Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Műszaki informatikus BSc
2013.01.09.
Megoldás

1. A : két pirosat húznak, B : 3-mal osztható számot dobnak. $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{2}{3}$, $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}(A \mid \bar{B}) = \frac{1}{6}$. A Bayes tételből: $\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(\bar{B} \mid A) = \frac{\frac{1}{6}\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$. Tehát, egyforma a két doboz húzásának a feltételes valószínűsége.

2. Ezt a feladatot a megoldás nehézsége miatt az értékelésnél nem vettük figyelembe... Az összpontszám így 100 lett.

3. $f_{X,Y}(x,y) = (x+1)\, e^{-(x+1)y} \cdot 2x, x \in (0,1), y > 0;$
   $f_{Y|X}(y \mid x) = (x+1)\, e^{-(x+1)y}, y > 0;$
   $$\mathbf{P}(X+Y<1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(2x^2+2x\right) e^{-(x+1)y} \,\mathrm{d}\,y \,\mathrm{d}\,x =$$
   $$= \int_0^1 \left[-2xe^{-(x+1)y}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}\,x = \int_0^1 2x\left[1-e^{-\left(1-x^2\right)}\right] \mathrm{d}\,x =$$
   $$= \left[x^2 - e^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{e}.$$

4. $$f_{X+Y}(t) = \int_{\max\{0,t-3\}}^{\min\left\{\frac{1}{2},t-2\right\}} \frac{4}{5}(t-u)\,\mathrm{d}\,u, t \in \left(2, \frac{7}{2}\right).$$
   a.) $t \in \left(2, \frac{5}{2}\right) : f_{X+Y}(t) = \int_0^{t-2} \frac{4}{5}(t-u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{2t^2}{5} - \frac{8}{5};$
   b.) $t \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) : f_{X+Y}(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}(t-u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}$
   c.) $t \in \left(3, \frac{7}{2}\right) : f_{X+Y}(t) = \int_{t-3}^{\frac{1}{2}} \frac{4}{5}(t-u)\,\mathrm{d}\,u = \frac{7}{2} - \frac{2}{5}t^2 + \frac{2}{5}t.$

5. $f_X(x) = \frac{1}{8}, x \in [1,9]$ $f_Y(y) = 4e^{-4y}, y > 0$ azaz $X \in U(1,9)$. és $Y \in E(4)$
   a.) Függetlenek!
   b.) $\mathbf{E}X - \mathbf{E}Y = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}, \boldsymbol{\sigma}^2(X-Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y = \frac{64}{12} + \frac{1}{16} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{\sigma}(X-Y) = \sqrt{\frac{259}{48}}$
   c.) $\mathbf{P}(0 \leq X < 5, Y \geq 2) = \int_1^5 \int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-4y}dydx = \frac{e^{-8}}{2}.$

6. Pl. $Y = \frac{X_{n+1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}}$.