Vizsgadolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:

   (a) Legyen (X, Y) együttesen folytonos valószínűségi vektorváltozó. Hogyan definiáljuk az Y-nak az X-re vett feltételes sűrűségfüggvényét?

   (b) Legyen X egyszerű (diszkrét) valószínűségi változó, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ létezik. Fejezzük ki $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ értékét az X eloszlásának segítségével.

   (8 pont)
   $$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,u)\mathrm{d}u},$$
   (2 pont) olyan $x, y \in \mathbb{R}$ számokra értelmezve, amire $f_X(x) \neq 0$, és $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$ ha $f_X(x) = 0$. (jegyzet: 11.2.2)

   (10 pont)
   $$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in \mathrm{Ran}(X)} g(k) \cdot \mathbb{P}(X = k)$$
   (Ha a végtelen diszkrét esetre vonatkozó általánosabb formula van helyesen felírva, akkor is jár a pont.) (jegyzet: 4.3.5)

2. Egy csomag pisztáciában előfordulnak teljesen zárt magok, amiket nehéz kinyitni. Feltehetjük, hogy egy csomagban sok mag van, amelyek egymástól függetlenül, azonos, egyenként kis valószínűséggel lesznek zártak. Jelölje egy csomagban a zárt magok számát X. Tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 2) = 0{,}4$. Határozzuk meg $\mathrm{cov}(1 + 2X, 3X)$ értékét.

(2 pont) $X \sim \text{Pois}(\lambda)$
(1 pont) ahol $\lambda > 0$
(Ha később a számolás során fel van használva, hogy $\lambda > 0$, akkor is jár a pont.)
(2 pont) $\mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X\leq 2)}$, felhasználva, hogy $\{X = 0\} \cap \{X \leq 2\} = \{X = 0\}$
(2 pont) $\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$
(1 pont) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(X \leq 2) = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)e^{-\lambda}$,
(0 pont) és $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$
(1 pont) Visszahelyettesítve: $\mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 2) = \frac{e^{-\lambda}}{\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)e^{-\lambda}}$
(2 pont) A feltétel szerint $0{,}4 = \mathbb{P}(X = 0 \mid X \leq 2) = \frac{1}{1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}}$, amit megoldva: $\lambda \in \{-3, 1\}$
(1 pont) de $\lambda > 0$, ezért $\lambda = 1$.
(1 pont) $\text{cov}(1 + 2X, 3X) = \text{cov}(2X, 3X)$
(2 pont) $= 2 \cdot 3 \cdot \text{cov}(X, X)$
(1 pont) $= 6 \cdot \mathbb{D}^2(X)$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \lambda = 1$
(1 pont) Tehát $\text{cov}(1 + 2X, 3X) = \underline{\underline{6}}$

3. Egy cég vásárol 90 darab izzót az iroda világításához. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama (években számolva) $\text{Exp}(\frac{1}{\sqrt{10}})$ eloszlású, és az izzók élettartamai egymástól függetlenek.

   (a) Közelítőleg milyen z pozitív valós számra teljesül, hogy 3% valószínűséggel az izzók összes élettartama együttvéve legalább z?

   (b) Hogyan változna a fenti tulajdonsággal definiált z értéke, ha az izzók várható élettartama fél évvel megnőne, de a szórásuk nem változna. (Exponenciális eloszlást itt már nem tételezünk fel.)

(0 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{90}$ az egyes izzók élettartamát
(1 pont) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{90} X_i \geq z\right) = 0{,}03$
(2 pont) Komplementerre áttérve: $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{90} X_i < z\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{90} X_i \geq z\right) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \sqrt{10}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X_1) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = 10$, tehát $\mathbb{D}(X_1) = \sqrt{10}$
(3 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{90} X_i - 90 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{90}\sqrt{10}} < \frac{z - 90 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{90}\sqrt{10}}\right) = 0{,}97$$

