménye,  $a'$  a dipólus és az  $r$

sugár közötti szög függvénye

A tér az adott *tetával* jellemzett irányra merőleges gyorsuláskomponenssel lesz arányos.

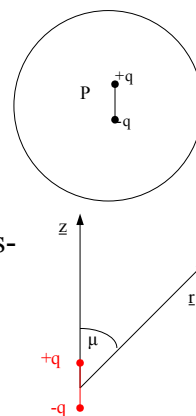
Kvalitatív eredmény:  $H \sim \frac{\omega^2 \cdot p_0}{r} \sin \vartheta$

$$H = \frac{1}{4 \pi c} \cdot \frac{\omega^2 P_0}{r} \sin \vartheta \exp(i \omega t - \underline{k} r)$$

részletes számítással:

$$E = \frac{1}{\epsilon_c} H = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c} \cdot \frac{\omega^2 P_0}{r} \sin \vartheta \exp(i \omega t - \underline{k} r)$$

ahol  $|\underline{k}| = 2 \frac{\pi}{\lambda}$  a hullámszám



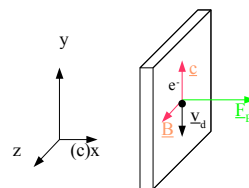
### Az elektromágneses hullámok impulzusa; fénynyomás

x irányban halad a hullám, az elektronra hat az E villamos tér

$$\underline{E} = \underline{B} \times \underline{c}$$

$$\underline{F}_E = b \cdot \underline{v}_d \quad (\text{ahol } b \text{ egy konstans)}$$

(Lorentz erő)  $\underline{F}_B = -e(\underline{v}_d \times \underline{B})$  ez +x irányba mutat



#### Kvalitatíve

(a kvantitatív számítás részletesebb lenne!)

$$F_E = l \cdot E$$

$$F_B = e \cdot v_d \cdot B \quad \text{Az energiaátadás sebessége:}$$

$$\frac{dU}{dt} = \underline{F}_E \cdot \underline{v}_d = e \cdot E \cdot v_d = e \cdot c \cdot B \cdot v_d = c \cdot F_B = c \frac{dp}{dt}$$

$$\int dt \rightarrow U = c \cdot p \quad U \text{ energiájú hullám által szállított impulzus}$$

$F = \frac{1}{c} \cdot \frac{dU}{dt}$ , ha egységnyi felületre vonatkoztatunk, akkor a Poynting vektor jelenik meg.

Abszorbeáló (elnyelő) sugárzás esetén:  $\frac{S_{\text{át}}}{C}$  fénynyomás

Teljes reflexió (visszaverődő) sugárzás esetén:  $2 \frac{S_{\text{át}}}{C}$

} Merőleges beesést feltételezve

### Geometriai optika

#### Fényvisszaverődés

látható fény: 400 – 800Å (1Å = 10<sup>-10</sup>m)

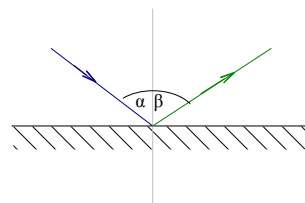
szem felbontóképessége  $\Delta \lambda \approx 1 \text{ nm}$

Hullámfront: azonos fázisú pontok mértani helye.

Huygens elv: a hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok kiinduló pontjának tekinthető. Az elemi hullámok a hullám terjedési sebességével terjednek tovább. Egy későbbi időpontban a hullámfront új helyzetét az elemi hullámok burkolója adja meg.

#### Fényvisszaverődés síktükörön

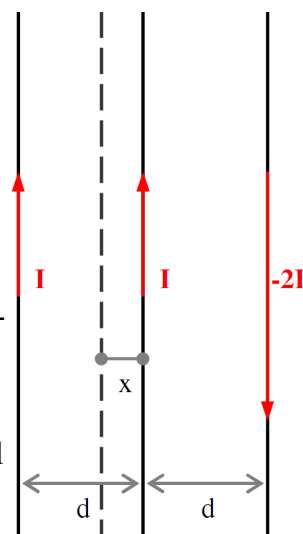
$\alpha = \beta$ , tehát a beérkező és a visszavert hullám ugyanakkora szöveget zár be a síktükör felületére a visszaverődés pontjában állított normálissal.



## 4. gyakorlat

### Első feladat (216)

Három, egy síkban lévő, egymással párhuzamos vezetőt helyezünk el úgy, hogy két szomszédos között  $3\text{ cm}$  legyen a távolság. A bal oldali vezetőben és a középsőben  $I$ , a harmadikban  $-2I$  erősségű áram folyik. Határozzuk meg azon egyenes helyzetét, melyen a térerősség egyenlő a nullával!



### Megoldás

A feladat megoldásához a gerjesztési törvényt és a szuperpozíció elvét fogjuk alkalmazni. Első lépésként vegyünk fel egy, a vezetőkkel párhuzamos egyenest a középső vezető környezetében, attól  $x$  távolságra. A térerősségek összegének  $0$ -nak kell lennie a keresett egyenesen. Ennek meghatározására használhatnánk a Biot-Savart törvényt is, ám az bonyolultabb feladatmegoldást eredményezne, mint a gerjesztési törvénnyel:

$$H = \frac{I2\pi}{r} \rightarrow \sum H = \frac{I2\pi}{d-x} - \frac{I2\pi}{x} + \frac{I2\pi}{d+x}; \quad \sum H = 0$$

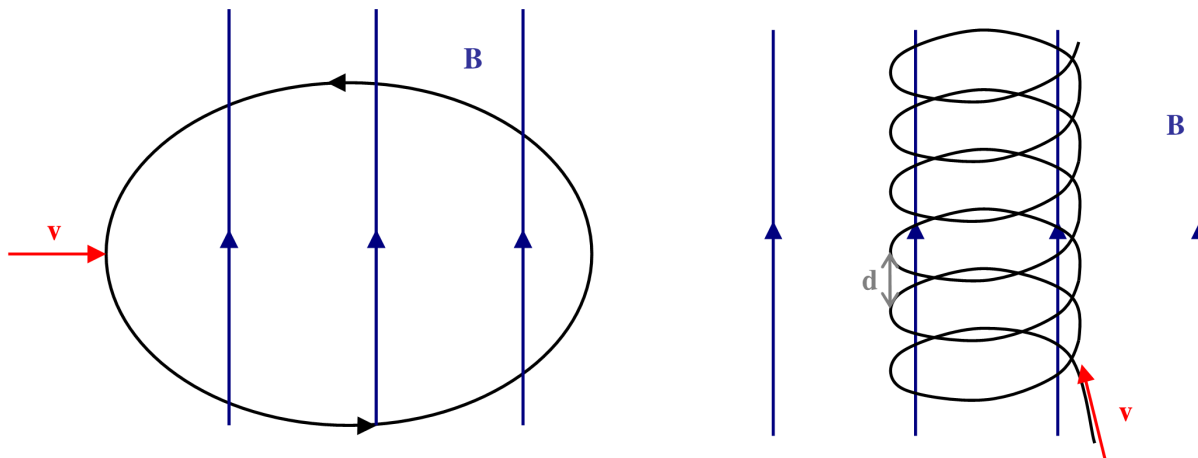
Ezt az egyenletet kell csak rendezni a feladat megoldásához, hogy megkapjuk az eredményt:  $x = 1\text{ cm}$ , tehát a középső vezetőtől balra, attól  $1\text{ cm}$ -nyire lévő egyenesen lesz a térerősség nulla.

### Második feladat (264)

Vizsgáljuk meg a  $B$  indukciójú homogén mágneses erőterbe  $v$  sebességgel belőtt részecske mozgását, ha a sebesség az erőter irányával  $\beta$  szöget zár be!  $\beta \neq 90^\circ$ .

### Megoldás

Ha  $\beta = 90^\circ$ , a részecske körpályára áll. Ha  $\beta \neq 90^\circ$ , a részecske spirálpályán fog mozogni, csavarvonalban:



A csavarvonalú mozgás oka az, hogy  $v$ -t felbonthatjuk az indukcióra merőleges, és azal párhuzamos komponenseire. Így a részecske mozgását is modellezhetjük két mozgással. Az első egy, a mágneses indukció erővonalaiival párhuzamos, egyenes vonalú

egyenletes mozgás. Egy körmozgás alatt  $d = T \cdot v_p = T \cdot v \cdot \cos \beta = \frac{2\pi m}{QB} v \cos \beta$  távolságot fog megtenni a részecske. A másik a már említett körmozgás, melynek főbb adatait a két héttel ezelőtti problémamegoldás egyik feladatából le lehet vezetni:

$$r = \frac{m v \sin \beta}{QB}; T = \frac{2\pi m}{v_m} = \frac{2\pi m}{QB}.$$

### Harmadik feladat (265)

Egy elektront 1000 V potenciálkülönbséggel gyorsítunk, és sebességére merőleges, homogén mágneses térbe irányítjuk. A térerősség mértéke  $H = 947.5 \frac{A}{m}$ . Határozza meg az elektron sebességét, valamint pályáját!

#### Megoldás

A részecske mozgási energiája a következőképpen számítható ki:  $\frac{1}{2} m_e v^2 = q_e U$ . Így a

részecske sebessége:  $v = \sqrt{\frac{2 q_e U}{m_e}} \simeq 1.87 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$ . A részecske voltaképpen körpályán

mozog, pályájának görbületi sugarát a  $r = \frac{m_e v_e}{q_e B} = \frac{m_e \cdot \sqrt{\frac{2 q_e U}{m_e}}}{q_e \mu_0 H} = \frac{\sqrt{2 U m_e}}{q_e} \simeq 9 \text{ cm}$  kép-

lettel határozhatjuk meg, periódusideje pedig:  $T = \frac{2\pi r}{v_e} = \dots = \frac{2\pi m_e}{q_e B} \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ .

### Negyedik feladat (sorszám ismeretlen)

Egy  $r = 3 \text{ cm}$  sugarú,  $\frac{N}{l} = 1515 \frac{1}{\text{cm}}$  (centiméterenként 1515 menetű), hosszú tekercsben  $I = 4 \text{ A}$  áram folyik. Ennek a tekercsnek a közepébe helyezünk egy  $n = 1000$  menetű,  $r = 60 \Omega$  ellenállású tekercset. Mennyi töltés fog áthaladni a másik tekercsen, ha az előbbben a  $4 \text{ A}$ -es áram irányát az ellenkezőjére váltjuk?

#### Megoldás

Mivel megfordul az áram iránya, ezért a fluxus pontosan az ellenkezőjévé változik. A Faraday-féle indukciós törvényt alkalmazva a feladatra:

$$Q = \int I(t) dt \text{ és } R = \frac{U}{I} \rightarrow I = \frac{U}{R}. U = U_e = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ tehát}$$

$$Q = \int \frac{U_e}{R} dt = -\int_{(1)}^{(2)} \frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{R} dt = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \text{ A fluxust ki tudjuk számolni, hiszen minden}$$

szükséges adatot ismerünk:  $H = \frac{N \cdot I}{l}$ ,  $\frac{N}{l} = \frac{15}{cm}$ , és  $B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l}$ .  $\phi = B \cdot A = B r^2 \pi$ ,

ezért  $\sum \phi = \frac{2 B r^2 \pi N_2}{R_2} = 7.1 \cdot 10^{-4} C$ . Ezzel a feladatot megoldottuk.

