Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2014. március 20.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Egy 59 csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?

* * * * *

Először megmutatjuk, hogy a gráfban minden fokszám páros. Ha ugyanis lenne páratlan fokú csúcs, akkor a fokszámösszegek paritására vonatkozó feltétel miatt az összes többi fokszám is páratlan lenne, (2 pont)
ez viszont lehetetlen, hiszen a gráfnak 59 csúcsa van, s így az összes csúcs fokszámösszege (ami a gráf élszámának kétszerese) páratlan lenne. (3 pont)
A gráfra teljesülnek az Ore-tétel feltételei: egyszerű (1 pont)
és bármely két nem szomszédos csúcs fokösszege (sőt, bármely két csúcs fokösszege) legalább a csúcsok száma (sőt, legalább eggyel több is), (1 pont)
így az Ore-tétel szerint létezik Hamilton-köre, (1 pont)
tehát a gráf összefüggő. (1 pont)
A tanultak szerint ha egy összefüggő gráfban minden csúcs foka páros, akkor létezik Euler-körsétája, a válasz a feladat kérdésére tehát igenlő. (1 pont)

2. Egy szabályos tízszögnek behúzzuk az összes legrövidebb átlóját. Határozzuk meg a kapott (10 csúcsú, 20 élű) gráf klikkszámát és kromatikus számát.

* * * * *

Háromszöget könnyű mutatni a gráfban, a klikkszám tehát legalább 3. (1 pont)
Tegyük fel, hogy létezik 4 csúcsú klikk is, legyen ennek egyik csúcsa C. A klikk többi csúcsának C gráfbeli szomszédai közt kell lennie, amik a tízszögön vett két szomszéd és két másodszomszéd. (1 pont)
Az ezen csúcsok által meghatározott feszített részgráf azonban egy 3 élből álló út, ami nem tartalmaz háromszöget, így semelyik három sem lehet közülük benne a feltételezett 4 csúcsú klikkben, ami

ellentmondás. (1 pont)
A gráf klikkszáma tehát pontosan 3. (1 pont)
A gráf kromatikus száma 4, ennek igazolására mutatni kell egy jó 4-színezést és be kell látni, hogy 3 szín nem elég. (1 pont)
Jó 4-színezés: (1 pont)
A tízszögön vett bármely 3 egymás utáni csúcs 3 különböző színt kell kapjon, (1 pont)
így ha meg tudnánk színezni a gráfot 3 színnel, akkor a (tízszögön) harmadszomszédos csúcsok azonos színűek kéne, hogy legyenek, azaz azonos színű lenne az 1.,4.,7. csúcs, a 2.,5.,8. csúcs, illetve a 3.,6.,9. csúcs. (2 pont)
Ekkor azonban a 10. csúcs a 3 szín egyikével sem színezhető, tehát 3 szín nem elég a gráf színezéséhez. (1 pont)

Megjegyzés: a kromatikus számra vonatkozó alsó becslés persze az $\alpha = 3$ belátásán keresztül is egyszerű, de mivel a $\chi \geq \frac{n}{\alpha}$ egyenlőtlenség az előadáson nem szerepelt, aki használja, annak persze igazolnia is kell.

3. Legyen G 99 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma $k > 0$. Bizonyítsuk be, hogy G élkromatikus száma páratlan.

* * * * *

Természetesen $\chi_e(G) \geq k$. (1 pont)
Mivel a gráf egyszerű, alkalmazhatjuk Vizing tételét, (1 pont)
azaz $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1 = k + 1$. (1 pont)
Bármely gráfban az összes fokszámot összeadva az élek számának kétszeresét, vagyis páros számot kapunk, (1 pont)
azaz $99k$ páros és így k is az. (1 pont)
Így azt kéne belátnunk, hogy az élkromatikus szám nem k, hanem $k + 1$. (1 pont)
Ha $\chi_e(G) = k$ lenne, akkor minden csúcshoz csatlakozna minden színosztályból él, (2 pont)
hiszen minden csúcshoz k él csatlakozik és ezek közt nem lehet két azonos színű. (1 pont)
Az egy adott színhez (mondjuk az 1-eshez, ha egyáltalán van nem üres színosztály, ami $k > 0$-ból következik – e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot) tartozó élek által alkotott részgráfban ekkor minden pont foka pontosan egy lenne (vagyis az élek teljes párosítást alkotnának), ami lehetetlen, mert a részgráfban a fokösszeg 99 lenne (avagy páratlan csúcsú gráfban nincs teljes párosítás). (1 pont)

