VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (2)

Többváltozós függvények

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.
Kónya Ilona

2005. március

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Bevezető

1.1. Az n-dimenziós euklideszi tér

- $\mathbb{R}^n$: rendezett szám n-esek tere: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

  Ⓣ $\mathbb{R}^n$ lineáris tér a vektor összeadásra illetve a vektor skalárral való szorzására nézve.

- Skaláris szorzat: $(\underline{x} \mid \underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

  Ⓣ A fenti definíció kielégíti a skaláris szorzat axiómáit ($\mathbb{R}^n$-et ezért euklideszi térnek nevezzük).

- Norma: a skaláris szorzat által generált normát használjuk (amit abszolút értéknek vagy hosszúságnak nevezünk):

$$\| \underline{x} \| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\underline{x}|$$

- A norma által generált távolságot vezetjük be:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \| \underline{x} - \underline{y} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

  Tehát $\mathbb{R}^n$ metrikus tér (olyan lineáris tér, amelyben van távolság).

Az alábbi vektorok páronként merőlegesek egymásra (skaláris szorzatuk nulla), így lineárisan függetlenek:

$$\underline{e}_k = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

egységnyi hosszúságúak és kifeszítik a teret (ortonormált bázist alkotnak):

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_n \underline{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \underline{e}_k$$

$$\underline{x} = \sum_{k=1}^{n} (\underline{x}, \underline{e}_k)\ \underline{e}_k$$

Tehát $\mathbb{R}^n$ n-dimenziós lineáris tér, amelyet n-dimenziós euklideszi térnek nevezünk ($\mathbb{R}^n = \mathbb{E}^n$ jelölés is szokásos).

1.2. Néhány definíció

Környezet: $K_{\underline{a},r} = K(\underline{a}, r)$ (Ha r-nek nincs jelentősége: $K_{\underline{a}}$)
$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$; $r \in \mathbb{R}^+$

$$K_{\underline{a},r} = \{\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \varrho(\underline{x}, \underline{a}) < r\}$$

$n = 1$: $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum; $n = 2$ esetén: nyílt körlap
$n = 3$: $\underline{a}$ középpontú gömb (belseje); $n > 3$: n dimenziós gömb

Átszúrt környezet: $\dot{K}_{\underline{a},r}$

$$\dot{K}_{\underline{a},r} = K_{\underline{a},r} \setminus \{\underline{a}\}$$

Korlátos halmaz: $A \subset \mathbb{R}^n$; $\exists R$, hogy $\forall \underline{x} \in A$-ra $\varrho(\underline{x}, \underline{0}) < R$
(Az A összes pontja egyetlen R sugarú gömbbe foglalható.)

Ⓓ

1.) Az $A \subset \mathbb{R}^n$-nek a $\underline{b}$ *belső pontja*, ha $\exists K_{\underline{b}}$: $K_{\underline{b}} \subset A$

2.) Az $A \subset \mathbb{R}^n$-nek a $\underline{k}$ *külső pontja*, ha $\exists K_{\underline{k}}$: $K_{\underline{k}} \cap A = \emptyset$

3.) $A \subset \mathbb{R}^n$-nek a $\underline{h}$ *határpontja*, ha $\forall K_{\underline{h}}$-ra: $K_{\underline{h}} \cap A \neq \emptyset$ és $K_{\underline{h}} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

Ⓓ *front A:* A határa: a határpontok összessége.
Ⓓ *int A:* A belső pontjainak halmaza
Ⓓ $A \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz*, ha minden pontjának létezik olyan környezete, amely része A-nak (minden pontja belső pont).
Ⓓ $A \subset \mathbb{R}^n$ *zárt halmaz*, ha a komplementere nyílt halmaz.

Ⓓ *Torlódási pont:*
$\underline{c}$ torlódási pontja az $A \subset \mathbb{R}^n$ végtelen elemű halmaznak, ha $\forall K_{\underline{c}}$ környezetre:

$$K_{\underline{c}} \cap (A \setminus \{\underline{c}\}) \neq \emptyset$$

Tehát $\underline{c}$-nek $\forall$ környezetében van A-beli elem ($\underline{c}$-től különböző, $\underline{c} \in A$ nem szükséges).

Bebizonyítható, hogy az $\mathbb{R}^n$ beli zárt halmazok az összes határpontjukat tartalmazzák továbbá az $A \subset \mathbb{R}^n$ a.cs.a. zárt, ha az összes torlódási pontját tartalmazza.

Igaz a Cantor axióma általánosítása:

Ⓣ Egymásba skatulyázott korlátos és zárt halmazok metszete nem üres.

Az $\mathbb{R}^n$ beli korlátos és zárt halmazok kitüntetett szerepűek, külön nevük van.

Ⓓ $\boxed{\mathbb{R}^n\text{-ben a korlátos és zárt halmazokat } \textit{kompakt} \text{ halmazoknak nevezzük.}}$

Bebizonyítható a Bolzano–Weierstrass tétel általánosítása:

Ⓣ Korlátos végtelen elemű ponthalmaznak mindig van torlódási pontja.

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő *folytonos út* (görbe): $g_{\underline{a},\underline{b}}$

$$g_{\underline{a},\underline{b}} = \left\{ \underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n; \;\; \underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,; \;\; \varphi_k \in C^0_{[\alpha,\beta]}; \;\; \underline{\varphi}(\alpha) = \underline{a}, \;\; \underline{\varphi}(\beta) = \underline{b} \right\}$$

($\underline{\varphi} : \; [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n :$ vektor – skalár függvény (vektort rendel skalárhoz).)

$\underline{a}, \underline{b}$ pontokat összekötő *szakasz*: $l_{\underline{a},\underline{b}}$

$$l_{\underline{a},\underline{b}} = \{ \underline{x} : \underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}); \;\; t \in [0,1] \} \qquad \text{(általánosítás a 3 dimenzióból)}$$

Tehát $\underline{x}(0) = \underline{a}$, $\quad \underline{x}(1) = \underline{b}$ (Az előző speciális esete.)

$A \subset \mathbb{R}^n$ *összefüggő*, ha $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in A$-ra $\underline{a}$ és $\underline{b}$ összeköthető halmazbeli folytonos úttal.

$A \subset \mathbb{R}^n$ *konvex*, ha bármely két pontjával együtt az azokat összekötő szakaszt is tartalmazza, tehát

$$\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in A \text{ -ra:} \quad \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) \in A, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

Átfogalmazva:

$$\underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\underline{a} + t\underline{b} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in A, \qquad \text{ahol } \alpha + \beta = 1 \text{ és } \beta \in [0,1]$$

●●●

1.3. Pontsorozatok

$(\underline{x}_k) : \quad \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \ldots \qquad \underline{x}_k \in \mathbb{R}^n$

Ⓓ $\boxed{\lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{a}}$, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$:

$$\underline{x}_k \in K_{\underline{a},\varepsilon}\,, \quad \text{ha } k > N(\varepsilon).$$

(Vagyis $\varrho(\underline{x}_k, \underline{a}) = |\underline{x}_k - \underline{a}| = \|\underline{x}_k - \underline{a}\| < \varepsilon$, ha $k > N(\varepsilon)$. Tehát $\lim\limits_{k\to\infty} |\underline{x}_k - \underline{a}| = 0$.)