### Ötödik feladat (sorszám ismeretlen)

Egy  $N = 30$  menetű,  $A = 10 \text{ cm}^2$  keresztmetszetű tekercs  $H = \frac{10^6}{4\pi} \frac{A}{m}$  térben helyezkedik el, síkjával az erővonalakra merőlegesen. Mikor a tekercset hirtelen kirántjuk a térből, a sorbakapcsolt galvanométer  $10^{-5} C$  töltésű áram áthaladását jelzi. Mekkora a páros együttes ellenállása?

### Megoldás

Minden szükséges adatot ismerünk a feladat megoldásához, ezért:

$$Q = \int I dt = \int \frac{d\phi}{dt} \frac{1}{R} dt = \frac{\mu_0 H A N}{R} \rightarrow R = \frac{\mu_0 H A N}{Q}.$$

## 10. előadás

### Kísérlet

Ezen az előadáson kísérletek kerültek bemutatásra, melyeket az érdeklődők megtekinthetnek személyesen.

## 11. előadás

### Fényvisszaverődés

$\Delta t = \frac{\overline{A'B}}{c}$  Idő alatt éri el a hullámfront a B pontot.

De  $\Delta t$  idő alatt az A pontbeli „gömbhullám” B-be jut.

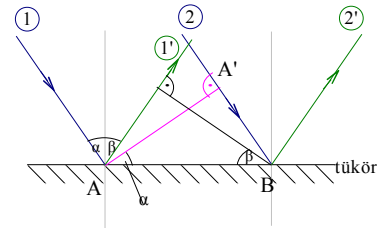
$$\Rightarrow \overline{AB'} = \overline{A'B}$$

Az új visszavert hullám burkolója  $\overline{BB'}$  lesz.

$$\text{De } \overline{AA'B_\Delta} = \overline{BB'A_\Delta}$$

( $\overline{AB}$  közös  $\overline{AB'} = \overline{A'B}$ , és derékszögű)

$$\Rightarrow \alpha = \beta, \text{ mert merőleges szárú szögek.}$$

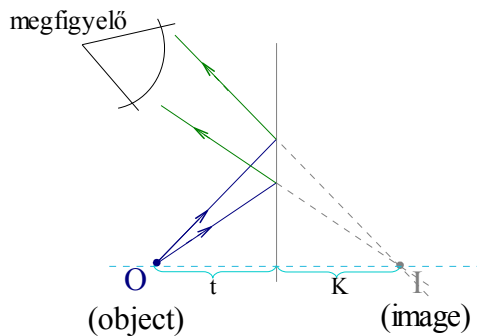


### A fényvisszaverődés törvénye:

A beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel. A beesési sugár, a tükör normálisa és a visszavert sugár egy síkban fekszenek.

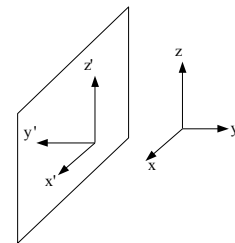
### Fermat elv:

A fénysugár egyik pontból a másikba olyan úton terjed, ami ugyanannyi, vagy kevesebb időt vesz igénybe, mintha bármely más úton haladna.



x, y, z jobbsodrású  
x', y', z' balsodrású  
(jobb és bal felcserélődik)

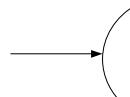
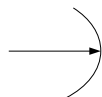
$$t = K$$



### Fényvisszaverődés gömbtükörön:

homorú (konkáv)

domború (konvex)

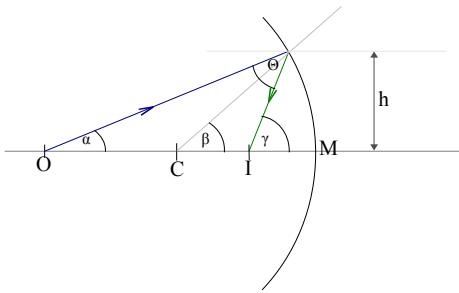


### Paraxiális közelítés:

(tengellyel párhuzamos  $\approx$ )

$$(tg \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha)$$

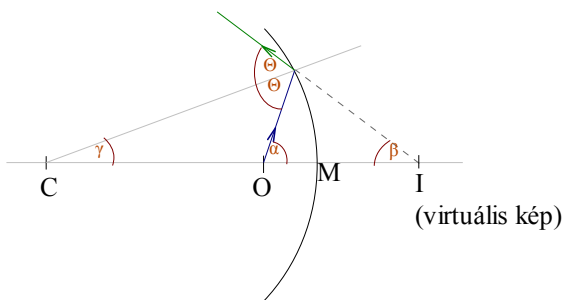
**Homorú tükör, valódi kép:**



$$\begin{aligned} (1) \quad \beta &= \gamma + \Theta & (1') \quad 2 \cdot \beta &= 2 \cdot \gamma + 2 \cdot \Theta \\ (2) \quad \beta &= \alpha + 2 \cdot \Theta \\ (1)' - (2) &\Rightarrow \beta = 2 \cdot \gamma - \alpha \rightarrow \alpha + \beta = 2 \gamma' \end{aligned}$$

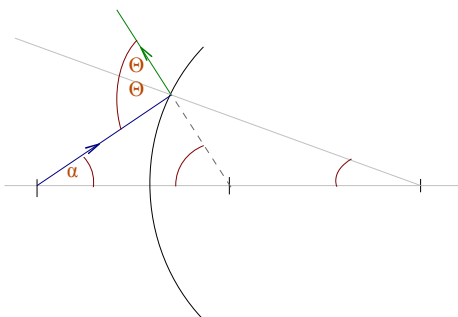
$$\alpha = \frac{h}{OM}; \quad \beta \approx \frac{h}{IM}; \quad \gamma \approx \frac{h}{CM} \Rightarrow \frac{1}{OM} + \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM}$$

**Homorú tükör, virtuális kép:**



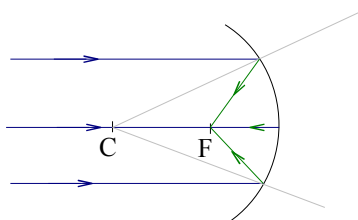
$$\begin{aligned} \Theta &= \beta + \gamma \\ \alpha &= \Theta + \gamma \\ \alpha - \beta &= 2 \cdot \gamma \Rightarrow \frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = \frac{2}{CM} \end{aligned}$$

**Domború tükör, virtuális kép**



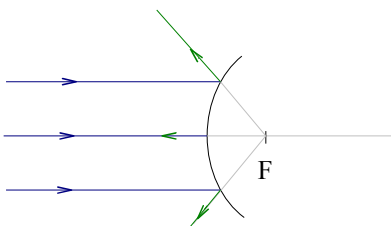
$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \alpha + \gamma \\ 2 \cdot \Theta &= \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \alpha - \beta = -2 \cdot \gamma \Rightarrow \frac{1}{OM} - \frac{1}{IM} = \frac{-2}{CM}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$



fókusz távolság :  $t$   
párhuzamos nyalábok :  $t = \infty$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{k} = \frac{2}{R} \Rightarrow f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2f \Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{F}$$





**Előjel konvenció:**

- (1)  $t > 0$  a tükröző sugarak divergálnak (egyébként  $t < 0$ )
- (2)  $k > 0$  ha a tükörtől távozó sugarak konvergálnak (egyébként  $k < 0$ )
- (3)  $R, f > 0$  ha a tükör homorú

**5. gyakorlat**

**Emlékeztető**

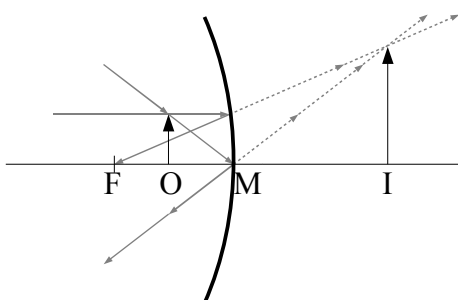
**Rendelkezésre álló képletek**

$\frac{1}{t} \pm \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$   $f = \frac{R}{2}$ , ezek azok a képletek, melyek a legtöbb feladat megoldását segítik.

$t$  jelöli a tárgy és a tükör közötti távolságot,  $k$  a tárgy képe és a tükör közötti távolságot,  $f$  pedig a fókusz távolságot. A  $R$  pedig a gömbtükör sugarának méretét fejezi ki. A nagyítás mértékének megállapításához az  $N = -\frac{k}{t}$  képletet szokás alkalmazni, ha  $N > 0$ , a kép egyenes állású,  $N < 0$  esetén pedig fordított állású. A valódi kép mindig fordított, a virtuális mindig egyenes állású.

**Rendelkezésre álló ábrák**

Ha ezeket az ábrákat memorizáljuk, könnyű lesz majd a zárthelyin eldöntenünk, hogy valós, avagy virtuális-e a kép, és egyenes, vagy fordított állású-e:



A legegyszerűbb eljárás a különböző esetek ábrázolásához, ha egy sugarat a centrumon ( $M$ ) keresztül, míg egy másikat pedig a végtelenből, a tengellyel párhuzamosan indítunk.

Az ábrán homorú tükört használunk, a tárgytávolság kisebb, mint a fókusz távolság, ezért a kép virtuális, egyenes állású és nagyított.

**Első feladat (360)**

Egy homorú gömbtükör görbületi sugara  $R = 40\text{cm}$ . Határozzuk meg annak a tárgyának a helyzetét, amelyről a tükör kétszeres nagyítású, valóságos képet ad! Hol lesz a tárgy akkor, ha a tükör által adott kép virtuális, de ugyancsak kétszeres nagyítású?

**Megoldás**

Mivel  $f = \frac{R}{2}$ , ezért a tükör fókusz távolságát könnyen ki tudjuk számítani. Az első

esetben a kép valódi, tehát  $N = -2 = -\frac{k}{t} \rightarrow k = 2t$ .

$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f} \rightarrow 3f = 2t \rightarrow t = 30\text{cm}$ . A második esetben a kép virtuális,

ezért  $N = 2 = -\frac{k}{t} \rightarrow k = -2t$ . Ugyanúgy kell eljárunk, mint az első esetben inentől, míg rendezéssel meg nem kapjuk a végeredményt:  $t = 10\text{cm}$ .

### Második feladat (362)

Egy  $R = 9\text{cm}$  sugarú, homorú gömbtükör elé  $t = 1,8\text{ cm}$  távolságra  $1\text{cm}$  magas tárgyat helyezünk. Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel a kép adatait!

#### Megoldás

Most csak számítással fogjuk a feladatot megoldani (órán is csak így tettük):

$$R = 9\text{cm} \rightarrow f = 4,5\text{ cm}, \quad t = 1,8\text{ cm} \cdot \frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t} \rightarrow \dots \rightarrow k = -3\text{cm}$$

$$N = -\frac{k}{t} = -\frac{-3}{1,8} = \frac{30}{18} = 1,6. \text{ Ezzel a feladatot megoldottuk.}$$

### Harmadik feladat (365)

A homorú gömbtükör háromszoros nagyítású, fordított állású képet ad egy bizonyos tárgyról. A tárgy és a képe közötti távolság  $28\text{ cm}$ . Mekkora a tárgytávolság és a tükör fókusz távolsága?

#### Megoldás

A kép fordított állású, ezért valódi, tehát  $N = 3 = -\frac{k}{t} \rightarrow k = -3t$ . Ha a homorú gömbtükör valódi képet ad, akkor a tárgy és képe a tükörnek azonos oldalán van:  
 $k - t = 28\text{cm}, k = -3t \rightarrow t = 14\text{cm}, k = -42\text{cm}$ . Némi rendezés után megkapjuk a tükör fókusz távolságát is:  $f = 10,5\text{ cm}$ .

