

1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

MATEMATIKA A3
VILLAMOSMÉRNÖK HALLGATÓKNAK

2016. október 17.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Név:

Gyakvez.:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

Gyak. kurzuskód:

--

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$	1_I	2_I	$\sum_I$

1. (7 + 8 pont)

Konvergensek vagy divergensek az alábbi numerikus sorok? Állítását indokolja!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^4 - n^3 + n}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2-n}.$$

2. (15 pont)

Határozza meg a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n3^{n-1}}$$

hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

3. (20 pont)

Adja meg

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

értékét 2 tizedesjegy pontossággal!

4. (15 + 15 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenleteket! ($y = y(x)$)

(a)

$$3x^2 + 2y \operatorname{sh} x + (2 \operatorname{ch} x)y' = 0, \quad y(0) = 2,$$

(b)

$$x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}.$$

5. (20 pont)

Adja meg az

$$x^2 y'(x) + y(x) = (x^2 + 1)e^x$$

differenciálegyenlet azon megoldását, melyre $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 1!$

IMSc példák

1. (15 pont)

Az EIB terembe váratlanul berepül két hógolyó, az egyik sugara éppen kétszer akkora, mint a másiké. Tudjuk, hogy az olvadás sebessége egyenesen arányos a felülettel. Mekkora lesz a nagyobbik hógolyó abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad? (Feltehetjük, hogy a hógolyók szabályos gömb alakúak és homogének, azaz sűrűségük állandó.)

2. (15 pont)

Oldja meg az

$$xy' \operatorname{sh} y - \operatorname{ch} y = x^2 \operatorname{sh} x$$

differenciálegyenletet! (Útmutató: Használjon $u(x) = \operatorname{ch} y(x)$ helyettesítést!)

A3 1.2H - megoldások

① a) $\frac{n^2+2n}{n^4-n^3+n} \leq \frac{n^2+2n^2}{n^4-\frac{n^4}{2}} = \frac{6n^2}{n^4} = \frac{6}{n^2}$ m.m. $n \geq 2$ 3p

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2}$ konvergens, így a majoráns kritérium alapján 2p

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^4-n^3+n}$ is konvergens.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2^{n-1}}}_{a_n}$ $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}} =$
 $= \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{1}{n}} \rightarrow e^{-2}$ 5p

$e^{-2} < 1 \Rightarrow$ gyökértétel alapján konvergens a sor.

3p

② $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^{n-1}}$ $a_n = \frac{1}{n 3^{n-1}}$ $x_0 = 0$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n} \cdot 3} \rightarrow \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{R=3} \Rightarrow (-3, 3) \subset KT$ 3p

• $x = -3 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n 3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3}{n}$ Leibniz-sor $\Rightarrow -3 \in KT$

1p

• $x = 3 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n 3^{n-1}} = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor $\Rightarrow$ divergens
 $3 \notin KT$

$KT = [-3, 3)$

1p

2/

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{t}{3}\right)^{n-1} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{n-1} \right) dt \quad \Leftrightarrow$$

$\uparrow$ bei $x < 3$, allora $[0, x]$ -u. eggeltesen
 konvergenz u. beliebig

$$\int_0^x \left(\frac{t}{3}\right)^{n-1} dt = \left[\frac{\left(\frac{t}{3}\right)^n}{n} \cdot 3 \right]_0^x = \frac{x^n}{n \cdot 3^{n-1}}$$

(3p)

$$\Leftrightarrow \int_0^x \left(\frac{t}{3}\right) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{t}{3}\right)^{n-1} dt = \int_0^x \frac{t}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t}{3}} dt = \int_0^x \frac{t}{3-t} dt =$$

low geom. ser (2p)

$$\left| \frac{t}{3} \right| < \frac{x}{3} < 1$$

$$= \int_0^x \frac{t-3+3}{3-t} dt = \int_0^x \left(-1 + \frac{3}{3-t} \right) dt = \left[-t - 3 \ln |3-t| \right]_0^x =$$

$$= -x - 3 \ln |3-x| + 3 \ln 3$$

(2p)

$$\textcircled{3} \quad \int_0^{1/10} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int_0^{1/10} (1+x^3)^{-1/2} dx = \int_0^{1/10} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^{3n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \int_0^{1/10} x^{3n} dx =$$

$\uparrow$ binomiel's
 sorjekt's, $|x| < 1$

$\uparrow$ a KT zelt
 uniterell'mein
 a beliebig egg. konvergenz

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1} \right]_0^{1/10} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{10^{3n+1}} \equiv S$$

$$\binom{-1/2}{0} = 1, \quad \binom{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}, \quad \binom{-1/2}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} = \frac{3}{4 \cdot 2!}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}, \dots \Rightarrow \text{Leibniz-ser}$$

(5p)

$S_N \sim S$ höchst's hilfe Leibniz-ser zelt: $|S - S_N| < a_{N+1}$

$$N=0 \text{ zelt} \quad a_{N+1} = a_1 = \left| \binom{-1/2}{1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^4} = \frac{1}{40000} < \frac{1}{100}$$

$$S \approx S_1 = \binom{-1/2}{0} \frac{1}{0+1} \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

(5p)

3/ (4) a) $3x^2 + 2y \ln x + (2 \ln x)y' = 0 \quad y(0) = 2$

$$p(x,y) = 3x^2 + 2y \ln x \quad \leadsto \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2 \ln x$$

$$q(x,y) = 2 \ln x$$

$$\leadsto \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2 \ln x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad [3P]$$

$\Downarrow$

exakt. d.

