Lineáris rekurzió

Definíció. Legyen $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ és $\mathrm{F} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Ekkor az

$$\mathrm{f}(n) = \mathrm{F}(\mathrm{f}(n-1), \mathrm{f}(n-2), \ldots, \mathrm{f}(n-k)) \qquad (n \geq k)$$

formulát (k-adrendű) rekurziónak nevezzük.
Egy rekurzió egy $\mathrm{f} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ megoldását rekurzióval adott sorozatnak, vagy röviden rekurzív sorozatnak nevezzük.
Ha $\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, ahol $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ adottak, akkor lineáris rekurzióról beszélünk.
Ekkor

$$\mathrm{f}(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathrm{f}(n-i).$$

Tétel. *Egy k-adrendű lineáris rekurzió megoldásainak halmaza k dimenziós lineáris tér.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy lineáris tér. Ehhez be kell látni, hogy ha f és g megoldások, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathrm{f} + \mathrm{g}$ és $c\,\mathrm{f}$ is megoldás.

Legyen $n \geq k$. Ekkor

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(n) = \mathrm{f}(n) + \mathrm{g}(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathrm{f}(n-i) + \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathrm{g}(n-i) = \sum_{i=1}^{k} a_i (\mathrm{f}(n-i) + \mathrm{g}(n-i)) = \sum_{i=1}^{k} a_i (\mathrm{f}+\mathrm{g})(n-i)$$

és

$$(c\,\mathrm{f})(n) = c\,\mathrm{f}(n) = c \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mathrm{f}(n-i) = \sum_{i=1}^{k} c a_i \, \mathrm{f}(n-i) = \sum_{i=1}^{k} a_i (c\,\mathrm{f})(n-i).$$

Mivel $\mathrm{f}(0), \mathrm{f}(1), \ldots, \mathrm{f}(k-1)$ egyértelműen meghatározza a megoldást, a megoldástér valóban k dimenziós.

Megjegyzés. A megoldástér egy bázisát alaprendszernek nevezzük.

Fibonacci-sorozat.

Legyen adott $\mathrm{f}(0)$ és $\mathrm{f}(1)$. Definiáljuk az f sorozatot a következő (másodrendű, lineáris) rekurzióval, minden $n > 1$-e:

$$\mathrm{f}(n) = \mathrm{f}(n-1) + \mathrm{f}(n-2).$$

Ha például $\mathrm{f}(0) = 0$ és $\mathrm{f}(1) = 1$, akkor a sorozat első néhány eleme: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$.

Sejtés: keressük a rekurzió feloldását $\mathrm{f}(n) = q^n$ alakban.

Ekkor $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$, azaz ha $q \neq 0$, akkor $q^2 = q + 1$, így $q_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Megoldás tehát a q_1^n és a q_2^n sorozat. Az előző tétel szerint ezek lineáris kombinációja is megoldás lesz. Sőt, mivel $q_1 \neq q_2$, ezért minden megoldás ezek lineáris kombinációja lesz.

Állítás. *Az összes megoldások halmaza:*

$$\{\mathrm{f} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \mathrm{f}(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n\}.$$

Ha például $\mathrm{f}(0) = 0$ és $\mathrm{f}(1) = 1$, akkor

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 &= 1 \end{aligned}$$

miatt

$$c_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \text{míg} \quad c_2 = \frac{1}{q_2 - q_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

és így a sorozatL

$$\mathrm{f}(n) = \frac{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \sqrt{5}\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{5 \cdot 2^n}.$$

Megjegyzés. Általában, az

$$\mathrm{f}(k) = a_1 f(k-1) + a_2\,\mathrm{f}(k-2) + \cdots + a_n\,\mathrm{f}(k-n) \qquad (k \geq n)$$

n-edrendű lineáris rekurzió alaprendszerét a $q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \cdots + a_n$ karakterisztikus egyenlet segítségével határozzuk meg.

Nevezetesen, ha q egy m-szeres valós gyöke a $q^n - \sum_{i=1}^{n} a_i q^{n-i}$ karakterisztikus polinomnak, akkor az alaprendszer hozzátartozó elemei: $q^n, nq^n, \ldots, n^{m-1}q^n$.

Ha pedig $\alpha \pm \beta i$ egy m-szeres nem valós gyökpár ($\beta \neq 0$), akkor az alaprendszer hozzátartozó elemei: $n^k((\alpha+\beta i)^n + (\alpha-\beta i)^n)$ és $n^k i((\alpha+\beta i)^n - (\alpha-\beta i)^n)$, ahol k lehetséges értékei $0, 1, \ldots, m-1$.