### Negyedik feladat (366)

Domború gömbtükörben a tárgy virtuális képe  $k = 7\text{cm}$ -re látszik. Milyen messze van a tárgy a tükörtől, ha a tükör fókusz távolsága  $f = 10\text{cm}$ ? Szerkesszük meg a tárgy képét a tükörben!

#### Megoldás

A kép virtuális, ezért  $N < 0$ . A lencse domború, ezért az  $\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$  képletet kell alkalmaznunk a megoldáshoz. Rendezés után a  $t = \frac{70}{3}\text{ cm}$  eredményt kapjuk. (A szerkesztést ezúttal is kihagyom az elektronikus jegyzetből)

### Ötödik feladat (367)

Gömbtükörben a virtuális kép nagysága az eredeti fele. A a tárgyat  $10\text{cm}$ -rel közelebb visszük a tükörhöz, akkor a kép nagysága a tárgy nagyságának a  $\frac{2}{3}$ -a lesz. Mekkora a tükör fókusz távolsága?

### Megoldás

Mivel a kép virtuális, ezért  $N > 0$ . Tehát az első helyzetben:

$$N_1 = \frac{1}{2} = -\frac{k_1}{t_1} \rightarrow -k_1 = \frac{t_1}{2}. \text{ Ezért } -\frac{2}{t_1} + \frac{1}{t_1} = \frac{1}{f} \rightarrow \dots \rightarrow f = -t_1. \text{ A második esetben}$$

$$N_2 = \frac{2}{3} = -\frac{k_2}{t_2} \rightarrow k_2 = \frac{2t_2}{3} \rightarrow -\frac{3}{2t_2} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{f} \rightarrow \dots \rightarrow f = -2t_2. \quad t_2 = t_1 - 10\text{cm}, \text{ és } f\text{-et}$$

mind az első, mind a második tárgy távolsággal kifejeztük, ezért:

$$f = -t_1 = -2t_2 \rightarrow t_1 = -2(t_1 - 10) \rightarrow t_1 = 20\text{cm} \rightarrow f = -20\text{cm}. \text{ Ezzel a feladatot megoldottuk.}$$

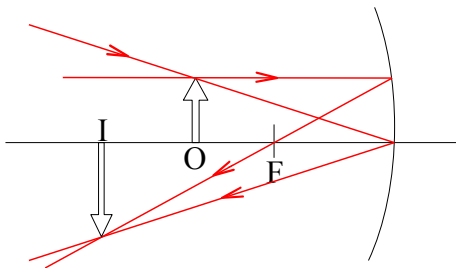
## 12. előadás

### Sugárdiagramm és nagyítás

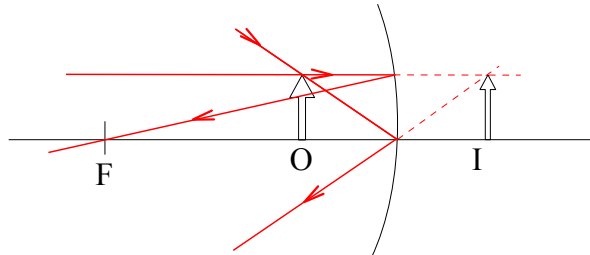
- A sugárközpontot érintő sugár szimmetrikusan verődik vissza
- Az optikai tengellyel párhuzamos sugár a fókuszpontról verődik vissza

### Tükrök nevezetes sugármenetei

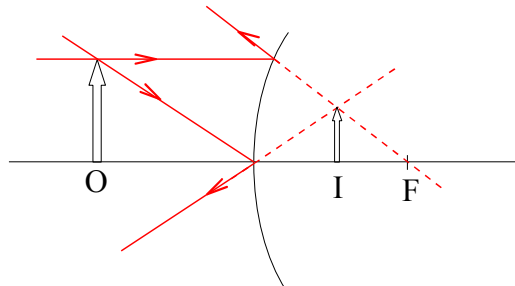
*homorú tükör, valódi fordított kép*



*homorú tükör, egyenes állású virtuális kép*



*domború tükör, egyenes állású virtuális kép*



## Számítások

### Nagyítás

$$\text{Nagyítás: } N = \frac{-k}{t}$$

- ha  $N > 0$  akkor egyenes állású kép
- ha  $N < 0$  akkor fordított állású kép

## A fénytörés

### Törésmutató

$$\text{törésmutató: } n := \frac{\text{fénysebesség vákuumban}}{\text{fénysebesség az adott közegben}}$$

A belső fényhullám az atomokat a sugárzás elnyelésére készíti, és rezgésállapotukat megváltoztatja. Az elektronok „újra” kisugározzák az elektromágneses hullámot, de valamilyen késéssel. Ennek az eredménye az, hogy adott közegben a fény terjedési sebessége kisebb a vákuumbelénél.

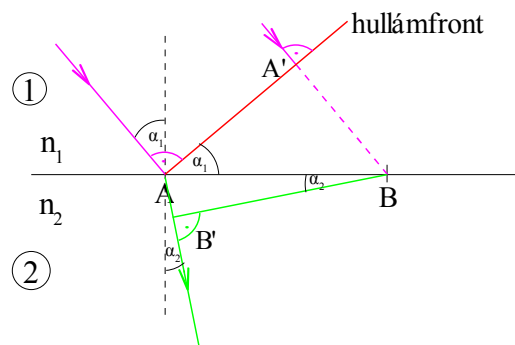
### Diszperzió

$$\text{Diszperzió: } \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$$

a törésmutató frekvenciafüggő (lásd: prizma)

### A fénytörés:

$$\begin{aligned} \overline{A'b} &= v_1 \cdot \Delta t \\ \overline{AB'} &= v_2 \cdot \Delta t \\ \sin \alpha_1 &= \frac{v_1 \cdot \Delta t}{\overline{AB}} & \sin \alpha_2 &= \frac{v_2 \cdot \Delta t}{\overline{AB}} \end{aligned}$$



**Az előadás jegyzete befejezetlen!**

## 13. előadás

## 6. gyakorlat

### Első feladat (373)

Egy vékony lencsétől  $10 \text{ cm}$  távolságra levő tárgy képe egyenes állású és kétszeres nagyítású. Mekkora a lencse fókusz távolsága? Oldja meg a feladatot szerkesztéssel is!

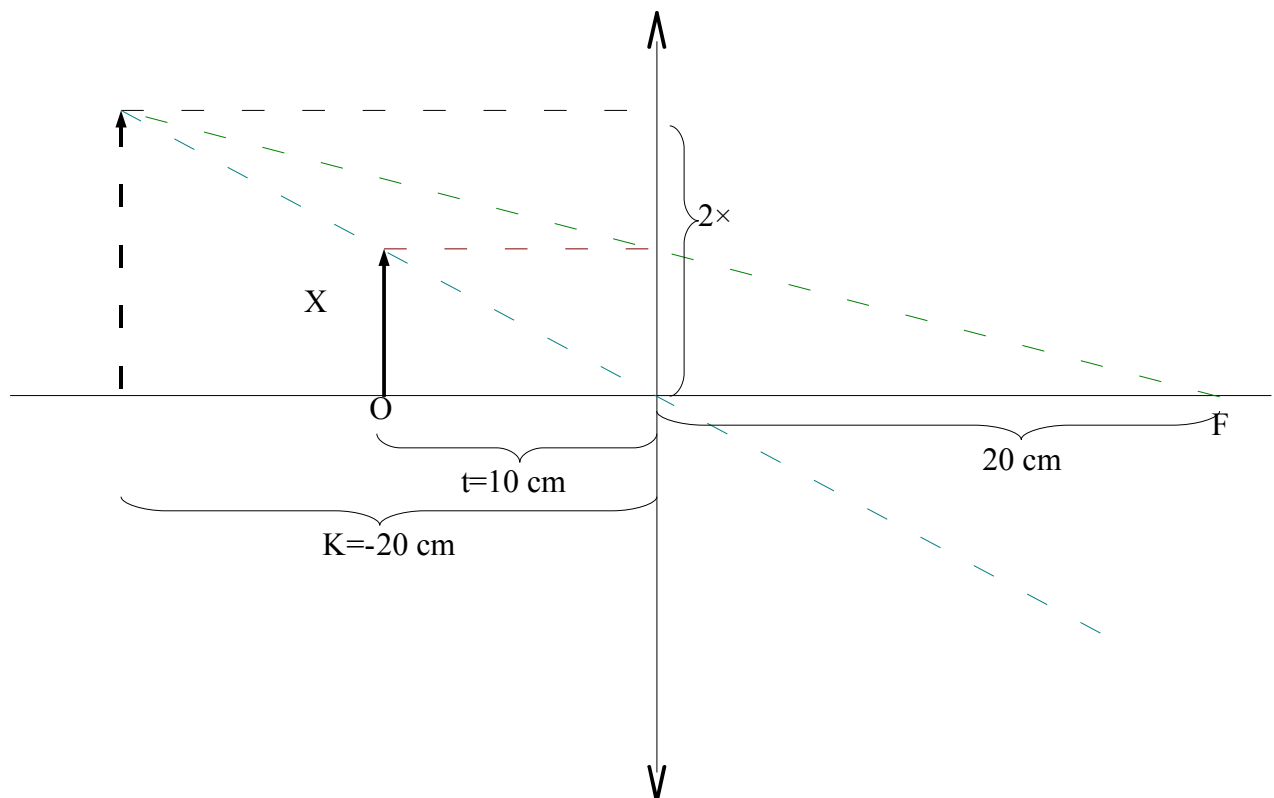
**Megoldás (számítással)**

Adott, hogy  $N=2$  és  $t=10\text{ cm}$ . A nagyítást használva:  $N=-\frac{k}{t} \rightarrow k=-20\text{ cm}$ , ezt

behelyettesítjük a leképezési törvénybe:  $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$  amiből  $f$ -re  $20\text{ cm}$  adódik.

**Szerkesztéssel:**

Berajzoljuk a kép tetejéről a lencse középpontján áthaladó sugarakat, majd pedig felvesszünk egy a tárgynak megfelelő kétszeres nagyságú egyenest, a sugarak és az iménti egyenes metszéspontja adja majd kép tetejét, így meg rajzoljuk a képet (I), ha ez meg van akkor a tárgy tetejéből egyenest bocsátunk a lencsére (ez a tengelyre párhuzamosan érkező sugár). Az így kapott pontot összekötjük a kép tetejével és ennek az egyenesnek a meghosszabbítása és a tengely a metszés pontja adja majd a fókuszpontot (egyben a fókusz távolságot is).



**Második feladat (374).**

Egy tárgy képét gyűjtőlencsével ernyőre vetítjük. A kép magassága  $a$ . A tárgy és ernyő helyzetét rögzítve, a lencsét az ernyő felé kezdjük mozgatni, és ekkor azt találjuk, hogy a tárgy második tiszta képének magassága  $b$ . Mekkora a tárgy valóságos  $h$  magassága?

**Megoldás:**

A megoldás kulcsa, hogy a fény útja megfordítható (a tárgy és a kép felcserélhető), innen a nagyítási arány segítségével:

$$N = -\frac{k}{t} \text{ a tárgy magasságát } h\text{-val jelölve: } \frac{a}{h} = \frac{h}{b} \text{ ahonnan } h = \sqrt{ab}.$$

**Harmadik feladat(375)**

Egy lámpának az ernyőtől való távolsága 50 cm. A közöttük elhelyezett lencse két helyzetben adja az ernyőn a lámpa tiszta képét. E két hely közötti távolság 10 cm. Mekkora a lencse fókusz távolsága?

