# Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

**1. pZH javítókulcs (2016. 03. 24.)**

**Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.**

1. A $G$ páros gráf élei az $\{A, B, C, D\}$ ill. $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ ponthalmazok között futnak. A mellékelt táblázat az élek súlyát adja meg. Van-e olyan minimális súlyú súlyozott lefogás, amely az $A, B, C$ ill. $D$. pontokhoz a jobb oldali oszlopban található számokat rendeli?

| | **1** | **2** | **3** | **4** | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 9 | 4 | 3 | 4 |
| B | 8 | 10 | 7 | 5 | 6 |
| C | 5 | 7 | 5 | 2 | 2 |
| D | 9 | 8 | 7 | 3 | 0 |

(Ha van ilyen, akkor azt adjuk meg, és bizonyítsuk róla, hogy minimális, ha nincs, akkor adjunk meg egy olyan súlyozott lefogást, amely kisebb összsúlyú, mint bármely olyan, ami a jobb oldali oszlopból megkapható.)

| | **1** | **2** | **3** | **4** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | 9 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| B | 8 | 10 | 7 | 5 | 6 | 3 |
| C | 5 | 7 | 5 | 2 | 2 | 0 |
| D | $\boxed{9}$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{7}$ | $\boxed{3}$ | 0 | 0 |
| | 9 | 8 | 7 | 3 | | |

Először úgy választjuk ki a lehető legkisebb súlyokat az $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ csúcsokhoz, hogy azok a lehető legkisebb összsúlyú súlyozott lefogást alkossák a feladatban meghatározott súlyokkal. Ehhez a táblázat minden oszlopához kiválasztjuk a legnagyobb olyan számot, amit úgy kapunk, hogy az adott oszlop eleméből kivonjuk az adott elem sorában álló előre megadott súlyt. Az így kapott értékek láthatók a bal oldali táblázat alsó sorában. (4 pont)

Azt kaptuk, hogy bárhogyan is terjetsztjük ki súlyozott lefogássá a megadott súlyokat, az összsúly legalább 39 lesz. (2 pont)

Mivel a fedetlen pontok halmazából semmi sem érhető el pontos éleken, ezért azokon tudunk csökkenteni, ami által a most kapottnál kisebb súlyú súlyozott lefogást kapunk. Egy konkrét példa látható a jobb oldali oszlopban. (3 pont)

Egy 33 összsúlyú súlyozott lefogást kaptunk, tehát a feladat kérdésére *nem* a válasz. (1 pont)

Aki helyesen elvégzi az Egerváry algoritmust és talál egy 28 súlyú teljes párosítást és egy 28 összsúlyú súlyozott lefogást, az 7 pontot érdemel.

---

2. Legyen $A$ egy $n \times k$ méretű mátrix, $b$ egy $n$ magasságú oszlopvektor, $c$ egy $k$ hosszú sorvektor és $d$ pedig valós szám. Tegyük fel, hogy a $k$ hosszúságú sorvektorok körében nincs megoldása az $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ egyenlőtlenségrendszernek, ám található olyan $k$ hosszúságú $y \geq 0$ sorvektor és $z \geq 0$ valós szám, amire megoldható az $yA + cz = 0, yb + dz < 0$ egyenlőtlenségrendszer. Igazoljuk a Farkas-lemma segítségével, hogy az $Ax \leq b, cx > d$ egyenlőtlenségrendszer megoldható.

Az eredetileg kitűzött feladatban volt néhány sajtóhiba, amelyek a dolgozatírás alatt helyesbítve lettek.