(0 pont) Mivel X_i-k egymástól független, azonos eloszlású val. változók, ezért
(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(3 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{90} X_i - 90\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{90}\sqrt{10}}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(1 pont) Ezért $0{,}97 = \Phi\left(\frac{z-90\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{90}\sqrt{10}}\right)$
(1 pont) Φ értékét kikeresve: $\frac{z-90\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{90}\sqrt{10}} = 1{,}88$
(1 pont) Tehát $z = 1{,}88 \cdot \sqrt{90}\sqrt{10} + 90 \cdot \sqrt{10}$
(1 pont) $\approx \underline{\underline{341{,}005}}$
(1 pont) Ha a várható érték megnő 0,5-tel, akkor a sztenderdizált kifejezés:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{90} X_i - 90 \cdot (\sqrt{10} + 0{,}5)}{\sqrt{90}\sqrt{10}} < \frac{z - 90 \cdot (\sqrt{10} + 0{,}5)}{\sqrt{90}\sqrt{10}}\right)$$

(1 pont) A fenti számolással analóg módon kapjuk, hogy $z_{\text{új}} = z_{\text{régi}} + 90 \cdot 0{,}5$
(1 pont) $\approx \underline{\underline{386{,}005}}$

4. Legyen X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} \alpha x + \beta y & \text{ha } 0 < x < 2 \text{ és } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{1}{36}$. Határozzuk meg α és β értékét, továbbá a $\mathbb{P}(X < 1)$ valószínűséget.

(2 pont) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$
(2 pont) Tehát $\int_0^2 \int_0^2 (\alpha x + \beta y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 (\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 2y)\,\mathrm{d}y = 4(\alpha + \beta) = 1$
(1 pont) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(Ha implicit szerepel az összefüggés a konkrét behelyettesítéssel, akkor is jár a pont.)
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = \int_0^2 \int_0^2 xy \cdot (\alpha x + \beta y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \int_0^2 (\frac{2^3}{3}\alpha y + 2\beta y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3}(\alpha + \beta)$
(1 pont) $= \frac{4}{3}$ felhasználva, hogy $4(\alpha + \beta) = 1$.
(2 pont) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ és hasonlóan $\mathbb{E}(Y)$-ra
(Ha implicit szerepel az összefüggés a konkrét behelyettesítéssel, akkor is jár a pont.)
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 \int_0^2 x \cdot (\alpha x + \beta y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3}\alpha + 4\beta$
(0 pont) $= \frac{4}{3}\alpha + 1$ felhasználva, hogy $4(\alpha + \beta) = 1$.
(Ha $\mathbb{E}(X)$ kiszámolásához fel van használva $4(\alpha + \beta) = 1$, de $\mathbb{E}(XY)$-hoz nincs, akkor 1 pont.)
(1 pont) Hasonlóan, $\mathbb{E}(Y) = 4\alpha + \frac{16}{3}\beta = -\frac{4}{3}\alpha + \frac{4}{3}$
(1 pont) Visszahelyettesítve: $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\alpha + 1\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\alpha + \frac{4}{3}\right)$
(1 pont) Mivel $\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{1}{36}$, ezért α-ra megoldva: $\alpha = \frac{1}{8}$.
(1 pont) Ezért $\beta = \frac{1}{4} - \alpha = \frac{1}{8}$
(2 pont) $\mathbb{P}(X < 1) = \int_0^2 \int_0^1 (\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}y\right)\,\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{3}{8} \approx 0{,}375$ (Ha csak hányados, vagy csak tizedestört alakban van megadva a megoldás, akkor is jár a pont.)

5. Feldobunk egy pénzérmét 4-szer egymás után. Ha a dobások közt nincs két egymást követő fej, akkor nyertünk, egyébként vesztettünk. Feltesszük, hogy a dobások eredményei egymástól függetlenek.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy nyertünk, ha a pénzérménk p eséllyel mutat írás eredményt?

   (b) Egy rosszakarónk meg akarta cinkelni az érménket, de a módosítás nem sikerült jól. Így az írás eredmény valószínűsége egy véletlen mennyiség $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$ közt, jelölje ezt a valószínűséget U. Tegyük fel, hogy U egyenletes eloszlású az $[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}]$ intervallumon. Határozzuk meg, mekkora eséllyel nyerünk.