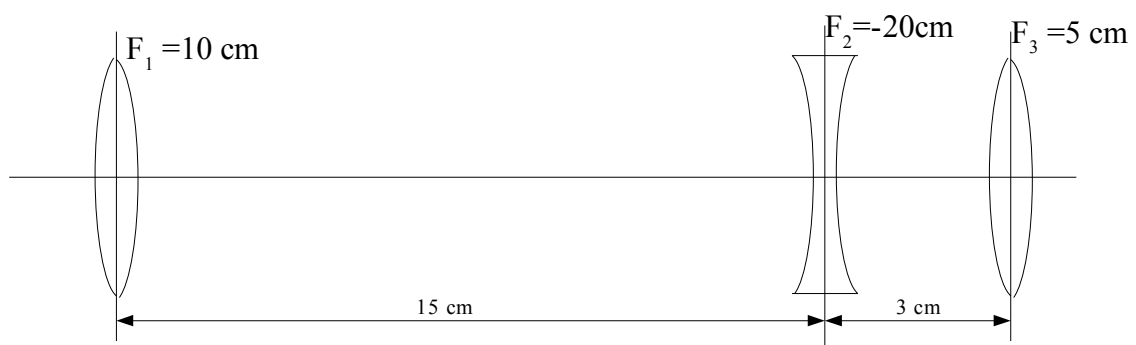
**Megoldás:**

Adott, hogy  $k + t = 50 \text{ cm}$ , és mivel a fény útja megfordítható, ezért  $k = t + 10 \text{ cm}$ , ezekből  $t = 20 \text{ cm}$  és  $k = 30 \text{ cm}$ . Ezt behelyettesítjük a leképezési törvénybe:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \text{ amiből } f\text{-re } 12 \text{ cm adódik.}$$

**Negyedik feladat(379)**

A következő ábrán látható lencserendszerre balról párhuzamos sugárnyaláb esik. Hol egyesül a sugárnyaláb a rendszeren való áthaladás után?



**Megoldás**

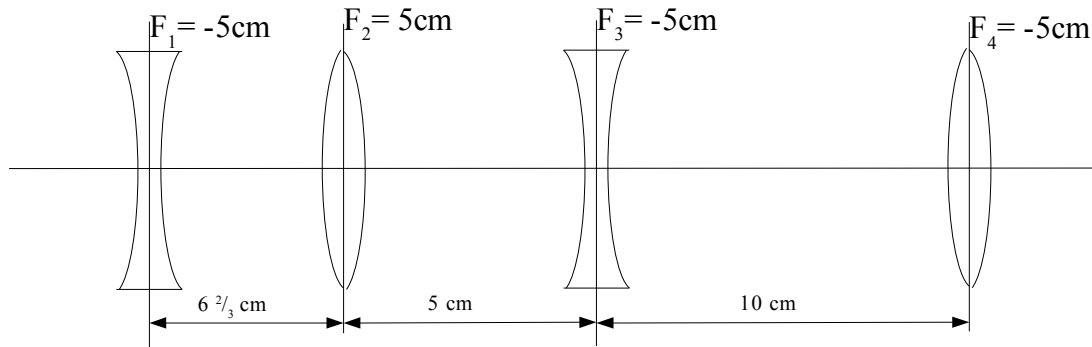
A párhuzamos nyalábok az első lencse fókuszában egyesülnek, ez 10 cm-re jobbra van az első lencsétől, egyben ez a pont a második (szóró)lencse tárgya is, és mivel a két lencse között 15 cm van, a második lencse tárgy távolsága ezért 5 cm. A szórólencse képének meghatározása a leképezési törvényt felhasználásával:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \text{ innen behelyettesítés után } k = -4 \text{ cm.}$$

Vagyis a kép a második lencsétől 4 cm-re jobbra van, az utolsó lencsétől pedig 7 cm-re, ennek a (gyűjtő)lencsének ez lesz a tárgy távolsága. A leképezési törvény ismételt alkalmazásával megkapjuk, hogy  $k = 17,5 \text{ cm}$ .

**Ötödik feladat(380)**

Határozzuk meg annak a pontnak a képét, amely a következő ábrán látható lencserendszer baloldali szélső lencsétől 10 cm távolságra balra van!



### Megoldás

Az első lencsére alkalmazzuk a leképezési törvényt:  $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$  ebből  $k$ -ra kapjuk, hogy

$k = -3\frac{1}{3}$ . Ezt hozzáadjuk a  $6\frac{2}{3}$ -hoz, így megkapjuk, hogy a második lencse tárgy-

távolsága  $10\text{ cm}$ . A leképezési törvényt ismét használva adódik, hogy ennek kép távol-

sága is  $10\text{ cm}$ , viszont a harmadik (szórólencse) csak  $5\text{ cm}$ -re van tőle, ezért ennek

tárgytávolsága  $-5\text{ cm}$  lesz. A leképezési törvényből most azt kapjuk, hogy  $\frac{1}{k} = 0$  vagyis

$k \rightarrow \infty$  amiből az következik, hogy belőle csak az optikai tengellyel párhuzamos suga-  
rak lépnek ki, ezeket pedig a fókuszpontjába gyűjti az utolsó (gyűjtő)lencse, vagyis a  
kép  $5\text{ cm}$ -re keletkezik, jobbra az utolsó lencsétől.

## 14. előadás

## 15. előadás

## 7. gyakorlat

### Első feladat (337)

$0,5\text{ mm}$  széles réssel elhajlásjelenséget állítunk elő a  $3\text{ m}$  távolságban elhelyezett er-  
nyőn. A jobbra és balra megjelenő első sötét csíkok távolsága vörös fényben  $8\text{ mm}$ ,  
ibolya fényben  $5,6\text{ mm}$ . Meghatározandók felhasznált fény hullámhosszai.

### Megoldás:

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda \quad (m = \pm 1)$$

$$\sin \Theta = \text{tg } \Theta = \frac{\Delta x / 2}{L} \approx \Theta$$

$$\lambda = d \cdot \frac{\Delta x / 2}{L} = 666\text{ nm (vörös)}$$

$$\lambda = d \cdot \frac{\Delta x / 2}{L} = 466,6\text{ nm (ibolya)}$$

### Második feladat (338)

Mekkora az optikai rács a rácsállandója, ha az  $589.6 \mu m$  hosszúságú fény második elhajlási maximumát  $43^\circ 15'$  szög alatt adja?

**Megoldás:**

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$$

$$d = \frac{m \cdot \lambda}{\sin \Theta} = 1.723 \mu m .$$

### Harmadik feladat(339)

Nátriumfényvel megvilágított optikai rács harmadik elhajlási képe központi képtől  $16.5 cm$  távolságban mutatkozott az  $1.5 m$  távoli ernyőn. Mekkora a rácsállandó?

**Megoldás:**

Az előző képlettel számolva a rácsállandóra  $d = 16 \mu m$  adódik.

### Negyedik feladat(340)

Elfedhetik-e egymást a rács első és másodrendű színekei, ha azt látható fényvel ( $4000-7000 Angström$ ) világítjuk meg?

**Megoldás:**

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$$

$$\sin \theta_{max} = \frac{\lambda_{max}}{d} \quad \sin \theta_{2_{min}} = \frac{2\lambda_{2_{min}}}{d}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{d} < \frac{2\lambda_{2_{min}}}{d} \quad \text{vagyis} \quad \Theta_{max} < \Theta_{2_{min}} .$$

### Ötödik feladat(341)

Milyen maximális nagyságrendű színeképet lehet  $\lambda$  hullámhosszú fénynek egy  $a$  állandójú rácson való elhajlása esetén megfigyelni?

**Megoldás:**

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$$

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda} \leq \frac{d}{\lambda}$$

### Hatodik feladat(342)

Határozzuk meg annak a színeképvonalnak a hullámhosszát, amelynek a rács által a harmadrendű színeképben adott képe összeesik a  $\lambda = 4861 Angstrom$  hullámhosszú vonalnak a negyedrendű színeképben keletkező képével!

**Megoldás:**

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$$

$$d_1 \cdot \sin \Theta_1 = 2 \cdot \lambda_1$$



$$d_2 \cdot \sin \Theta_2 = 4 \cdot 4861 \text{ nm}$$

$$d_1 = d_2 \rightarrow \Theta_1 = \Theta_2$$

## 16. előadás

### Zárthelyi

Az előadás elmaradt, ugyanis ezen az órán íródott a zárthelyi.

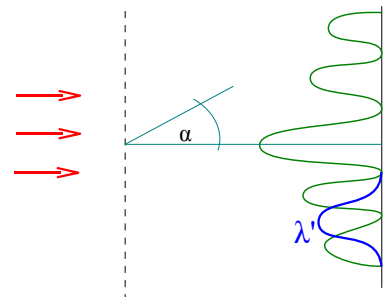
## 17. előadás

### Optikai rácsok

Bizonyítható, hogy az intenzitás rács esetén:  $I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{n \cdot \phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$ , ahol  $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \Theta$ .

#### A rács felbontása:

Az  $m$ -ed rendű színekben a  $\lambda$  hullámhosszúságú spektrum vonalat akkor tekintjük megkülönböztethetőnek a  $\lambda'$  hullámhosszúságútól, ha a  $\lambda'$ -nek megfelelő főmaximum azonos irányban található a  $\lambda$ -hoz tartozó főmaximum szomszédos minimumaival. ( $m \neq 0$ )



$$\frac{n \cdot \phi}{2} = \frac{n}{2} 2 \cdot \pi \cdot m + \pi \quad (\text{a szomszédos minimumot adja})$$

$$\phi = m \cdot 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{n}$$

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda + \frac{\lambda}{n}$$

$$m \cdot \lambda' = m \cdot \lambda + \frac{\lambda}{n}$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{m \cdot n}$$

$$\text{Felbontóképesség: } F := \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = m \cdot n \quad (m \neq 0)$$

**Pl.:** Na esetén 2 hullámhossz : 589nm és 589.6nm

$$F \approx \frac{600}{0,6} = 1000 = m \cdot n$$

Tehát ha ezt a két hullámhosszot első rendben meg akarjuk különböztetni  $n = 1000$  karcolás szükséges.

**Diszperzió (rácsnál):**

$$D := \frac{d\Theta}{d\lambda}$$

$$d \cdot \sin \Theta = m \cdot \lambda$$

$$\sin \Theta = \left(\frac{m}{d}\right) \lambda \quad \frac{d}{d\lambda}$$

$$\cos \Theta \cdot \frac{d\Theta}{d\lambda} = \frac{m}{d} \Rightarrow D = \frac{m}{d \cdot \cos \Theta}$$

**A röntgen-diffrakció**

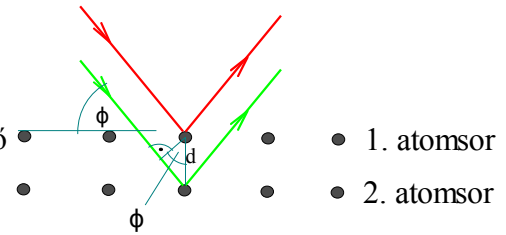
(Max von Laue 1912)

A kristályok rácsállandója legalább néhány Å.

Bragg feltétel:  $2 \cdot d \cdot \sin \Phi = m \cdot \lambda$ , ennek megfelelő

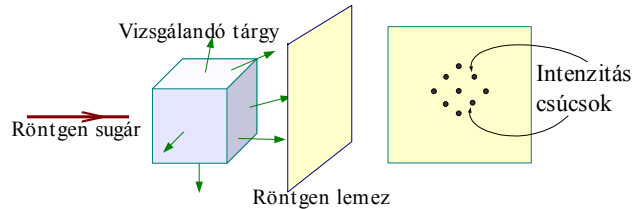
$\Phi$  irányban intenzitásmaximumok jelennek meg.