$$q(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^1 \quad \Rightarrow$$

[2P]

$$\exists F(x,y) = C \text{ ableiten mo}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2y \ln x \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = \int (3x^2 + 2y \ln x) dx = x^3 + 2y \ln x + C(y) \quad [3P]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 \ln x$$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2 \ln x + \frac{dC(y)}{dy} = 2 \ln x$$

[3P]

$$F(x,y) = x^3 + 2y \ln x = C$$

$\Leftrightarrow$

$$y(0) = 2 \Rightarrow F(0,2) = 0^3 + 2 \cdot 2 \ln 0 = 4$$

[2P]

$$\frac{dC(y)}{dy} = 0 \Rightarrow C(y) = C := 0$$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{x^3 + 2y \ln x = 4}}$$

[2P]

b) $x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{1}{x}} \quad | : x^2$

$$y = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

[2P]

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ defini} \Rightarrow u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$u + xu' = u + u^2 \cdot e^{-\frac{1}{u}}$$

$$y(x) = x u(x) \quad [3P]$$

$$y'(x) = u(x) + x u'(x)$$

$$x \frac{du}{dx} = u^2 e^{-\frac{1}{u}}$$

$$\int \frac{1}{u^2} e^{\frac{1}{u}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

[5P]

$$-e^{\frac{1}{u}} = \ln|x| + \ln C \leadsto e^{-e^{\frac{1}{u}}} = C \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{e^{-e^{\frac{1}{x}}} = Cx}}$$

[5P]

4/

$$\textcircled{G} \quad x^2 y' + y = (x^2 + 1)e^x \quad | : x^2$$

$$y' + \frac{y}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^x \quad \text{lin. abhangig, inhomogen}$$

$$\textcircled{H} \quad y' + \frac{y}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + \ln C \Rightarrow y_{\text{hom}} = C e^{\frac{1}{x}}$$

5P

\textcircled{H} allg. Losung

$$y_p(x) = c(x) e^{\frac{1}{x}} \leadsto y_p'(x) = c'(x) e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} c(x) e^{\frac{1}{x}}$$

3P

bestimmte Losung:

$$c' e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} c e^{\frac{1}{x}} + \frac{c e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^x$$

$$\hookrightarrow c'(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{x - \frac{1}{x}}, \text{ mit } \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)e^{x - \frac{1}{x}} dx = e^{x - \frac{1}{x}} \quad \text{5P}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ip}} = e^{x - \frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} = e^x \quad \text{3P}$$

$$y_{\text{all}} = y_{\text{hom}} + y_{\text{ip}} = C e^{\frac{1}{x}} + e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (C e^{\frac{1}{x}} + e^x) = C = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{\frac{1}{x}} + e^x \quad \text{9P}$$

IMSc példák

① $r(t)$: a hógöbbsugár t időpillanatban

$$V(r(t)) = \frac{4\pi}{3} r^3(t) \quad \text{a térfogat } t\text{-ben}$$

$$A(r(t)) = 4\pi r^2(t) \quad \text{a felület } t\text{-ben}$$

hógöbbs elcsúszás $\equiv$ tömegcsökkenés

$$\frac{d}{dt} m(t) = \frac{d}{dt} (\rho V(r(t))) = -\rho A(r(t))$$

ρ : sűrűség
 $\rho > 0$ állandó

$\Downarrow$

$$\rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 3 \cdot r^2(t) \dot{r}(t) = -\rho \cdot 4\pi r^2(t)$$

$\Downarrow$

$$\dot{r}(t) = -\frac{\rho}{3} = -K$$

$K := \frac{\rho}{3}$ konstans

$$\int dr = -K \int dt$$

$$\boxed{r(t) = -Kt + C}$$

5p

külső hógöbbs: $r(0) = R = C \Rightarrow r_1(t) = R - Kt$

magasabb hógöbbs: $r(0) = 2R = C \Rightarrow r_2(t) = 2R - Kt$

külső felület elcsúszás $t = T$ -ben $\Rightarrow r_1(T) = R - KT = 0$

$$\Downarrow \\ T = \frac{R}{K}$$

éppen a magasabb nyakra:

$$r_2(T) = 2R - K \cdot \frac{R}{K} = R$$

, akkor is, mint a mérték
váltásánál.

5p

②

$$xy' \circ \ln y - \ln y = x^2 \circ \ln x$$

$$u(x) = \ln y(x) \Rightarrow u'(x) = \ln y(x) \circ y'(x)$$

$\Downarrow$

$$x u'(x) - u(x) = x^2 \circ \ln x \quad | : x$$

$$u'(x) - \frac{1}{x} u(x) = x \circ \ln x \quad \text{„exakter“ linearer Operator}$$

5P

$$(H) \quad u' - \frac{1}{x} u = 0 \quad \leadsto \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$\Downarrow$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |u| = \ln |x| + \ln c$$

$$\boxed{u_{h.c.}(x) = C \cdot x}$$

3P

(H)

$$u_p(x) := C(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad u'_p = C'(x) \cdot x + C(x)$$

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x} C(x) \cdot x = x^2 \circ \ln x$$

$$C'(x) = \ln x \Rightarrow C(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x$$

$$u_{ip}(x) = x \cdot \ln x$$

5P

$$u_{\text{ges}}(x) = C \cdot x + x \ln x \quad \leadsto \quad \underline{\underline{dy(x) = C \cdot x + x \ln x}}$$

$$\text{wgg} \quad \underline{\underline{y(x) = \operatorname{arch}(Cx + x \ln x)}}$$

2P