Ⓣ *(Koordinátánkénti konvergencia)*

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})\,, \quad k \in \mathbb{N}^+\,; \qquad \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \\[1ex] \qquad \lim\limits_{k\to\infty} \underline{x}_k = \underline{a} \quad \iff \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = a_i\,; \;\; i = 1, 2, \ldots, n \end{array}}$$

Ⓑ

a.) $\Longrightarrow$:

$$|x_{ki} - a_i| = \sqrt{(x_{ki} - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - a_j)^2} = \underbrace{|\underline{x}_k - \underline{a}| < \varepsilon, \ \text{ha } k > N(\varepsilon)}_{\ldots \ \Longleftarrow \ \text{Ezt tudjuk.}}$$

Tehát $\forall\, i$-re $\quad |x_{ki} - a_i| < \varepsilon\,,\quad$ ha $k > N(\varepsilon)$

b.) $\Longleftarrow$:

$|x_{ki} - a_i| < \varepsilon^*\,,\quad$ ha $k > N(\varepsilon^*)\quad i = 1, 2, \ldots, n$ teljesül.

$$|\underline{x}_k - \underline{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_{ki} - a_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{*2}} = \underbrace{\sqrt{n}}_{\text{konstans (a tér dimenziója)}}\, \varepsilon^* = \varepsilon\ ,\quad \text{ha } k > N(\varepsilon^*)$$

Tehát az algoritmus:
ε-hoz kapjuk ε^*-ot: $\varepsilon^* := \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ és ehhez meghatározunk egy olyan $N(\varepsilon^*)$ küszöbindexet, mely minden k-ra jó, tehát minden koordinátánként kapott pontsorozathoz megfelel. Ez lesz a keresett küszöbindex.

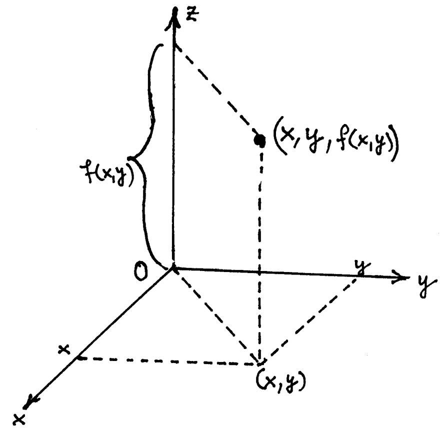
■

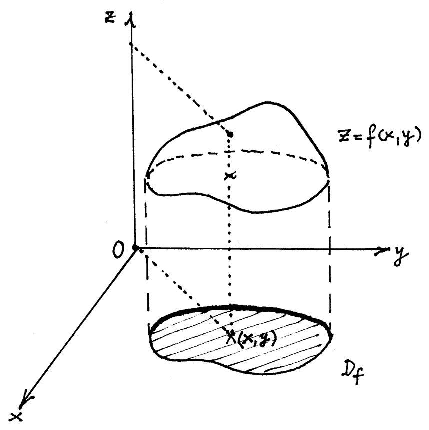
2. Többváltozós függvény

- Fogalma (skalár – vektor függvény): $\cdots$
- **Kétváltozós függvény szemléltetése**

Az egyváltozós függvényt egy görbeként ábrázolhattuk, a kétváltozós függvényt egy felülettel szemléltethetjük. Ezt a H_0 felületet f grafikonjának nevezzük:

$$H_0 = \{(x, y, z)\ :\ (x, y) \in D_f\,,\ z = f(x, y)\} = graf\, f$$





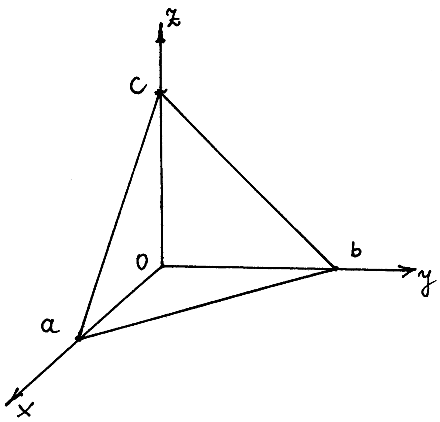
2.1 ábra 2.2 ábra

Például az $f(x,y) = c - \dfrac{c}{a}\,x - \dfrac{c}{b}\,y$ függvény grafikonja a

$$z = c - \frac{c}{a}\,x - \frac{c}{b}\,y \quad \text{felület, azaz} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ ,$$

tehát egy olyan síkról van szó, amely az x, y, z tengelyeket rendre az $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ pontokban metszi.

(A sík egyenlete: $n_1\,(x - x_0) + n_2\,(y - y_0) + n_3\,(z - z_0) \;=\; 0$)

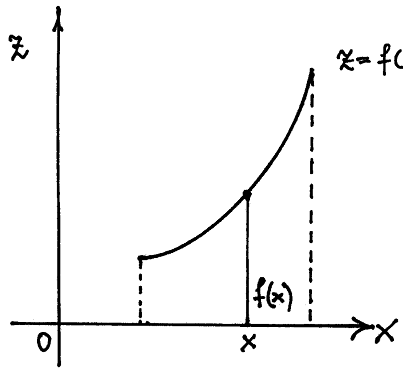


2.3 ábra

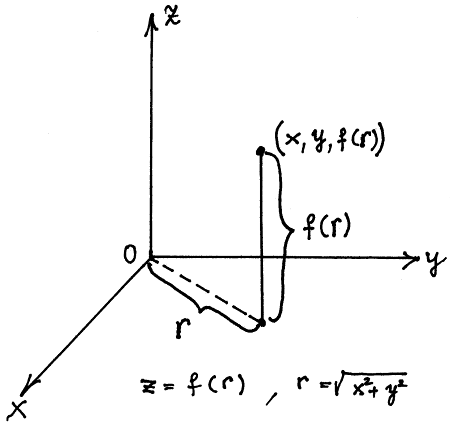
Ha megforgatjuk az (x,z) síkban lévő $z = f(x)$ görbét a z tengely körül, akkor a

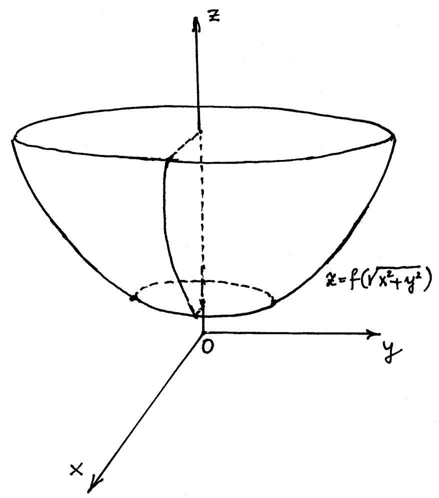
$$z = f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

felülethez jutunk.



2.4 ábra





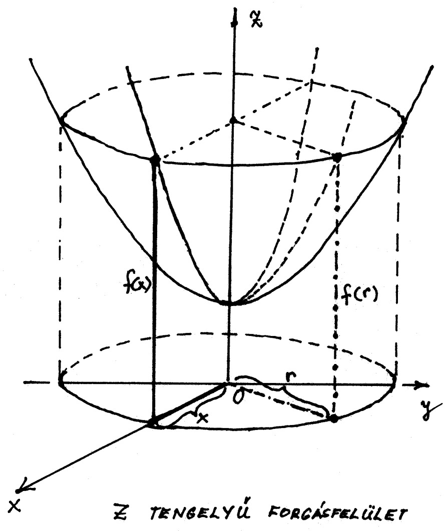
2.5 ábra

2.6 ábra

Például a $z = x^2 + 1$ görbének a z tengely körüli megforgatásával a

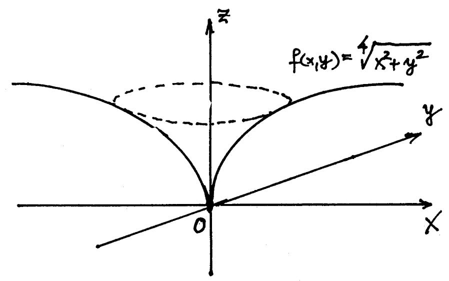
$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$$

felülethez jutunk (forgási paraboloid).