Intenzitáseloszlás 3D rácsszerkezet.



**Röntgendiffrakciós módszerek**

- egykristály módszere
- forgókristályos módszer
- per módszer

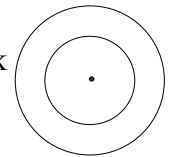


**Fresnel diffrakció**

(kőralakú nyílások és akadályok)

**Kőralakú kicsiny lyukon** a pozíciótól függően világos és sötét folt jelenik meg az ernyő közepén.

**Kicsiny kőralakú akadálynál** mindig világos folt lesz „középen”.

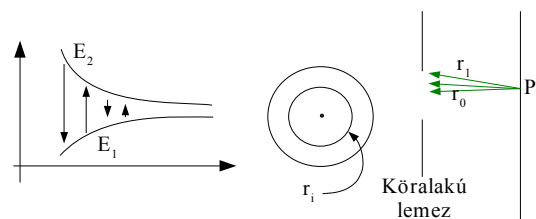


**Fresnel -féle zónalemez**

$$r_0; r_0 + \frac{\lambda}{2}; r_0 + 2 \cdot \frac{\lambda}{2}; r_0 + 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

A szomszédos zónák területe közel azonos.

**Eredő:**  $\frac{E_1}{2} = E$  (zónalemez nélkül)



Ha akadállyal a középső zónákból takarunk ki néhányat, akkor a többi zónából mindig jut fény a P pontba.

**Fresnel zónalemez:** ha minden második zónát átlátszatlaná tesszük, akkor a fényintenzitás a zónalemez mögött nagymértékben megnövekszik. Ilyenkor:

$$E = x \cdot E_1 \quad x \text{ a gyűrűk száma} \Rightarrow I = x^2 \cdot E_1 \quad \frac{I_1}{I_2} = x^2 \cdot 4$$

## 8. gyakorlat

### Segítség a feladatok megoldásához

(mivel ez az anyag még nem volt előadáson)

#### Galilei-Newton transzformáció

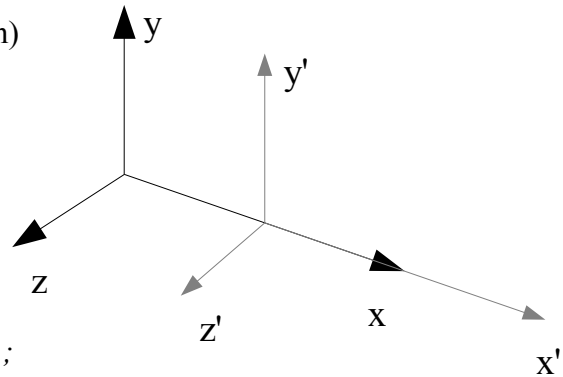
$$x = x' + v \cdot t; y = y'; z = z'; t = t';$$

$$x' = x - v \cdot t; y' = y; z' = z; t' = t;$$

#### Lorentz -féle transzformáció

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; y' = y; z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$x = \frac{x + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; y = y'; z = z', t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$



#### Hosszkontrakció

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

#### Idődilatáció

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

### Első feladat (sorszám ismeretlen)

Használjuk időmérésre a következő periodikus folyamatot: egy fényjel tükröződik a fényjel mozgására merőleges,  $l$  hosszúságú rúd két végére rögzített tükrökön. Egy periódus a fényjel oda-vissza haladásának felel meg, ez a fényóra legyen nyugalomban a  $k'$  rendszerben és legyen a rúd merőleges a  $k'$  mozgásának irányára. Használjuk fel a fénysebesség állandóságára vonatkozó posztulátumot és mutassuk meg, hogyan fejezhető ki a  $T'$  időintervallum segítségével!

#### Megoldás

$k'$ -ben a mozgásra merőleges távolságok megegyeznek ( $l = l'$ ).  $k'$ -ben az un. saját koordináta rendszerben:  $T' = 2 \frac{l}{c}$  és K-ban  $\Delta x = v \cdot T$ .

$$T = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}}{c} = \sqrt{\left(\frac{2l}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2} = \sqrt{T'^2 + \left(\frac{vT}{c}\right)^2}$$

$$T^2 \Rightarrow T'^2 + \left(\frac{vT}{c}\right)^2 = T^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad T' = T \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

**Második feladat (sorszám ismeretlen)**

Az atmoszféra felső rétegében müön keletkezik, ami  $v=0,9998 c$  sebességgel mozog, a bomlásig 60 km-t tesz meg.

- Milyen müön élettartamot tapasztalunk a Földön?
- Milyen vastagságúnak érzékeli a müön a saját koordináta rendszerében az atmoszférát?

**Megoldás**

A Földön tapasztalt müön élettartam:  $T = \frac{s}{t} = \frac{60}{0,9998 * 3 * 10^8} = 2 * 10^{-4} s$ .

A müön az atmoszférát  $l = l \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1,2 km$  vastagságúnak érzékeli, útját pedig

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 4 * 10^{-4} s \quad \text{időtartamúnak.}$$

**Harmadik feladat (sorszám ismeretlen)**

Két elektronnyaláb egymással szemben repül egyaránt  $v=0.9 c$  sebességgel a Földhöz képest. Mekkora az elektronok relatív sebessége?

**Megoldás**

$$U_x = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'k}$$

$k'$ -ben a részecske  $u'$  sebességgel mozog,  $k$ -ban pedig  $x$  irányba  $v$  se-

bességgel. Az elektron ( $k$ ) sebessége  $-0,9 c$ , a másiké ( $k'$ )  $-0,9 c$ , így az adatokat behelyettesítve:

$$U_x = \frac{(-0,9 c) + (-0,9 c)}{1 + \frac{(-0,9 c)}{c^2} (-0,9 c)} = 0,9994 c$$

**18. előadás**

**Holográfia**

**A zónalemez**

A zónalemez lencseként működik, mert a párhuzamos nyalábot egy  $r$  távolságban lévő középpontba gyűjti össze.

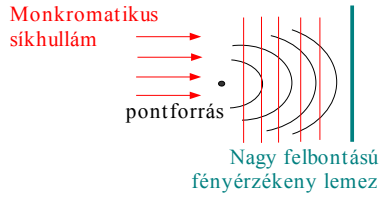
**Holográfia**

A holográfia (Gábor Dénes 1948)

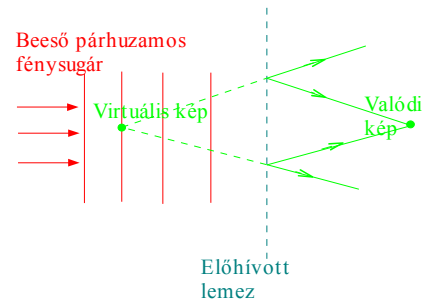
Gábor Dénes az elektron-holográfiát dolgozta ki. Ezért 1971-ben kapott Nobel-díjat.

## Hologram

Nem csak az intenzitáseloszlást, hanem a fáziseloszlást is rögzíti a fotólemezen.

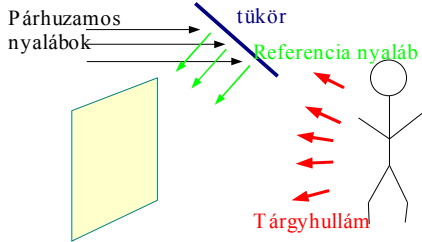


A fázist úgy rögzítik, hogy interferenciát hoznak létre egy adott helyen (a fotólemezen).



A referencia nyaláb és a tárgy hullám azonos fény-

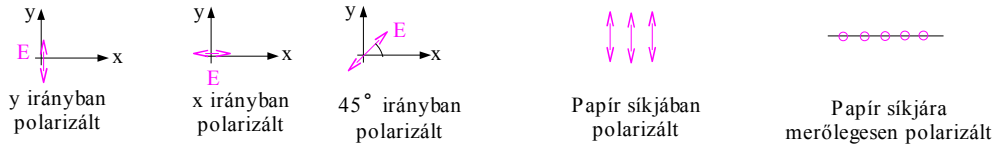
forrásból származik, így jöhet létre interferencia.



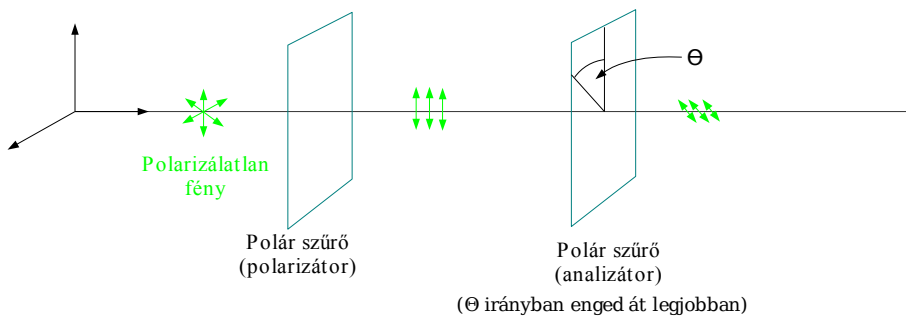
A hologram egy részéből is lehet a 3D képet reprodukálni, de romlik a minőség.

## A poláros fény

Az elektromágneses hullám transzverzális. Az elektromágneses hullám polarizációjának irányát az elektromágneses térerősség vektorának irányával vesszük azonosnak.



Általában a látható fény nem polarizált. Az atomok véletlenszerű sugárzása polarizált lesz. A villamos térerősség vektor iránya és fázisa is véletlenszerű. Egyes anyagok nem ilyenek.



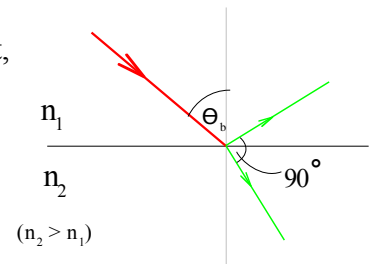
**Polarizáció visszaverődéskor és szórásakor**

Brewster törvénye (1812):

Dielektrikum határán a visszaverődő fény 100%-ban polarizált,

$$\text{ha } \tan \Theta_b = \frac{n_2}{n_1}$$

(A visszavert fény és a tört fénysugár 90°-os szöget zár be.)



A nem polarizált fény két inkoherens térerősségből tevődik össze, amelyek merőleges egymásra. Az anyagba behatoló fény az elektronokat (töltéseket) 2 egymásra merőleges irányban készíti rezgésre. De a felgyorsított elektronok nem sugároznak a gyorsítás irányában. Ebből következik, hogy az elektron rezgések az ábra síkjában lévő komponense nem sugározhat a visszavert sugár irányában.

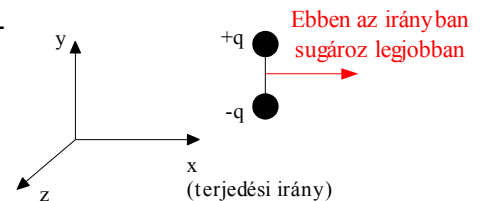
**19. előadás**

**A szórt fény polarizációja**

±y tengely irányába csak ±z irányú elektronok mozgásából jön létre sugárzás.