(3 pont) $\mathbb{P}(\text{nincs két egymást követő fej}) = \mathbb{P}(\text{nincs fej}) + \mathbb{P}(\text{egy fej}) + \mathbb{P}(FIFI \text{ vagy } FIIF \text{ vagy } IFIF)$
(p függvényében számolva a fentieket)
(3 pont) $= p^4 + 4p^3(1-p) + 3p^2(1-p)^2 = 3p^2 - 2p^3$
(Ha nincs felbontva a zárójel, illetve összevonva az eredmény, akkor is jár a pont.)
(3 pont) $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid U = x) f_U(x)\,\mathrm{d}x$
(3 pont) $f_U(x) = 2$ ha $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ és 0 egyébként
(2 pont) $\mathbb{P}(\text{nyertünk} \mid U = x) = 3x^2 - 2x^3$ a fenti számolás miatt
(3 pont) $\mathbb{P}(\text{nyertünk}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (3x^2 - 2x^3) \cdot 2\,\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \left[2x^3 - x^4\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4$
(1 pont) $= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

6.* Béla követőket gyűjt egy online platformon. Kezdetben 1000 követője van. Tegyük fel, hogy ez minden héten vagy 1,1-szeresére nő, vagy nem változik, vagy 0,9-szeresére csökken. Mindhárom kimenetel valószínűsége egyenként $\frac{1}{3}$. Az egyes hetek változásai egymástól függetlenek.

   (a) Határozzuk meg a követői számának várható értékét 104 hét (kb. két év) elteltével.

   (b) Közelítőleg mennyi az esélye, hogy Bélának kevesebb követője lesz 104 hét múlva, mint kezdetben?

(1 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{104}$ az egyes heti növekedési szorzókat (azaz X_i értéke 1,1 vagy 1 vagy 0,9)
(1 pont) $\mathbb{E}(1000 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_{104}) =?$
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ ha X és Y függetlenek
(Ha az állítás csak implicit van felhasználva a későbbiekben, akkor is jár a pont.)
(3 pont) Ezt iterálva: $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_{104}) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2)\ldots\mathbb{E}(X_{1000})$
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{\mathrm{Ran}(X_1)} k \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = 1{,}1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{3} = 1$
(1 pont) Tehát a keresett érték: $1000 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \underline{\underline{1000}}$
(1 pont) $\mathbb{P}(1000 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_{104} < 1000) =?$
(Ha 1000-es szorzó nélkül szerepel a kérdés, akkor ugyanúgy jár a pont.)
(2 pont) $\mathbb{P}(1000 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_{104} < 1000) = \mathbb{P}(\ln X_1 + \ln X_2 + \ldots + \ln X_{104} < 0)$
(0 pont) Jelölje $Y_i = \ln X_i$
(2 pont) Sztenderdizálva:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{104} Y_i - 104\,\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{104}\,\mathbb{D}(Y_1)} < \frac{-104\,\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{104}\,\mathbb{D}(Y_1)}\right)$$

(0 pont) Mivel Y_i-k egymástól független, azonos eloszlású val. változók, ezért
(2 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt $\frac{\sum_{i=1}^{104} Y_i - 104\,\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{104}\,\mathbb{D}(Y_1)}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(1 pont) Tehát a keresett mennyiség: $\Phi\left(\frac{-104\,\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{104}\,\mathbb{D}(Y_1)}\right)$
(1 pont) $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{3}(\ln 0{,}9 + \ln 1 + \ln 1{,}1) = -0{,}00335$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y_1) = \frac{1}{3}((\ln 0{,}9)^2 + (\ln 1)^2 + (\ln 1{,}1)^2) - (-0{,}00335)^2 = -0{,}0034 = 0{,}006717$
(0 pont) $\mathbb{D}(Y_1) = 0{,}082$
(1 pont) $\Phi\left(\frac{-104 \cdot (-0{,}00335)}{\sqrt{104} \cdot 0{,}082}\right) \approx \Phi(0{,}42) \approx \underline{\underline{0{,}6628}}$ (a táblázat szerinti kerekített értéket kikeresve)