2.7 ábra

Az $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ grafikonja a $z = \sqrt[4]{x^2+y^2}$ felület, ami a $z = \sqrt{x}$ görbe z tengely körüli forgatásával keletkezett.



2.8 ábra

- Szintalakzatok. .....
- Ábrázolás.

  $ax + by + cz = d$

  $z = x^2 + y^2\,; \quad z = -x^2 - y^2\,; \quad z = 6 + x^2 + y^2\,; \quad z = 6 - x^2 - y^2$

  $z = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad z^2 = x^2 + y^2$

  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,; \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,; \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

  $z = xy\,; \quad z = y^2 - x^2$

L. előadás ill. gyakorlat.

3. Határérték, folytonosság

(D) $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^m$; $m-$változós függvénynek az $\underline{a}$-ban a határértéke b, jelölésben:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b,$$

ha

1.) $\underline{a}$ torlódási pontja D_f-nek,

2.) $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\,\delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$\text{ha } \underbrace{\underline{x} \in D_f \text{ és } 0 < \varrho(\underline{x},\underline{a}) = |\underline{x}-\underline{a}| < \delta}_{\underline{x}\in \dot{K}_{\underline{a},\delta}\cap D_f}, \quad \text{akkor} \quad \underbrace{|f(\underline{x}) - b| < \varepsilon}_{f(\underline{x})\in K_{b,\varepsilon}}$$

(T) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = b \iff \forall\,\underline{x}_n \to \underline{a}$ $(\underline{x}_n \in D_f \setminus \{\underline{a}\})$ pontsorozatra $f(\underline{x}_n) \to b$ $(\neg\text{B})$

(D) $f: D_f \mapsto \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^m$; $m-$változós függvény folytonos az $\underline{a}$-ban, ha

1.) $\underline{a} \in D_f$,

2.) $\underline{a}$ torlódási pontja D_f-nek,

3.) $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$.

Az átviteli elv segítségével bizonyítható az alábbi tétel:

(T) Ha f és g folytonos az $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ pontban és $\underline{a}$ torlódási pontja $D_f \cap D_g$-nek, akkor

$f+g$ folytonos az $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ pontban,
$f \cdot g$ folytonos az $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ pontban,
ha $g(\underline{a}) \neq 0$, akkor $\dfrac{f}{g}$ folytonos az $\underline{a} \in D_f \cap D_g$ pontban.

$(\neg\text{B})$

(Pl.) $f(x,y) = y$ folytonos $\underline{a} = (a,b)$-ben.

Ugyanis

$|f(x,y) - f(a,b)| = |y-b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \varepsilon$, ha $|\underline{x}-\underline{a}| < \varepsilon$,

azaz $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ választható.

Hasonlóan látható, hogy az $f(x,y)=x$ is folytonos $\underline{a}=(a,b)$-ben, illetve hogy $f(\underline{x})=x_i$ folytonos $\underline{a}$-ban, $i=1,2,...,n$.

Ⓜ A fenti tételből következik, hogy x^m, y^k valamint $x^m\cdot y^k$ is folytonosak és így ezek konstansszorosai, összegei is folytonosak. Tehát az m-edfokú, k változós polinomok folytonosak.
Például a

$$p_4(x,y,z)=x^3z+5xyz-4z^2+6y-\sqrt{2}$$

háromváltozós, negyedfokú (változói összességében) polinom folytonos.

Az $r(\underline{x})=\dfrac{p_m(\underline{x})}{p_k(\underline{x})}$ (két polinom hányadosa) racionális tört kifejezés is folytonos, ha a nevező nem nulla.

(Pl.) Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Megoldás:
Az előző megjegyzésből következik, hogy az f függvény minden $(x,y)\neq(0,0)$ pontban folytonos, csak a $(0,0)$ pontban kell vizsgálnunk. Ott az átviteli elv alapján belátható, hogy a határérték nem létezik és így a függvény a $(0,0)$ pontban nem folytonos.

$x_n\to 0,\ y_n=x_n$ pontsorozat mentén a függvény

$$f(x_n,y_n)=\frac{x_ny_n}{x_n^2+y_n^2}=\frac{x_nx_n}{x_n^2+x_n^2}\to\frac{1}{2},$$

míg az $x_n\to 0,\ y_n=2x_n$ pontsorozat mentén a függvény

$$f(x_n,y_n)=\frac{x_n2x_n}{x_n^2+4x_n^2}\to\frac{2}{5}.$$

A tételben szereplő b nem lehet egyszerre $1/2$ és $2/5$ is.

Ezt az okoskodást megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az f függvényt az $y=mx$ mentén vizsgálva az eredmény függ az m-től, ezért a limesz nem létezik:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ y=mx} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

valóban függ az m-től.
(Az előbbi meggondolásban $m=1$-et, illetve $m=2$-t választottunk.)

•••

Pl.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{3x^4+4y^4}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Megoldás:

$x = 0$ mentén: $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$y = x$ mentén: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{3x^4+4x^4} = \dfrac{1}{7} \neq 0 \implies \nexists$ a határérték.

Vagy $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{3x^4+4m^4x^4} = \frac{m^2}{3+4m^4} \quad \text{függ } m\text{-től} \quad \implies \quad \nexists \text{ a határérték.}$$

•••

Ⓜ A $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ jelentése, hogy rögzített y mellett x tart a nullába, tehát a függvényt egy x-tengellyel párhuzamos egyenes mentén vizsgáljuk.

Pl.

$$\lim_{(x,y,z)\to \underline{0}} \frac{x+y+2z}{x-z+xy} = ?$$

Megoldás:

$$\lim_{z\to 0} \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x+y+2z}{x-z+xy} = \lim_{z\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{x+2z}{x-z} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{-z} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \lim_{z\to 0} \frac{x+y+2z}{x-z+xy} = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{x+y}{x+xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \neq -2$$

$\implies$ Nem létezik a határérték.

A fenti, úgynevezett ismételt limeszek jelentése, hogy a tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén vizsgáltuk a függvényt. Ezért ha azonos értéket kaptunk volna, abból még nem következne a határérték létezése. Például az $x = v_1t\,,\ y = v_2t\,,\ z = v_3t\,,\ t \to 0$ egyenes mentén lehetne más a határérték.

•••

Pl.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2\,x\,y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] \quad 0 \quad , & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

Megoldás: $x_n = \varrho_n \cos\varphi_n\,,\quad y_n = \varrho_n \sin\varphi_n\,,\quad \varphi_n$ tetsz., $\varrho_n \to 0$ egy tetszőleges $(0,0)$-hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk $f(x_n,y_n)$ konvergenciáját:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{2\varrho_n^3 \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{2\,\varrho_n}\; \underbrace{\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0,0),$$

tehát f folytonos $(0,0)$-ban.