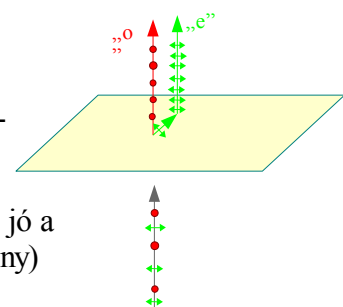
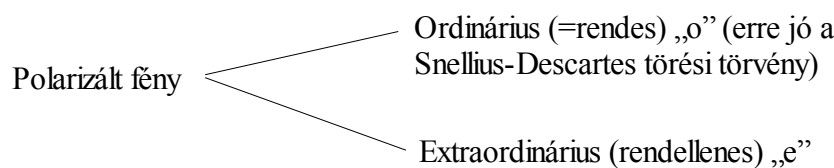
±y tengely irányú elektron mozgás ±z irányú sugárzást hoz létre.

X irányra merőlegesen nézve érzékelhetjük az y illetve z irányú polarizációt.



**Kettős törés**

Optikailag vannak izotróp és anizotróp anyagok. Anizotróp anyag esetén polarizáció irányától függően két törémtatójuk van. (Kettős törő az optikailag anizotrop anyag, például: kalcit, kvarc, jég.)

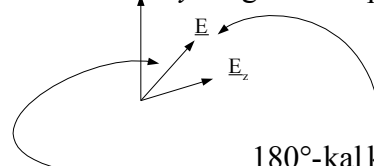
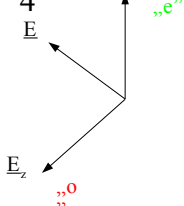


**A fáziseltoló lemezek**

„o” és „e” sugarak terjedési sebessége általában különböző.

Essen lineárisan polarizált fény kettős törő anyagra!

$\frac{\lambda}{4}$ -es lemeznél az Ez 90°-kal késik az Ey rezgéshez képest. Ennek eredményeképpen

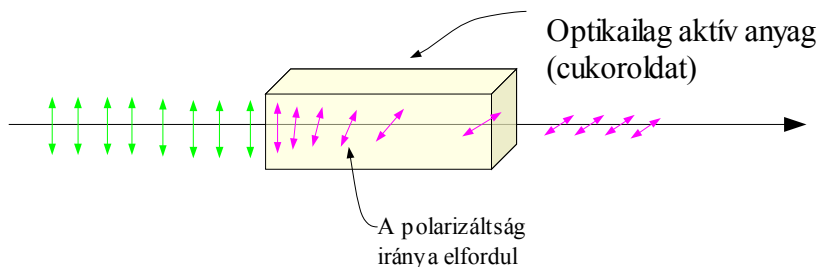


180°-kal késik az „o” sugár

Az eredeti E 90°-kal fordul el (Ez nevezik  $\lambda/2$ -es fázistoló lemezeknek)

## Az optikai aktivitás

(Például cukoroldatok)

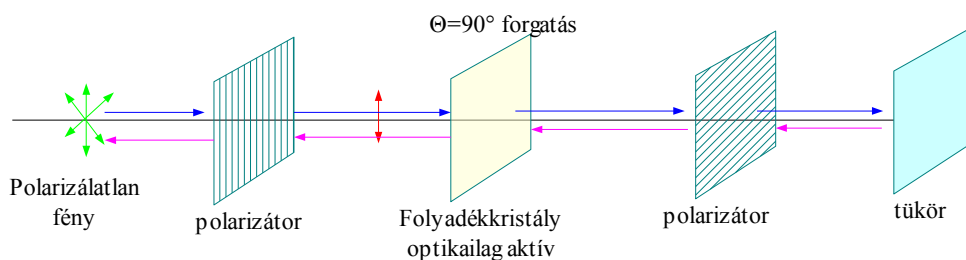


## Fotoelasztikus anyag

Mechanikai feszültség hatására kettős törő lesz. Tehát a mechanikai feszültség eloszlása befolyásolja a törésmutató eloszlását. A törésmutató eloszlás pedig a fehér fény törését befolyásolja, ennek eredményeképpen két polarizátor lemez közé helyezve például egy fröccs öntött műanyagvonalzót a színeloszlás mechanikai feszültségeloszlással hozható összefüggésbe.

## Optikai aktivitás alkalmazása

LCD ( Liquid Crystal Display)

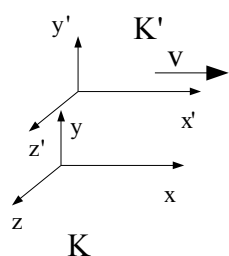


Ha a folyadékkristályra feszültséget kapcsolunk, akkor nem „forgat”, és nem jut el a fény a tükörhöz a második polarizátor miatt.

Gyakorlati megvalósítás: sűrűn elhelyezett elektróda pontok vákuum párologtatással. A folyadékkristály fáziseltoló  $U=0$  esetén, ha  $U \neq 0$ , akkor elveszti aktivitását.

## Relativitáselmélet

### Galilei-transzformáció



$K, K'$  inercia rendszerek

$$\begin{aligned}x &= x' + v \cdot z' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'\end{aligned}$$

### Galilei relativitás elve

Newton mechanikájának törvényei minden inercia rendszerben ugyanolyanok.

Ha  $K'$ -ben  $u'$  sebességgel mozog  $x'$  irányban egy tömegpont, akkor:  $u = u' + v$  (sebességösszeadás)

gyorsulás:  $a = a'$

**Speciális relativitáselmélet alapjai:**

- 1) Minden fizikai törvénynek ugyanaz az alakja minden inercia rendszerben. (Relativitás elve)
- 2) A vákuumbeli fénysebesség értéke ugyanaz minden inercia rendszerben. (Fénysebesség állandóságának elve)

**9. gyakorlat**

**Első feladat (5.09)**

Két  $l_0$  nyugalmi hosszúságú mérőrúd egymással szemben halad azonos nagyságú  $v$  sebességgel. Milyen hosszúnak mérik az egyik rudat a másik inerciarendszerében?

**Megoldás**

$$vx = \frac{vx' + v}{1 + \frac{v}{c^2} vx'} = \frac{-v(-v)}{1 + \frac{(-v)*(-v)}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = v(rel)$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{2vc^2}{c^2 + v^2}} = l_0 \sqrt{1 - \frac{4v^2 * c^2}{(c^2 - v^2)^2}} = l_0 \sqrt{\frac{c^4 + 2c^2 v^2 + v^4 - 4c^2 v^2}{(c^2 - v^2)^2}} = l_0 \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2}$$

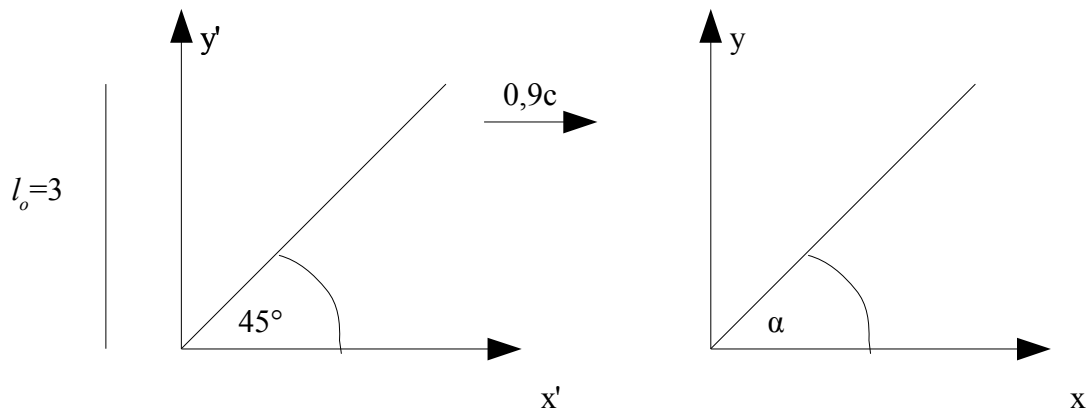
**Második feladat (5.11)**

A  $K$  inerciarendszerhez képest  $0.9c$  sebességgel mozog egy megfigyelő, akinek  $K'$  koordináta rendszerében  $3 m$  hosszúságú rúd az  $x'$  és  $y'$  tengelyekkel egyaránt  $45^\circ$  szöget zár be,  $K'$  a pozitív  $x$  tengely irányában halad.

- Mekkora méri a rúd és az  $x$  tengely közti szöget a  $K$ -beli megfigyelő?
- Mekkora méri a rúd hosszát a  $K$  rendszerbeli megfigyelő?
- Mekkora méri a rúd és az  $x''$  tengely közti szöget a  $K''$ -beli megfigyelő, aki a  $K$  rendszerhez képest  $v = 0.7c$  sebességgel mozog  $K'$ -vel ellenkező irányba?



**Ábra**



**Megoldás**

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{4.5 (1 - 0.9c)^2} = 0.925 \text{ m}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin 45^\circ * l_0}{\cos 45^\circ * l_0 * \sqrt{(1 - 0.9)^2}} \rightarrow \alpha = 66.4^\circ, \text{ azaz a megfigyelő } \alpha = 66.4^\circ \text{-nek méri}$$

a rúd és az  $x$  tengely által bezárt szöget.

A rúd hosszát a  $K$  rendszerbeli megfigyelő  $\sqrt{2,12^2 + 0,925^2} = 2,314 \text{ m}$ -nek méri.

$K''$ -ből nézve:

$$v = \frac{0,7c + 0,9c}{1 + 0,7 * 0,9} = \frac{1,6}{1,63} c$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin 45^\circ * l_0}{\cos 45^\circ * l_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1,6}{1,63}\right)^2}} = 79,79^\circ$$

### Harmadik feladat (5.12)

Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan koordinátarendszer, melyből két eseményt szemlélve (az egyik kiváltója a másiknak) az ok-okozat időbeli sorrendje megváltozhat!

**Megoldás**

$\Delta t = t_2 - t_1$ : a két esemény közti idő

$\Delta x = x_2 - x_1$

$v_{@}$  legyen a határsebesség

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ha az ok-okozat sorrendje megfordul, akkor  $\Delta t' < 0$

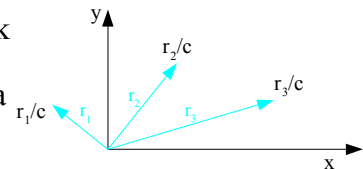
$\frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{v}{c^2} < 0$  ebből  $\frac{1}{v_{@}} < \frac{v}{c^2}$  amiből az következik, hogy  $v_{@} > \frac{c^2}{v}$  ebből adódik, hogy  $v_{@} > c$ , ami lehetetlen, vagyis ilyen koordináta-rendszer nem létezik.

## 20. előadás

### Relativitás-elmélet

#### Órák szinkronizálása

Az órákat beállítjuk az  $\frac{r}{c}$  időpontra. Az origóból elindítunk egy fényjelet, és az egyes órákat akkor indítjuk el, amikor a fényjel megérkezett az adott óra helyére.



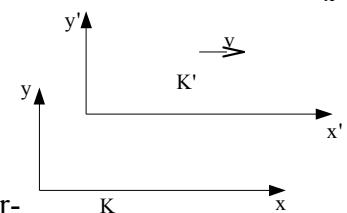
#### Lorentz-transzformáció

$$K \rightarrow K'$$

$$x \parallel x'$$

$$y \parallel y'$$

Maxwell egyenletek transzformációja egyik inerciarendszerből a másik inerciarendszerbe  $\rightarrow$  változatlan alak.



$$x = \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta := \frac{v}{c} \quad \beta := \frac{v}{c}$$

$$z = z' ; y = y' \quad z = z' ; y = y'$$

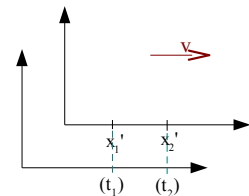
$$t = \frac{t' + \frac{v \cdot x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t = \frac{t - \frac{v \cdot x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

#### Az órák összeigazítása

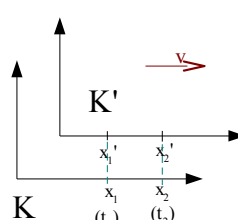
Mozgó óra járása:  $T = t_2 - t_1 = \frac{\left(t_2' + \frac{v \cdot x_2'}{c^2}\right) - \left(t_1' + \frac{v \cdot x_1'}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

Legyen  $x_1' = x_2'$ . Ekkor:  $T' = t_2' - t_1'$ .  $K'$ -ben egy álló óra.