Mivel az $y \geq 0, yA = 0, yb < 0$ egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása, ezért a Farkas-lemma miatt megoldható az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer. (3 pont)

Hasonlóan, mivel megoldható az $y \geq 0, yA + cz = 0, yb + dz < 0$ egyenlőtlenségrendszer a Farkaslemmából következik, hogy nincs megoldása az $Ax \leq b, cx \leq d$ egyenlőtlenségrendszernek. (4 pont)

Ezek szerint az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszernek létezik megoldása, ám bármely megoldásra $cx \geq d$, tehát a feladatban kérdezett egyenlőtlenségrendszer valóban megoldható. (3 pont)

---

3. Van-e olyan $(c_1, c_2)$ célfüggvény, amire az alábbi LP-nek nincs egészértékű optimuma, azaz nincs olyan optimális $x^*$ megoldása, aminek minden koordinátája egész szám? Ha van, bizonyítsuk be, ha nincs, adjunk olyat, amire nem egész az optimum.

$$\max\{c_1x_1 + c_2x_2\} \quad \text{ha}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 14$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

Vegyük észre, hogy az $x_1 = 0, x_2 = 7/2$ megoldása a fenti egyenlőtlenségrendszernek, és egyenlőséggel teljesíti az $x_1 \geq 0$ (avagy $-x_1 \leq 0$) ill. az $x_1 + 4x_2 \leq 14$ feltételeket. (3 pont)
Ezek szerint van olyan célfüggvény, amire csak ez a megoldás lesz lesz optimális, (3 pont)
pl úgy kaphatunk ilyet, hogy a két feltételt (értelmes módon) összeadjuk, hiszen az így kapott $4x_2 \leq 14$ feltételt a fenti megoldás egyenlőséggel teljesíti, ám minden olyan megoldás, amelyre e két feltétel közül akár csak egyet is szigorú egyenlőtlenséggel teljesült, az ezt a feltételt is szigorú egyenlőtlenséggel teljesíti. (3 pont)
Az a válasz tehát, hogy van ilyen célfüggvény: ilyet kapunk pl. $c_1 = 0, c_2 = 4$ választással. (1 pont)

Aki grafikusan ábrázolja a megoldásokat az első síknegyed egy konvex ötszögeként, az 3 pontot kap. Aki az ötszög öt csúcsának koordinátáit is kiszámolja, még 3 pontot szerez, aki rámutat, hogy van egy nem egész koordinátájú csúcs, további 1 pontot érdemel.

---

4. Határozzuk meg azt az LP problémát, aminek a mellékelt egyenlőtlenségrendszer a duálisa.

$$\min\{2016y_1 - 3y_2 + 24y_3\} \quad \text{ha}$$
$$y_1, y_3 \geq 0$$
$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$3y_1 - 33y_2 + y_3 = 77$$
$$7y_1 + 77y_3 \geq 33$$
$$7y_2 - 17y_3 \geq 11$$

Az eredetileg kitűzött feladatban a DLP-ben maximalizálni kellett, ez a dolgozatírás alatt helyesbítve lett. Aki az eredeti formában oldotta meg a (némileg nehezebb) feladatot, az is teljes pontszámot ér.

Az órán tanult ökölszabály alapján felírjuk a szamárvezetőként használt táblázatot. (1 pont)

| | $x_1 \geq 0$ | $x_2$ | $x_3 \geq 0$ | $x_4 \geq 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $0 \leq y_1$ | 1 | 3 | 7 | 0 | $\leq 2016$ |
| $y_2$ | $-1$ | $-33$ | 0 | 7 | $= -3$ |
| $0 \leq y_3$ | 2 | 1 | 77 | $-17$ | $\leq 24$ |
| | $\geq 3$ | $= 77$ | $\geq 33$ | $\geq 11$ | |

(3 pont)

Mivel a DLP-ben a második feltétel egyenlőséggel áll, ezért az $x_2$ változó előjelkötetlen, a többi nemnegatív. (2 pont)
az előjelkötetlen $y_2$-höz tartozó primál feltétel pedig egyenlőséggel teljesül. (2 pont)
Ennek alapján a duális

$$\max\{3x_1 + 77x_2 + 33x_3 + 11x_4\} \quad \text{ha}$$
$$x_1, x_3, x_4 \geq 0$$
$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 2016$$
$$-x_1 - 33x_2 + 7x_4 = -3$$
$$2x_1 + x_2 + 77x_3 - 17x_4 \leq 24$$

(2 pont)