•••

A határérték definíciójában alig okoz változást, ha a függvény $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^k$-ba képez le. Ilyenkor b helyett mindenütt $\underline{b}$-nek kell szerepelnie, ahol $\underline{b} \in \mathbb{R}^k$. Itt egy $\underline{a} \in \mathbb{R}^m$ képe $\mathbb{R}^k$-beli elem, ezért vektor és így $\underline{f}(\underline{a})$-val jelöljük. $\big(\underline{f}(\underline{a}) \in \mathbb{R}^k\,.\big)$

Az $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^k$-ba leképező függvény jelölése:

$$\underline{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k\,, \qquad \text{vagy} \qquad \underline{f} : D_{\underline{f}} \mapsto \mathbb{R}^k\,,\ D_{\underline{f}} \subset \mathbb{R}^m\,.$$

Összetett függvény

Ha az $\underline{f}$ függvény $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^k$-ba képez le és
ha a $\underline{g}$ függvény $\mathbb{R}^k$-ből $\mathbb{R}^n$-be képez le, akkor
az $\underline{g} \circ \underline{f}$ összetett függvény $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}^n$-be képez le, mégpedig

$$(\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{a}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{a}))\,, \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^m\,.$$

3.1. Összetett függvény folytonossága

Ⓣ Legyen $\underline{a}$ belső pontja $D_{\underline{f}} \subset \mathbb{R}^m$-nek, $\underline{f}(\underline{a}) = \underline{b}$ belső pontja $D_{\underline{g}} \subset \mathbb{R}^k$-nak.

Ha $\underline{f}: \quad D_{\underline{f}} \mapsto \mathbb{R}^k, \; D_{\underline{f}} \subset \mathbb{R}^m$ függvény folytonos $\underline{a}$-ban

és $\underline{g}: \quad D_{\underline{g}} \mapsto \mathbb{R}^n, \; D_{\underline{g}} \subset \mathbb{R}^k$ függvény folytonos $\underline{b} = \underline{f}(\underline{a})$-ban, akkor

$\underline{g} \circ \underline{f}: \quad D_{\underline{g}\circ\underline{f}} \mapsto \mathbb{R}^n, \; D_{\underline{g}\circ\underline{f}} \subset \mathbb{R}^m$ függvény folytonos $\underline{a}$-ban,

ahol $(\underline{g} \circ \underline{f})(\underline{a}) = \underline{g}(\underline{f}(\underline{a})) = \underline{g}(\underline{b})$ (¬B)

Például, ha egy folytonos egyváltozós függvénybe folytonos kétváltozós függvényt helyettesítünk, akkor folytonos függvényt kapunk. Ezért például az $f(x, y) = \sin(x + 2y^2)$ minden (x, y) −ban folytonos.

Feladatok:

1.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + 2y}{3x - y} = ?$

2.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = ?$

3.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^{\frac{3}{2}} y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} = ?$

4.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + 2y^2} = ?$

5.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin xy}{x^2 + y^2} = ?$

6.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} = ?$

7.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} = ?$

8.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x^2 y}{x^2 + y^2} = ?$

9.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = ?$

10.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sqrt{y}}{x^4 + y} = ?$

11.) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 y}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ y, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ Hol folytonos?

12.) $f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ c, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ $c =?$, hogy f mindenütt folytonos legyen

•••

3.2. Bolzano tétel

Ⓣ Ha f folytonos a H összefüggő nyílt halmazon és $\underline{a}, \underline{b} \in H$; $c \in [f(\underline{a}), f(\underline{b})]$, akkor
$$\exists\, \underline{\xi} \in H\,, \quad \text{hogy} \quad f(\underline{\xi}) = c.$$

Ⓑ Kössük össze $\underline{a}, \underline{b}$-t egy folytonos úttal. (Ilyen ∃, mert a halmaz összefüggő.)

$$g_{\underline{a},\underline{b}}: \quad \underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))\,; \qquad \underline{\varphi}(t_1) = \underline{a}, \quad \underline{\varphi}(t_2) = \underline{b}$$

Tekintsük $f(\underline{x})$-et a görbe mentén, így egy egyváltozós függvényt kapunk:

$$h(t) = (f \circ \underline{\varphi})(t) = f\left(\underline{\varphi}(t)\right) = f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right)$$

Erre a függvényre igaz (összetett függvény folytonossága):

$$h \in C^0_{[t_1,t_2]}; \qquad h(t_1) = f(\underline{a}), \quad h(t_2) = f(\underline{b}).$$

Így alkalmazható rá az „egyváltozós” Bolzano tétel $\Longrightarrow \exists\, u \in [t_1, t_2]$, hogy

$$h(u) = f\left(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u)\right) = c.$$

Vagyis $\quad \underline{\xi} = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u)) \in H \;$ és $\; f(\underline{\xi}) = c\,.$

■

Ⓣ $\underline{x}_0$ legyen D_f belső pontja!
f folytonos $\underline{x}_0$-ban, $f(\underline{x}_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \quad K_{\underline{x}_0,\delta}\,,$ hogy itt $f(\underline{x}) > 0$
(¬B)

3.3. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Weierstrass I. tétele:

Ⓣ H: kompakt halmaz és $f \in C^0_H \Longrightarrow f(H)$ is kompakt halmaz
(¬B)

Weierstrass II. tétele:

Ⓣ H: kompakt halmaz; $f \in C^0_H$. Ekkor f felveszi infimumát és szuprémumát.
Tehát $\exists\, \underline{\xi}, \underline{\eta} \in H$, hogy

$$f(\underline{\xi}) = \sup_{\underline{x} \in H} \{f(\underline{x})\}; \qquad f(\underline{\eta}) = \inf_{\underline{x} \in H} \{f(\underline{x})\}$$

(¬B)

(D) *Egyenletes folytonosság:* $f : D \mapsto \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}^m$
f egyenletesen folytonos a $H \subset D$ halmazon, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(\underline{x}_1) - f(\underline{x}_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in H \quad \text{és} \quad \varrho(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2| < \delta(\varepsilon).$$

(T) Kompakt halmazon folytonos függvény ott egyenletesen folytonos. (¬B)

●●●

(Pl.) $\alpha.$)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\beta.$)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a.) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

b.) Korlátos-e f az $x^2+y^2 \leq 1$ halmazon?

Megoldás:

$\alpha.$) a.)
$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^4 \cos^2\varphi_n \sin^2\varphi_n}{\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\varrho_n^2} \underbrace{\cos^2\varphi_n \sin^2\varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0,0),$$

tehát f folytonos $(0,0)$-ban.

b.) f folytonos az $x^2+y^2 \leq 1$ kompakt halmazon $\Longrightarrow$ korlátos (Weierstrass I. t.).

$\beta.$) a.) Most az előző módszer nehézkes. Inkább:

$x = 0$ mentén: $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$

$y = x$ mentén: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Longrightarrow \nexists$ a határérték.

Vagy $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^4+m^4x^4} = \frac{m^2}{1+m^4} \quad \text{függ } m\text{-től} \Longrightarrow \nexists \text{ a határérték.}$$

b.) Most nem alkalmazható Weierstrass I. tétele, mert a függvény nem folytonos $(0,0)$-ban.

1. megoldás:

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{számtani–mértani közép}}}{\le} \frac{x^2y^2}{2\sqrt{x^4y^4}} = \frac{1}{2} \qquad \text{Tehát korlátos.}$$

2. megoldás:
Az y tengely mentén: $f(0,y) \equiv 0$, tehát itt korlátos.
Az $y = mx$ egyenesek mentén: $f(x,mx) = \dfrac{m^2}{1+m^4}$ a függvényérték állandó
Ha $0 \le m^2 \le 1$: $\quad 0 \le \dfrac{m^2}{1+m^4} \le \dfrac{1}{1+0} = 1$
Ha $1 \le m^2$ $(m^2 \le m^4)$: $\quad 0 \le \dfrac{m^2}{1+m^4} \le \dfrac{1+m^4}{1+m^4} = 1$
És $f(0,0) = 0$.
A fentiekből következik a korlátosság.