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \text{ ahol } T_0 \text{ a saját idő.}$$



### A mozgás irányával párhuzamos hosszmerések összehasonlítása



$$L' = x_2' - x_1'$$

$$L_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - (v \cdot t_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{x_1 - (v \cdot t_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \stackrel{t_1 = t_2}{=} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad \leftarrow \text{hossz kontrakció}$$

↖ nyugalmi hossz

A nyugalmi hosszat „méterrúddal” mérjük.

Mozgási hossz méréséhez x tengely mentén szinkronizált órák kellene és például  $x_1$  helyen mérik a rúd végének megjelenését ( $t_1$ ) az összes többi óra a rúd elejének megjelenését méri. Legyen  $x_2$  az a hely, ahol  $t_2 = t_1$ . Ezután  $x_2$  és  $x_1$  távolságát „méterrúddal” lemérjük. Ez lesz a mozgási hossz.

**Nyugalmi hossz:** a hossz meghatározás eredménye olyan inerciarendszerben, amelyben a tárgy nyugalomban van (méterrudas módszerrel).

**Sajátidő** vagy **sajátidőintervallum:** két esemény időtartam mérésének eredménye olyan inerciarendszerben, amelyben a két esemény azonos helyen ment végbe (egyetlen órával mérünk).

### A relativisztikus impulzus

Definiáljuk a sebességet magának a mozgó testnek  $\Delta\tau$  sajátidejével, azzal az idővel,

amit a testhez rögzített óra mér.  $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ , ahol  $\Delta t$  a megfigyelő által mért idő.

$$\frac{\Delta}{\Delta\tau} = \frac{\Delta y}{\Delta t \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Általánosítva, „ $m$ ”-mel (tömeg) szorozva: 
$$P = \frac{m \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Ha  $u \ll c$ , akkor  $P = mu$ . Ha  $u \rightarrow c$ , akkor  $P \rightarrow \infty$  (egyre jobban eltér a klasszikus értéktől).

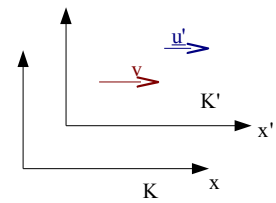
$$P = \frac{m_0 \cdot u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_{\text{relativisztikus}} \cdot u \quad \Rightarrow \quad m_{\text{relativisztikus}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

A négyzetgyökös kifejezés a tér és az idő, és nem a tömeg transzformációs tulajdonságainak a következménye. A relativisztikus elmélet megváltoztatta a térre és az időre vonatkozó fogalmainkat. Ez érinti a dinamikai mennyiségeket is (például: impulzus, tömeg).

### A relativisztikus sebesség összeadás

$K'$   $K$ -hoz képest  $v$  sebességgel mozog. A részecske  $K'$ -ben  $u'$ -vel mozog.  $K$ -ban  $u$ -val mozog a részecske.

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\left( \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)}{\left( \frac{t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)} = \frac{t' (u' + v)}{t' \left( 1 + \frac{u' \cdot v}{c^2} \right)} \rightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}}$$



Ha  $u', v \ll c \rightarrow u = u' + v$ .

## 21. előadás

### A relativisztikus energia

#### Munkatétel

Az  $F$  erő által végzett munka egyenlő a részecske mozgási energiájának növekedésével.

Tegyük fel, hogy nyugalomból indul a részecske.

$$K = \int_0^P F dx; \quad F = \frac{dP}{dt}; \quad v = \frac{dx}{dt}; \quad P = \frac{m \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow v = \frac{\frac{P}{m}}{\sqrt{1 + \left( \frac{P}{m \cdot c} \right)^2}}$$

$$K = \int_0^t \frac{dP}{dt} v dt = \int_0^P v dt = \int_0^P \frac{\frac{P}{m}}{\sqrt{1 + \left( \frac{P}{m \cdot c} \right)^2}} dP$$

$$\text{integrálással: } K = m \cdot c^2 \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{P}{m \cdot c} \right)^2} - 1 \right] = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}} - m \cdot c^2$$

$$\text{Kis sebességeknél: } \frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$K \approx m \cdot c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

#### Nyugalmi energia

$$E_0 = m \cdot c^2$$

ez a **tömeg-energia ekvivalencia**: az  $m$  tömeg és az  $E_0$  energia egyenértékűsége.

**Példa**

Hasadó urán atommag esetén 2 atommag + 2-3 neutron keletkezik. A keletkezett részecskék tömegének összege < az urán atom tömegénél. Ez a különbség a **tömegdefektus**, ami mozgási energiává alakult.

**Párlétes:** nagy energiájú foton  $\rightarrow e_- + e_+ + E_{\text{mozgási}}$

**A teljes relativisztikus energia**

$$E = m \cdot c^2 + K = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

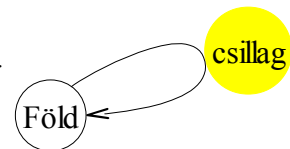
**A mozgó órák aszinkronitása**

Az egyidejűségnek nincs rendszertől független jellege, nincs abszolút idő.  $K'$ -ben szinkronizált órák  $K$ -ban nem látszanak szinkronizáltak.

$$\left( t = \frac{t' + \frac{v \cdot x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v \cdot \Delta x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

**Ikerparadoxon**

Péter és Pál ikrek. Pál visszatérésekor Pál fiatalabb lesz Péternél. Mivel nem szimmetrikus az elrendezés (mert Pál gyorsul is), ezért igaz az állítás.

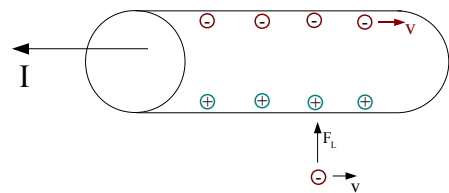


**A relativisztikus elmélet és az elektromágnesesség**

**$K$  vezetőhöz rögzített inerciarendszer**

$$\underline{F}_L = Q \cdot (\underline{v} \times \underline{B})$$

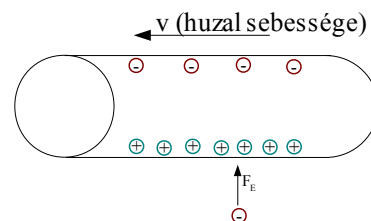
Mérések: ebben az esetben elektrosztatikus erő nem hat.



**$K'$  sodródó elektronokhoz rögzített inerciarendszer**

A pozitív töltések távolsága csökken a hosszkontrakció miatt. Ezért többlet töltés „jelentkezik” ami vonzást gyakorol a negatív töltésre.

Pontos számítások alapján:  $\underline{F}_L = \underline{F}_E$



**Az általános relativitáselmélet**

- A természet törvényei megfogalmazhatóak úgy, hogy tetszőleges tér-idő vonatkoztatási rendszerben bármely megfigyelő szerint azonos matematikai alakúak legyenek, akár gyorsul a vonatkoztatási rendszer akár nem. (**Kovariencia elv**)

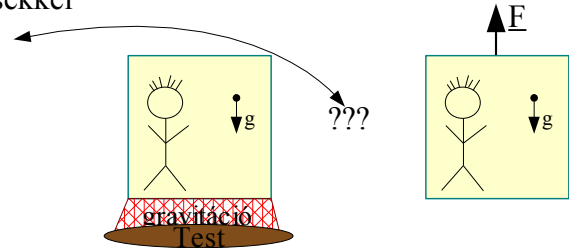
- Tetszőleges pont közelében a gravitációs tér minden tekintetben egyenértékű egy olyan gyorsuló vonatkoztatási rendszerrel, amelyben nincs gravitáció. (**Ekvivalencia elv**)

### **Súlyos és tehetetlen tömeg hányadosa**

A súlyos és tehetetlen tömeg hányadosa állandó.  $\frac{m_g}{m_s} = \text{állandó}$

### **Probléma**

A megfigyelő nem tudja mechanikai mérésekkel sem eldönteni, hogy melyik eset történik.

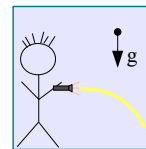


### **Jelenségek**

#### **Fényelhajlás**

Az elemlámpa fénye elhajlik.

Pl: a gravitáció „elhajlítja” a fény „egyenes” útját.



#### **A vöröseltolódás**

A gravitáció hatására a színek vonalak eltolódnak a nagyobb hullámhossz felé. Ennek következménye, hogy a gravitációs térbe helyezett óra lassabban jár.

#### **Téridő görbülete**

A tömeg megmondja a téridőnek, hogyan görbüljön, a görbült téridő pedig megmondja a tömegpontnak, hogyan mozogjon.

#### **Feketelyuk**

végtelen görbület (szingularitás a téridőben)

## **10. gyakorlat**

### **Segítség a feladatok megoldásához**

Planck állandó:  $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \frac{J}{s}$

Az energiát a kvantummechanikai feladatok esetén elektronvoltban mérjük,

$1 eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$ .

A fény hullámhossza:  $f = \frac{c}{\lambda}$ .

Kilépő fotonok energiája:  $E_m = h \cdot f$ .

Pontosabban:  $h \cdot f = W_{ki} + \frac{1}{2} m \cdot v^2$  ( $W_{ki}$  a kilépési munka, az összeg másik oldala a kilépő foton kinetikus energiája).

### **Első feladat (413)**

A fotoeffektus küszöbértéke kálium esetén  $\lambda = 577 \mu m$  hullámhossznak felel meg. Mekkora a fénykvantumnak az elektron kiszabadításához szükséges minimális energiája az adott fém esetén?

#### **Megoldás**

$E = h \frac{c}{\lambda}$ . Behelyettesítve a képletbe:  $E = 2.145 eV$  adódik.

### **Második feladat (414)**

Egyedülálló rézgömböt  $\lambda = 0.2 \mu m$  hullámhosszú monokromatikus fényvel világítunk meg. Mekkora maximális potenciálra töltődik fel a rézgömb fotoelektronok kilépése révén? (A réz kilépési munkája:  $W_{ki} = 4.47 eV$ )

#### **Megoldás**

$$E = h \cdot f = W_{ki} + \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow E_m = h \cdot f - W_{ki} \rightarrow E_m = \frac{h c}{\lambda} - W_{ki} = 1.72 eV$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \cdot u \rightarrow u = 1.72 V.$$

### **Harmadik feladat (416)**

Valamely fémre  $\lambda_1 = 2790 \text{ \AA}$  és  $\lambda_2 = 2450 \text{ \AA}$  hullámhosszúságú fényvel világítunk meg. A fékező feszültség megfelelően  $u_1 = 0.66 V$  és  $u_2 = 1.26 V$ . Az elektron töltése és a fénysebesség ismert. Határozzuk meg a Planck-állandót és az adott fém kilépési munkáját!

