2. Zárthelyi 2009 tavasz A2 Munkaidő: 90 perc

1. Legyen $n > 1$, $\mathbb{R}^n$-en a skalárszorzat a szokásos: $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ és a norma a skalárszorzat által indukált: $||x||^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Legyen $a, e \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek, $||e|| = 1$. Mekkora valós c-re lesz a ce vektor az a-nak az e-re eső vetülete?

2. Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ és legyen az $\mathbb{R}^3$-beli skalárszorzat a szokásos. Adja meg S egy ortogonális bázisát!

3. Hol folytonos az f függvény, ha $f(0,0)=0$ és az origón kívül

$$\text{(a)}\ f(x,y)=\frac{xy^4}{x^2+y^4} \qquad \text{(b)}\ f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$

4. Legyen $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $f(0,0) = 0$. Számítsa ki f origóbeli $v = (1,1)$ irányú iránymenti deriváltját!

5. Állapítsa meg, hogy a következő numerikus sorok közül melyik konvergens:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n} \quad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n} \quad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \quad \text{(d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

6.

(a) Melyik igaz, melyik nem egy f kétváltozós függvényre egy adott pontban?

- **(a1)** Ha totálisan deriválható, akkor mindkét változója szerint parciálisan deriválható
- **(a2)** Ha mindkét változója szerint parciálisan deriválható, akkor totálisan is deriválható
- **(a3)** Ha totálisan deriválható, akkor a pont valamely környezetében folytonosak a parciális deriváltak
- **(a4)** Ha a pont valamely környezetében folytonosak a parciális deriváltak, akkor totálisan deriválható

(b) Melyik igaz, melyik nem egy numerikus sorra?

- **(b1)** Ha konvergens, akkor az abszolút értékeikből alkotott sor is az
- **(b2)** Ha divergens, akkor a tagjai nem 0-hoz tartanak.