Feladatok:

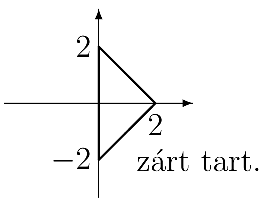
1.) $f(x,y) = \dfrac{xy}{2x^2+3y^2}$, ha $(x,y) \ne (0,0)$ és $f(0,0) = 0 \qquad T: \ |x| + |y| \le 1$

Folytonos-e a függvény a T tartományon?

2.) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2}$, ha $(x,y) \ne (0,0)$ és $f(0,0) = 0 \qquad T: \ |x| + |y| \le 1$

a.) Folytonos-e a függvény a T tartományon?
b.) Korlátos-e a függvény a T tartományon?
c.) Felveszi-e a függvény a T tartományon a $\sup\limits_{(x,y)\in T} \{f(x,y)\}$, $\inf\limits_{(x,y)\in T} \{f(x,y)\}$ értékeket?

3.) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x}}$, ha $x \ne 0$ és $f(0,y) = 1 \qquad T:$



$D_f = ?$

Folytonos-e a függvény a T tartományon?
Korlátos-e a függvény a T tartományon?

4. Többváltozós függvények deriválhatósága

4.1. Parciális deriváltak

Ⓓ *Az f függvény x_k szerinti parciális deriváltja:*

$$f_k(x_k) := f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) \quad \text{(egyváltozós függvény)}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}x_k}\right|_{x_k=a_k} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{\underline{x}=\underline{a}} = f'_{x_k}(\underline{a}) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m)}{h}$$

Speciálisan kétváltozós függvényre:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Geometriai tartalom ($z = f(x, y)$ kétváltozós esetre):

Tekintsük az $y = y_0$ feltételnek eleget tevő felületi görbét (síkmetszetet), tehát a

$$H_1 = \{(x, y_0, \underbrace{f(x, y_0)}_{f_1(x)})\} = \{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in D_f\,, y = y_0\,, z = f(x, y_0)\}$$

ponthalmazt. Legyen α ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjabeli érintőegyenesének hajlásszöge (az $y = y_0$ síkban) ! (L. 2.9 ábra e_1 egyenese!)
Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt:

$$\operatorname{tg}\alpha = f_1'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \text{az adott érintőegyenes irányába mutató vektor:}$$

$$\underline{v}_1 = [1, 0, f'_x(x_0, y_0)] = \underline{i} + f'_x(x_0, y_0)\,\underline{k}$$

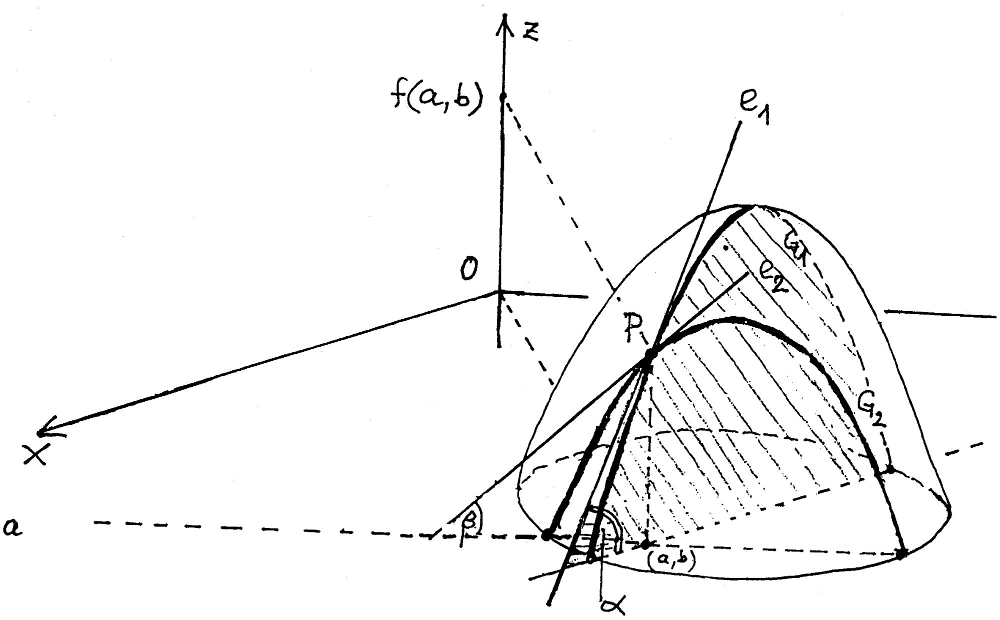
Most tekintsük az $x = x_0$ feltételnek eleget tevő felületi görbét, tehát a

$$H_2 = \{(x_0, y, \underbrace{f(x_0, y)}_{f_2(y)})\} = \{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in D_f\,, x = x_0\,, z = f(x_0, y)\}$$

ponthalmazt. Ezen görbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjabeli érintőegyenesének hajlásszöge (az $x = x_0$ síkban) legyen β. (L. 2.9 ábra e_2 egyenese!)
Az egyváltozós függvény deriváltjának geometriai tartalma miatt:

$$\operatorname{tg}\beta = f_2'(y_0) = f'_y(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \text{az adott érintőegyenes irányába mutató vektor:}$$

$$\underline{v}_2 = [0, 1, f'_y(x_0, y_0)] = \underline{j} + f'_y(x_0, y_0)\,\underline{k}$$



2. 9 ábra

Számoljuk most ki a két érintőegyenes által meghatározott sík egyenletét! Ez a sík áthalad a $P_0 = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ ponton és $\underline{n}$ normálvektora merőleges $\underline{v}_1$ -re és $\underline{v}_2$ -re is, tehát

$$\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0)\,\underline{i} - f'_y(x_0, y_0)\,\underline{j} + \underline{k}$$

Ennek (-1) -szeresével szoktunk dolgozni, így ennek a síknak egy egyenlete:

$$f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Ezt a síkot csak akkor fogjuk az f függvény (x_0, y_0) -hoz tartozó érintősíkjának nevezni, ha az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ ponton áthaladó, az adott pontban érintővel rendelkező összes felületi görbének a $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ pontbeli érintőegyenese illeszkedik erre a síkra. Ezt úgy érhetjük el, ha f -ről nem csak azt tesszük fel, hogy az (x_0, y_0) pontban léteznek a parciális deriváltjai, hanem azt is, hogy az f függvény itt totálisan differenciálható (lásd iránymenti deriváltak). A totális differenciálhatóságot a következő részben definiáljuk.