4. Egy adott intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma 10. Mutassuk meg, hogy ha az intervallumrendszerből törlünk néhány olyan intervallumot, melyek közt semelyik háromnak nincs közös pontja, akkor a visszamaradó intervallumrendszerhez tartozó intervallumgráf kromatikus száma legalább 8.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy a kromatikus szám legfeljebb 7 és próbáljuk az eredeti gráfot a maradék gráf egy 7-színezésének segítségével megszínezni. (2 pont)
Ha ezt meg tudjuk tenni úgy, hogy a törölt intervallumoknak megfelelő csúcsoknak elég két szín, melyek az első 7-től különböznek, akkor ellentmondásra fogunk jutni, hiszen ekkor elég lenne 9 szín az eredeti gráf színezéséhez. (3 pont)
A törölt intervallumokhoz tartozó intervallumgráf a feltétel szerint nem tartalmaz háromszöget, a klikkszáma tehát legfeljebb 2. (2 pont)
Mivel az előadáson tanultak szerint az intervallumgráfok kromatikus száma és klikkszáma azonos,

a törölt intervallumoknak megfelelő csúcsok színezéséhez valóban elegendő két szín. (3 pont)

5. Egy páros gráf két pontosztálya $\{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $\{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e G-ben teljes párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból látható, hogy az a_1, a_4, a_5, a_7 csúcsok minden szomszédja a b_3, b_5, b_7 csúcsok közül kerül ki, azaz $N(\{a_1, a_4, a_5, a_7\}) \subseteq \{b_3, b_5, b_7\}$ (valójában az egyenlőség is teljesül, persze). (5 pont)
Így nem létezhet a gráfban az összes a_i-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (4 pont)
Ezek szerint teljes párosítás sem létezik a gráfban. (1 pont)

6. Egy G gráf csúcsai legyenek a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek. Két különböző csúcs pontosan akkor szomszédos G-ben, ha a hozzájuk tartozó számok szorzata osztható 4-gyel vagy 9-cel (vagy mindkettővel). Határozzuk meg $\alpha(G)$-t (a független pontok maximális számát) és $\varrho(G)$-t (a lefogó élek minimális számát).

* * * * *

Érdemes először a gráf szerkezetét megállapítani. Jelöljük az 1 és 100 közti páros, 3-mal osztható, 4-gyel osztható, 9-cel osztható számok halmazát rendre P-vel, H-val, N-nel, K-val, a többi 1 és 100 közti szám halmazát (vagyis a páratlan, hárommal nem osztható számokat) pedig M-mel. P és H (50, illetve 33 elemű) klikket alkotnak (melyeknek 16 közös eleme van). E két klikken belül az N-beli és a K-beli csúcsok a gráf minden csúcsával össze vannak kötve (önmagukat leszámítva), M elemei pedig (csak) az N-beli és a K-beli csúcsokkal vannak összekötve. (2 pont)
P-ből és H-ból nyilván legfeljebb egy-egy csúcs kerülhet be független ponthalmazba, (1 pont)
M elemei viszont mind bekerülhetnek (ha P-ből és H-ból N-en, illetve K-n kívüli csúcsot választunk), (2 pont)
így a maximális független ponthalmaz mérete $|M| + 2 = 100 - (50 + 33 - 16) + 2 = 35$. (1 pont)
A minimális lefogó élhalmazhoz célszerű minél nagyobb párosítást találnunk. A 33 M-beli pontot csak N és K elemeivel tudjuk párosítani, ezért érdemes megszámolni, hogy ezek hányan vannak: $|N| = 25$, $|K| = 11$, a két halmaz metszetében (36-tal osztható számok) pedig két elem van, vagyis $|N \cup K| = 34$. (1 pont)
Így a 33 M-beli pontot mind össze tudjuk párosítani N és K elemeivel, (2 pont)
a maradék csúcsokon pedig az eddig látottak alapján nyilván lesz teljes párosítás, vagyis a gráfnak magának is van teljes párosítása, azaz $\nu(G) = 50$. Innen Gallai tétele alapján $\varrho(G) = 100 - \nu(G) = 50$. (1 pont)