#### **Megoldás**

Az előbbi feladatból  $\frac{1}{2} m v^2 = q \cdot u$ , így felírhatunk két egyenletet, két ismeretlennel:

$$h \frac{c}{\lambda_1} = W_{ki} + u_1 q$$

$$h \frac{c}{\lambda_2} = W_{ki} + u_2 q$$

Az egyenletrendszer megoldva  $h = 6.4 \cdot 10^{-34} \frac{J}{s}$  adódik, a kilépési munkára pedig

$$W_{ki} = 3.6 eV.$$

### **Negyedik feladat (417)**

A  $\lambda = 342 \text{ \AA}$  hullámhosszúságú fotonok elektronokat váltanak ki fémes lítium felületéről. A környező mágneses erőterben a fotoelektronok  $r = 1.2 cm$  sugarú körpályát ír-

nak le. (A mágneses erőter indukciója  $B = 1015 \frac{Vs}{m^2}$ . Mekkora energia fordítódik egy elektronnak a lítium atomból való kiszabadítására?)

**Megoldás**

A feladatot nem fejeztük be az órán, a megoldás elvi menete

$$m \frac{v^2}{r} = q v b$$

$$v = \frac{q B r}{m}$$

$$W_{ki} = h \frac{c}{\lambda} - \frac{1}{2} m \frac{q^2 B^2 r^2}{m^2} = h \frac{c}{\lambda} - \frac{(q B r)^2}{2m}$$

**22. előadás**

---

**23. előadás**

---

**11. gyakorlat**

---

**Első feladat (422)**

A Compton-féle hullámhosszváltozás  $\lambda = 0.1 \text{ \AA}$  eredeti hullámhosszú röntgensugarak esetén  $\lambda' = 0.024 \text{ \AA}$ . Határozzuk meg a fotonok szóródási szögét és a megütött elektronnak átadott energiát!

**Megoldás**

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m c} (1 - \cos \Theta)$$

Tudjuk, hogy  $\lambda - \lambda' = 0,024 \text{ \AA}$  és  $\frac{h}{m c}$  jelöli a Compton-hullámhosszat, ez

$$\lambda' = 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \text{ és mivel } 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} \text{ ezért:}$$

$$1 = \cos \Theta \text{ amiből } \Theta = 90^\circ .$$

**Második feladat (423)**

A beeső foton hullámhossza  $\lambda = 0.03 \text{ \AA}$ . Mekkora energiára tesz szert a Compton-szórás során megütött elektron  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  és  $180^\circ$  szórási szögeknél?

**Megoldás**

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m c} (1 - \cos \Theta) \text{ a képlet adott, } \lambda = 0,03 \text{ \AA} , \text{ a kérdés } \lambda' \text{ energiaváltozása:}$$

$$\Delta E = h * c \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) . \text{ Ebből:}$$

$$\Theta = 60^\circ \rightarrow \lambda' = 4,2 \cdot 10^{-12} \rightarrow \Delta E = 120 \text{ keV}$$



$$\Theta = 90^\circ \rightarrow \lambda' = 5,4 \cdot 10^{-12} \rightarrow \Delta E = 185 \text{ keV}$$

$$\Theta = 60^\circ \rightarrow \lambda' = 7,8 \cdot 10^{-12} \rightarrow \Delta E = 256 \text{ keV}$$

### Harmadik feladat (437)

Határozzuk meg az elektron 3 Bohr-féle pályájának sugarát!

#### Megoldás

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{m \cdot k \cdot e^2} \text{ és } r_n = n^2 \cdot r_1 \text{ Képletet használva, } r_1 = 0,526 \text{ \AA}, r_2 = 2 \text{ \AA} \text{ és } r_3 = 4,7 \text{ \AA}.$$

### Negyedik feladat (447)

Számítsuk ki, hány-szorosára növekszik a hidrogénatomban az alapállapotban levő elektron pályájának sugara, ha az atomot  $12,09 \text{ eV}$ -os energiakvantummal gerjesztjük!

#### Megoldás

$$\text{Az } E_1 = \frac{-\hbar^2}{2m \cdot k \cdot r_1^2} \text{ és } E_n = \frac{1}{n^2} E_1 \text{ képletek adottak, az elsőbe behelyettesítve kapjuk az}$$

első gerjesztési potenciált:  $E = -13,6 \text{ eV}$  és  $\Delta E = 12,09 \text{ eV}$  így az  $n$ . energiaszint energiája:  $E_n = E_1 + \Delta E = -1,51 \text{ eV}$ , most a második képletet alkalmazzuk:

$$E_n = \frac{1}{n^2} E_1 \text{ ebből } n=3, \text{ és mivel } r_n = n^2 \cdot r_1 \text{ ezért } r_n = 9 \cdot r_1.$$

### Ötödik feladat (454)

Határozzuk meg a hidrogénatom első gerjesztési potenciálját és ionizációs potenciálját!

#### Megoldás

Az első gerjesztési potenciált az előző feladatban meghatároztuk:  $E = -13,6 \text{ eV}$ .

Az ionizációs potenciál esetén  $n=2$ , ebből:

$$E_n = \frac{1}{n^2} E_1 = \frac{1}{2^2} 13,6 = -3,4 \text{ eV}.$$

### Hatodik feladat (488)

Határozzuk meg az  $U$  potenciálkülönbséggel gyorsított elektronhoz és protonhoz rendelhető de Broglie-féle hullámhosszt!

#### Megoldás

$$eU = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m} \text{ ebből } p = \sqrt{2meU} \text{ és } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \text{ Ezt felhasználva:}$$

$$\lambda_e = 1,225 \text{ \AA}, \text{ és } \lambda_p = 0,0286 \text{ \AA}.$$

## 24. előadás

## 25. előadás

### 12. gyakorlat

#### **Első feladat (sorszám ismeretlen)**

$r = 1 \text{ cm}$  sugarú, kör alakú tartományban a síkjára merőleges, homogén mágneses indukció  $\Delta B = 0.01 \text{ T}$ -val nő. Mekkora a kör középpontjától  $k = 2 \text{ cm}$ -re indukált villamos térerősség?

#### **Megoldás**

$$r = 1 \text{ cm}, k = 2 \text{ cm}.$$

$$\phi = \int B dA = r^2 \pi B$$

Ebből az indukált feszültség:

$$|U_i| = \left| \frac{\delta \phi}{\delta t} \right| = r^2 \pi \frac{\delta B}{\delta t} = (10^{-2})^2 \pi 0.01 = 10^{-6} \pi$$

Ugyanakkor:

$$U_i = \oint E ds, \text{ de } E \text{ és } ds \text{ párhuzamosak, ezért: } U_i = \int E ds = E \int ds = E 2r \pi, \text{ ebből:}$$

$$E = \frac{U_i}{2r \pi} = \frac{10^{-6} \pi}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \pi} = 2.5 \cdot 10^{-5} \frac{V}{m}.$$

#### **Második feladat (sorszám ismeretlen)**

Mekkora az ellenállása annak az  $A = 20 \text{ cm}^2$  területű fém karikának, amin  $B = 1 \text{ T}$  erősségű, síkjára merőleges mágneses indukciójú tér megszüntetésének a hatására  $Q = 1 \text{ mC}$  töltés haladt át?

#### **Megoldás**

$$A = 20 \text{ cm}^2, B = 1 \text{ T}, Q = 1 \text{ mC}$$

$$Q = \int I dt = \int \frac{U}{R} dt = \int -\frac{\delta \phi}{\delta t} \frac{1}{R} dt = -\frac{\phi_2 - \phi_1}{R} = \frac{\phi_1}{R}, \text{ ebből}$$

$$R = \frac{\phi_1}{Q} = \frac{20 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 2 \Omega$$

#### **Harmadik feladat (sorszám ismeretlen)**

Hosszú,  $2000 \frac{\text{menet}}{\text{méter}}$  sűrűségű, vasmagos szolenoidban  $I = 10 \text{ mA}$  áram halad át, a vas mágneses szuszceptibilitása ennél a gerjesztésnél 1000. Mekkora áramerősséggel lehetne elérni ugyanezt az indukciót vasmag nélkül?

**Megoldás**

$$N = 2000, I = 10 \text{ mA}, \chi = 1000.$$

$$B = \mu_0 \mu_r \left( \frac{NI}{l} \right) = \left( \frac{\mu_0 N}{l} \right) \mu_r I$$

$$\mu_r = \chi + 1 = 1001, \text{ ebből } \mu_r \cdot I = 1001 \cdot 10^{-2} = 10,01 \text{ A}.$$

**Negyedik feladat (sorszám ismeretlen)**

Mekkora a  $3800 \frac{\text{menet}}{\text{méter}}$  sűrűségű, hosszú szolenoid közepén a mágneses energiasűrűség, ha  $I = 4 \text{ A}$  áram halad át rajta?

**Megoldás**

$$N = 3800, I = 4 \text{ A}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{NI}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} (4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 3800^2 \cdot 4^2 = 145 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

**Ötödik feladat (sorszám ismeretlen)**

Mekkora a Poynting vektor átlagértéke abban a harmonikus elektromágneses hullámban, ahol az elektromágneses tér maximuma  $1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$  ?

**Megoldás**

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 E_{\text{max}}^2, S = W \cdot c = \frac{1}{2} 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,33 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

**Hatodik feladat (sorszám ismeretlen)**

$P = 100 \text{ mW}$  teljesítményű lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörrre?

**Megoldás**

$$P = 100 \text{ mW}$$

$$F = 2 \frac{P}{c} = \frac{2,01}{3 \cdot 10^8} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

**Hetedik feladat (sorszám ismeretlen)**

Két réses kísérletben  $\lambda = 480 \text{ nm}$  hullámhosszúságú fényt használunk. A rések távolsága  $d = 0,6 \text{ mm}$ , az ernyő  $l = 2 \text{ m}$ -re van a réstől, mekkora szomszédos fényes csíkok közti távolság?

**Megoldás**

$$l = 2 \text{ m}$$

$$d = 0,6 \text{ mm}$$

$d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda$  és nagyon kis szögeket feltételezve:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{l} \text{ ebből } x = \frac{m \cdot \lambda \cdot l}{d} = \frac{480 \cdot 10^{-9} \cdot 2}{0,6 \cdot 10^{-3}} = 1,6 \text{ mm} .$$

### **Nyolcadik feladat (sorszám ismeretlen)**

Ha a gőzlámpa sárga fényt bocsájt ki, ami két hullámhossznak felel meg:  $\lambda_1 = 589 \text{ nm}$  és  $\lambda_2 = 589,59 \text{ nm}$ . Legalább hány részből kell állnia a rácsnak, ami első rendben felbontja ezt a nátrium dublettet?

#### **Megoldás**

$$\lambda_1 = 589 \text{ nm} , \text{ és } \lambda_2 = 589,59 \text{ nm}$$

$$F = n \cdot m = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = 1000 . \text{ Ebből } n = 1000 , \text{ mert } m = 1 .$$

### **Kilencedik feladat (sorszám ismeretlen)**

Mekkora annak a kalcit lemeznek a minimum vastagsága, amely a sárga  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$  hullámhosszra nézve  $\frac{\lambda}{2}$ -es lemez? Az  $o$  és az  $e$  sugarak számára a törésmutatók  $n_o = 1,6584$  és  $n_e = 1,4864$ .

#### **Megoldás**

$$\frac{\lambda}{2} = dn_o - dn_e , \text{ ahol az egyenlet jobb oldalán a különbség az optikai úthossz.}$$

$$d = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{n_o - n_e} = \frac{589,3 \cdot 10^{-9}}{2(1,6584 - 1,4864)} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

## **26. előadás**

---

## **27. előadás**

---

## **28. előadás**

---