Példák parciális deriváltakra

Pl. $\boxed{f(x,y) = y^3\,\mathrm{e}^{-3x} + 2x^4 + 3\,(2y+1)^5\,, \qquad f'_x = ?, \quad f'_y = ?}$

$$f'_x(x,y) = y^3\,\mathrm{e}^{-3x}\,(-3) + 8x^3\,, \qquad f'_y(x,y) = 3\,y^2\,\mathrm{e}^{-3x} + 15\,(2y+1)^4\,2$$

Pl. $\boxed{f(x,y) = 2x^3\cos\dfrac{x}{y} + x^2 + y^3\,, \qquad f'_x = ?, \quad f'_y = ?}$

$$f'_x = 6x^2\cos\frac{x}{y} + 2x^3\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y} + 2x\,, \qquad y \neq 0$$

$$f'_y = 2x^3(-\sin\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2}) + 3y^2\,, \qquad y \neq 0$$

Pl.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2\,y}{x^2+y^2} + 2x + 3\,, & \text{ha}(x,y) \neq (0,0) \\ 3\,, & \text{ha}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$f'_x(0,0) = ?\,, \quad f'_y(0,0) = ?$

Megoldás:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0+2h+3-3}{h} = 2$$

Vagy: $\quad f_1(x) = f(x,0) = \begin{cases} 2x+3\,, & \text{ha } x \neq 0 \\ 3\,, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

Tehát $f_1(x) = 2x+3$: $\quad f'_x(0,0) = f'_1(0) = 2$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\underbrace{\frac{\frac{4k}{k^2}+3-3}{k}}_{=\frac{4}{k^2}} = \infty \quad \nexists$$

Vagy: $\quad f_2(y) = f(0,y) = \begin{cases} \dfrac{4y}{y^2} + 3 = \dfrac{4}{y} + 3\,, & \text{ha } y \neq 0 \\ 3\,, & \text{ha } y = 0 \end{cases}$

Ez a függvény nem folytonos $y = 0$-ban, így ott nem is deriválható.
Tehát $f'_y(0,0) = f'_2(0) \quad \nexists$

●●●

Feladatok:

1.) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2-2y}}{x^2+6}$ $\qquad f'_x(x,y) = ?\ ,\quad f'_y(x,y) = ?$

2.) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad f'_x(x,y) = ?$

3.) $f(x,y) = \sqrt{2x^2+y^4}$ $\qquad f'_x(0,0) = ?\ ,\quad f'_y(0,0) = ?$

4.) $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$ $\qquad f'_x(x,y) = ?$

5.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+3y^2} + 3x\,, & \text{ha}(x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha}(x,y) = (0,0) \end{cases}$

a.) $f'_x(x,y) = ?$ $\qquad f'_y(x,y) = ?$

b.) Folytonos-e f a $(0,0)$ pontban?

6.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\,y^2}{x^2+y^2}\,, & \text{ha}(x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha}(x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f'_x(x,y) = ?$ $\qquad f'_y(x,y) = ?$

4.2. Totális deriválhatóság

Egyváltozós esetben:

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{o(h)}\ ;$$

A független h-tól; $\quad \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Ez a definíció általánosítható m-változós esetre.

Ⓓ

$f: D \mapsto \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^m, \quad \underline{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \operatorname{int} D, \quad \underline{h} = (h_1, \ldots, h_m), \quad \underline{a} + \underline{h} \in D$

f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = A_1 h_1 + \cdots + A_m h_m + \varepsilon_1 h_1 + \cdots + \varepsilon_m h_m$$

vagy vektorosan

$$\boxed{\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}}$$

ahol $\underline{A} = [A_1, \ldots, A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1(\underline{h}), \ldots, \varepsilon_m(\underline{h})] \to \underline{0}$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$.

$(\underline{A} = \operatorname{grad} f)$

Ⓜ Mivel $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h} = \sum\limits_{k=1}^{m} \varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k = o(|\underline{h}|)$, ugyanis

$$\left| \frac{\underline{\varepsilon}(\underline{h})\underline{h}}{|\underline{h}|} \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \frac{h_k}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_k^2 + \cdots + h_m^2}} \right| \le \sum_{k=1}^{m} |\varepsilon_k| \frac{|h_k|}{\sqrt{\cdots}} \le \sum_{k=1}^{m} |\varepsilon_k| \to 0,$$

ezért a definíció az alábbi alakban is írható:

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \varepsilon \quad \text{és} \quad \frac{\varepsilon}{|\underline{h}|} \to 0, \text{ ha } \underline{h} \to \underline{0}$$

vagy

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|)$$

●●●

Ⓣ

Legyen $\underline{a}$ a D_f értelmezési tartomány belső pontja!
Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható
$\Longrightarrow$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

(Tehát a totális deriválhatóság szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése.)

Ⓑ Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h} := (0, 0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = A_k \cdot h_k + \varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(a_1,\ldots,a_k+h_k,\ldots,a_m)-f(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_m)}{h_k}=A_k+\varepsilon_k(\underline{h})$$

és ebből $h_k \to 0$ ($\Longrightarrow$ $\underline{h} \to \underline{0}$) esetén $f'_{x_k}(\underline{a}) = A_k$ adódik.

Tehát $\quad \operatorname{grad} f\big|_{\underline{a}} = \underline{A} = [f'_{x_1},\ldots,f'_{x_m}]$ ∎

Ⓣ $\boxed{\text{Ha } f \ \underline{a}\text{-ban totálisan deriválható} \Longrightarrow f \ \underline{a}\text{-ban folytonos}}$

Ⓑ $f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$

$$\underbrace{\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} f(\underline{a}+\underline{h})}_{=\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \left(f(\underline{a}) + \underline{A}\cdot\underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}\right) = f(\underline{a})$$

Tehát a határérték = a helyettesítési értékkel. ∎

●●●

Kitérő:
A valós egyváltozós függvényre vonatkozó Lagrange-féle középértéktételt felírjuk egy másik alakban.
Ha f differenciálható $[a,b]-ben:$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi);\ \ b := a+h \quad \Longrightarrow \quad f(a+h)-f(a) = f'(a+\vartheta h)\cdot h, \quad 0<\vartheta<1$$

(Szükségünk lesz rá a következő tétel bizonyításánál.)

Elégséges tétel totális deriválhatóságra:

Ⓣ $f:\ D \mapsto \mathbb{R},\ \ D\subset\mathbb{R}^m,\ \ \underline{a}\in \operatorname{int}D$
Ha f'_{x_i}-k léteznek és folytonosak $K_{\underline{a}}$-ban, akkor f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.

Ⓑ Csak $m=2$ esetére bizonyítjuk (az általános eset is hasonlóan bizonyítható)

$\underline{a} = (a_1,a_2)\,;\quad \underline{h} = (h_1,h_2)\,;\quad f(\underline{x}) = f(x,y)$

$K_{\underline{a}}$-ban $\quad f'_x(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{a}]{\underline{x}} f'_x(\underline{a});\quad f'_y(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{a}]{\underline{x}} f'_y(\underline{a})$

Legyen $\underline{a}+\underline{h}\in K_{\underline{a}}$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1,a_2) =$$

$$= \underbrace{\big(f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)\big)}_{\substack{\text{1. változó rögzített, 2. változó szerint folytono-}\\ \text{san deriválható} \Longrightarrow \text{ L. féle k.é.t. alkalmazható}}} + \underbrace{\big(f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)\big)}_{\text{2. változó rögzített, } \dots} =$$

$$= \Big(f'_y(a_1+h_1,a_2+\vartheta_2 h_2)\cdot h_2\Big) + \big(f'_x(a_1+\vartheta_1 h_1,a_2)\cdot h_1\big) =$$

$$(0<\vartheta_1,\vartheta_2<1)$$

A parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$= \Big(f'_y(a_1,a_2)+\varepsilon_2\Big)\cdot h_2 + \big(f'_x(a_1,a_2)+\varepsilon_1\big)\cdot h_1 =$$

$$= f'_x h_1 + f'_y h_2 + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2 = \underline{A}\,\underline{h} + \underline{\varepsilon}\,\underline{h} \quad \text{és} \quad \underline{\varepsilon} \xrightarrow[\underline{h}\to\underline{0}]{} \underline{0}$$

Ez pedig a totális deriválhatóság. ■

•••

Példák totális deriválhatóságra

Pl. $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \operatorname{grad} f = ?}$ ($\equiv$ Hol differenciálható f ?)

