# 2. Vizsgazárthelyi 2008 nyár A2

1. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & a \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbf{R}$. Határozza meg $\underline{\underline{A}}$ rangját $a$ függvényében !

2. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a $z$ tengely körüli $+15°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 102-edik hatványát!

3. Deriválhatóak-e a következő függvények a megadott pontban?

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P = (0,0)$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $P = (2,2)$

Azon eset(ek)ben, mely(ek)re a válasz igen, számítsa ki a derivált értékét!

4. Számítsa ki az $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy$ értékét! (Használja ki, hogy az eredmény független az integrálási sorrendtől!)

5. Létezik-e olyan hatványsor, melynek határfüggvénye minden valós $x$-re

(a) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ha $x \neq 0$, $f(0) = 1$

Azon eset(ek)ben, mely(ek)re a válasz igen, adjon meg egy ilyen hatványsort !

6.

(a) Igaz-e egy tetszőleges $n \times n$-es mátrix esetén

(a1) pontosan akkor invertálható, ha oszlop- és sorrangja megegyezik

(a2) pontosan akkor invertálható, ha oszlopvektorai között van olyan, amely lineárisan független a többi oszlopvektortól

(b) Legyen $f$ tetszőleges kétváltozós függvény, $a$ a sík tetszőleges pontja és $S(a)$ az $a$ pont egy tetszőleges környezete. Igaz-e

(b1) ha $f$ parciálisai deriváltjai folytonosak $S(a)$-ban, akkor $f$ deriválható $a$-ban

(b2) ha $a$-ban $f$ parciális deriváltjai: $f_x(a)$ és $f_y(a)$ léteznek, akkor az $f$ deriváltja grad $f$ is létezik $a$-ban és grad $f|_a = (f_x(a), f_y(a))$

(c) Legyen $a_n > 0$ minden $n$-re. Igaz-e, hogy

(c1) ha $\sum(-1)^n a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ is konvergens

(c2) ha a $\sum a_n$ numerikus sor konvergens, akkor a $\sum(-1)^n a_n$ is konvergens.