$f'_x=2x$, $f'_y=2y$ mindenütt léteznek és folytonosak $\Longrightarrow$ $\operatorname{grad} f$ mindenütt $\exists$
(Tehát f mindenütt deriválható.)

$$\operatorname{grad} f = 2x\underline{i}+2y\underline{j}$$

Vegyük észre, hogy $\operatorname{grad} f$ mindig sugár irányú. Ez nem véletlen, mert látni fogjuk, hogy $\operatorname{grad} f$ mindig $\perp$ a szintalakzatra és az most éppen origó középpontú kör.

Pl. $\boxed{f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+1)\,\mathrm{e}^y} \qquad \operatorname{grad} f = ?}$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{y(x^2+1)\,\mathrm{e}^y - xy\,2x\,\mathrm{e}^y}{(x^2+1)^2\,\mathrm{e}^{2y}} \\ f'_y &= \frac{x(x^2+1)\,\mathrm{e}^y - xy(x^2+1)\,\mathrm{e}^y}{(x^2+1)^2\,\mathrm{e}^{2y}} \end{aligned}\right\}\text{mindenütt } \exists \text{ és folytonos}$$

Tehát mindenütt deriválható: $\operatorname{grad} f = f'_x\,\underline{i}+f'_y\,\underline{j}=\cdots$

Pl. $\boxed{\text{Differenciálható-e a } (0,0) \text{ pontban az } f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \text{ függvény?}}$

Nem differenciálható, mert $\nexists$ $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, tehát nem teljesül az egyik szükséges feltétel.

$$\text{Ui. pl.:} \quad f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\nexists$$

Pl. $f(x,y)=\begin{cases} \operatorname{sh}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } x^2+y^2\neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x^2+y^2=0 \end{cases}$

a.) Írja fel f'_x-et, ahol az létezik!

b.) Totálisan deriválható-e $(0,0)$-ban?

Megoldás:

a.) $y=0$ mentén kell folytonosnak lennie, hogy létezhessen $f'_x(0,0)$: $f(x,0)\equiv 0$ és így $f'_x(0,0)\ \exists$.
Vagy a definícióval:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor $f'_x(x,y)\ \exists$ és folytonos:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} 2\,\dfrac{y\,(x^2+y^2)-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\,\operatorname{ch}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b.) A függvény nem folytonos $(0,0)$-ban $\Longrightarrow$ totálisan nem deriválható $(0,0)$-ban. Ui.:

$$\lim_{\substack{\varrho_n\to 0\\ \varphi_n \text{ tetsz.}}}\operatorname{sh}\frac{2\varrho_n^2\cos\varphi_n\sin\varphi_n}{\varrho_n^2}=\operatorname{sh}(\sin 2\varphi_n)$$

függ φ_n-től, tehát $\nexists$ a határérték.

Pl. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}+3y\,, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a.) $f'_x(0,0)=?$ $\qquad f'_y(0,0)=?$

b.) $\operatorname{grad} f|_{(0,0)}=?$

Megoldás:

a.)

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{3k-0}{k} = 3$$

b.) A szükséges feltétel (parciális deriváltak létezése, illetve f folytonossága) teljesül, így lehet deriválható.
$m = 2$ esetre (x_0, y_0)-ra a totális deriválhatóság:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A \cdot h + B \cdot k + \varepsilon = f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k + \varepsilon$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Jelenleg $(x_0 = 0,\ y_0 = 0)$:

$$f(h,k) - f(0,0) = \frac{h^2 k}{h^2 + k^2} + 3k - 0 \overset{?}{=} 0 \cdot h + 3 \cdot k + \varepsilon$$

Tehát $\varepsilon = \dfrac{h^2 k}{h^2 + k^2}$. Teljesül-e rá az előírt feltétel?

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{\varrho_n^3 \cos^2\varphi_n \sin\varphi_n}{\varrho_n^3} = \nexists,$$

mert függ φ_n-től $\implies$ $\operatorname{grad} f|_{(0,0)} \nexists$ (nem deriválható a függvény $(0,0)$-ban).
Bár a parciálisok léteznek, így formálisan felírható

$$f'_x(0,0)\, \underline{i} + f'_y(0,0)\, \underline{j}\,, \quad \text{de ez} \quad \neq \operatorname{grad} f|_{(0,0)}\text{-val!}$$

Pl.

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \sin \dfrac{2x^3 y}{x^2 + y^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{Hol differenciálható?}}$$

Megoldás:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Így

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \left(\cos \dfrac{2x^3 y}{x^2 + y^2}\right) \cdot \dfrac{6x^2 y(x^2 + y^2) - 2x^3 y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \left(\cos \dfrac{2x^3y}{x^2+y^2}\right) \cdot \dfrac{2x^3(x^2+y^2) - 2x^3y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f'_y(0,0)$ mint előbb, vagy:

$f(0,y)$ deriválható-e $y=0$-ban? $f'_y(0,0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \underbrace{f(0,y)}_{\equiv 0}\Big|_{y=0} = 0$

($f'_x(0,0)$-át is lehetett volna így.)

Ha $x^2+y^2 \neq 0$, akkor f'_x, f'_y $\exists$ és folytonos $\Longrightarrow$ f totálisan deriválható.

$(0,0)$-ban lehetne próbálkozni f'_x, f'_y folytonosságával (most az lenne), de mi most a definícióval nézzük meg. (Ez általánosabb, mert az előző tétel csak elégséges, alkalmazása így nem mindig vezet eredményre.)

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = \sin \frac{2h^3k}{h^2+k^2} - 0 \overset{?}{=} 0 \cdot h + 0 \cdot k + \varepsilon$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin \frac{2h^3k}{h^2+k^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{tetsz.}}} \frac{1}{\varrho_n} \sin\left(\frac{\varrho_n^4}{\varrho_n^2} 2\cos^3\varphi_n \sin\varphi_n\right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{tetsz.}}} \underbrace{\underbrace{\frac{2\varrho_n^2 \cos^3\varphi_n \sin\varphi_n}{\varrho_n}}_{\substack{2\,\varrho_n \underbrace{\cos^3\varphi_n \sin\varphi_n}_{\text{korl.}} \\ \downarrow \\ 0}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\frac{\sin(2\,\overset{\substack{0 \\ \uparrow}}{\varrho_n^2} \overbrace{\cos^3\varphi_n \sin\varphi_n}^{\text{korl.}})}{2\varrho_n^2\cos^3\varphi_n\sin\varphi_n}}_{\substack{1,\,\text{mert} \\ \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1}} = 0$$

Tehát $(0,0)$-ban is totálisan deriválható.

•••

4.3. Differenciál (teljes differenciál, elsőrendű differenciál)

Legyen $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható $\underline{x}$-ben, tehát:

$$\Delta f = f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x}) = \underbrace{\underline{A}\cdot\underline{h}}_{\text{főrész}} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h} =$$

$$= \underbrace{f'_{x_1}(\underline{x})\,h_1 + f'_{x_2}(\underline{x})\,h_2 + \cdots + f'_{x_m}(\underline{x})\,h_m}_{\text{főrész}} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}\,, \text{ ahol } \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\varepsilon}(\underline{h}) = \underline{0}\,.$$

(D) Az f függvény $\underline{x}$ pontbeli differenciálja a $\underline{h}$ megváltozásnál:

$$df\,(\underline{x},\underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{x})\,h_1 + f'_{x_2}(\underline{x})\,h_2 + \cdots + f'_{x_m}(\underline{x})\,h_m = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\underline{x})\,h_k$$

(a függvénymegváltozás főrésze).
Ez egy $2m$-változós függvény. Rögzített $\underline{x}$ mellett df homogén lineáris függvénye $\underline{h}$- nak.

Alkalmazása: Δf-et szokás df-fel közelíteni $\quad (\Delta f \approx df)$.

Tehát a totálisan differenciálható függvény megváltozása közelíthető differenciáljával, a független változók megváltozásának homogén lineáris függvényével. Például hibaszámításnál alkalmazzuk.

Egyéb jelölések:

$$df\,(\underline{x},\underline{\Delta x}) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\underline{x})\,\Delta x_k$$

$$df\,(\underline{x},\underline{dx}) = \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\underline{x})\,dx_k$$

Indoklás az utóbbi jelöléshez:

Ha az $f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_m) = x_k$ koordináta függvényről van szó, akkor

$$df = d(x_k) = dx_k = 1\cdot\Delta x_k$$

4.4. Felület érintősíkja

A kétváltozós függvényt felülettel szemléltettük, ezért a $\Delta f \approx df$ közelítésnek kétváltozós függvény esetén geometriai tartalmat adhatunk.

Legyen a kétváltozós $f(x,y)$ függvény totálisan deriválható az $P_0\,(x_0,y_0)$ pontban! Tekintsük a $z = f(x,y)$ által meghatározott felület $P_0^*(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ felületi pontját!
Az előzőekben láttuk, hogy

$$\Delta f \;=\; f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) \;\approx\; f'_x(x_0,y_0)\, h + \, f'_y(x_0,y_0)\, k \;=\; df\,((x_0,y_0),(h,k))$$

Vagy más jelölésekkel:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \;\approx\; f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x + \, f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y$$

$x = x_0+\Delta x\,,\ y = y_0+\Delta y$ jelölés esetén:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \;\approx\; f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \, f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

Tehát

$$f(x,y) \;\approx\; f(x_0,y_0) \;+\; f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \, f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

Ennek geometriai tartalma, hogy a $z = f(x,y)$ felületet a

$$z = f(x_0,y_0) \;+\; f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \, f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

síkkal közelítjük, ha $x-x_0$ és $y-y_0$ kicsi. Tehát az $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ felületi pont egy elég kicsiny sugarú környezetében f grafikonja közelítőleg ezzel a síkkal helyettesíthető.

Ennek a síknak a neve: érintősík.
Átrendezve a sík egyenletét és összefoglalva az előzőeket:

Ⓓ A totálisan deriválható f kétváltozós függvény (x_0,y_0) ponthoz tartozó érintősíkja az

$$f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \, f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0) \;-\; (z - f(x_0,y_0)) \;=\; 0$$

egyenlettel adott sík.

Kitérő:
Az $\underline{n} = [a,b,c] = a\,\underline{i} + b\,\underline{j} + c\,\underline{k}$ normálvektorú, (x_0,y_0,z_0) ponton áthaladó sík egyenlete:

$$a\,(x-x_0) \;+\; b\,(y-y_0) \;+\; c\,(z-z_0) \;=\; 0$$

Ezzel összevetve látjuk, hogy az érintősík átmegy a $P_0^*(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ felületi ponton és normálvektora:

$$\underline{n} = f'_x(x_0,y_0)\,\underline{i} + f'_y(x_0,y_0)\,\underline{j} - \;\underline{k}\ .$$

Ⓜ Már tudjuk, hogy az érintősík tartalmazza két felületi görbe érintőegyenesét. (L. parciális deriváltak geometriai tartalmát!) Az is belátható, hogy minden, a $P_0^*(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ felületi ponton áthaladó , érintővel rendelkező felületi görbe érintőegyenese benne van ebben a síkban.

Ⓜ Tehát összefoglalva a $\Delta f \approx df$ közelítés geometriai tartalma:

$m=1$ esetén: érintőegyenessel való közelítés,
$m=2$ esetén: érintősíkkal való közelítés.

●●●

(Pl.) Legyen

$$f(x,y) = y^{2x} \quad \text{és} \quad P_0\,(-1,1)$$

a.) Írja fel az f függvény P_0 pontbeli gradiensét, ha az létezik!

b.) $df\ ((-1,1),(h,k)) = ?$

c.) Írja fel a P_0 ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

Megoldás:

$f(x,y) = y^{2x} = \mathrm{e}^{2x\ \ln y}\ , \quad (D_f:\ y>0,\ x$ tetszőleges$)$

a.) $f'_x = \mathrm{e}^{2x\ \ln y}\ 2\ \ln y = y^{2x}\ 2\ \ln y\ , \quad f'_y = 2x\, y^{2x-1}$

A parciálisok léteznek és folytonosak K_{P_0}-ban $\implies$ $\exists\ \mathrm{grad} f(P_0)$

$\mathrm{grad} f(P_0) = f'_x(-1,1)\,\underline{i} + f'_y(-1,1)\,\underline{j} = 0\,\underline{i} - 2\,\underline{j} = -2\,\underline{j}$

b.) $df\ ((-1,1),(h,k)) = f'_x(-1,1)\ h + f'_y(-1,1)\ k = -2k$

c.) $$f'_x(-1,1)\,\Big(x-(-1)\Big) + f'_y(-1,1)\,\Big(y-1\Big) - \Big(z - f(-1,1)\Big) = 0$$

$$0\cdot\big(x+1\big) + (-2)\,\big(y-1\big) - \big(z-1\big) = 0 \quad\implies\quad 2y+z=3$$

●●●

4.5. Magasabbrendű parciális deriváltak

Az m-változós függvény bármely parciális deriváltfüggvénye újból m-változós függvény. Ezért beszélhetünk ennek a függvénynek is a parciális deriváltjairól. Így jutunk el a másodrendű parciális deriváltakhoz.

Példa kétváltozós függvény esetére: $f(x,y) = \mathrm{e}^{2x}\ \cos 2y + x^2 - y^2$ esetén:

$f'_x(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{2x}\ \cos 2y + 2x\ ;\qquad f'_y(x,y) = -2\,\mathrm{e}^{2x}\ \sin 2y - 2y$

$$f''_{xx} := \Big(f'_x\Big)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\,\mathrm{e}^{2x}\ \cos 2y + 2$$

$$f''_{yy} := \Big(f'_y\Big)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\,\mathrm{e}^{2x}\ \cos 2y - 2$$

Tiszta másodrendű parciális deriváltak: f''_{xx} , f''_{yy}

$$f''_{xy} := \left(f'_x\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -4\,\mathrm{e}^{2x}\ \sin 2y$$

$$f''_{yx} := \left(f'_y\right)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -4\,\mathrm{e}^{2x}\ \sin 2y$$

Vegyes másodrendű parciális deriváltak: f''_{xy} , f''_{yx}

A másodrendű parciálisok újra kétváltozós függvények!

Vegyük észre, hogy a vegyes másodrendű parciális deriváltak megegyeznek, tehát az eredmény nem függ a differenciálás sorrendjétől. Ez nem véletlen. Mint látni fogjuk, hogy elég ”szép” függvény esetén ez mindig így van. (Young tétel.)

Másrészt vegyük észre, hogy most a tiszta másodrendű parciális deriváltak összege minden (x, y) pontban nullát ad.

$$f''_{xx}(x,y)\ +\ f''_{yy}(x,y)\ =\ 0$$

Tehát f megoldása az úgynevezett síkbeli Laplace differenciálegyenletnek:

$$\Delta\, u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

Ha ez a tulajdonság teljesül, a függvényt *harmonikus függvénynek* nevezzük. Tehát a síkbeli Laplace egyenlet megoldásai a harmonikus függvények. Nagy szerepet játszanak az ilyen függvények a komplex függvénytanban és a potenciálelméletben.

És most általánosságban is definiáljuk a másodrendű parciális deriváltakat!

Ⓓ A $g(\underline{x}) = f'_{x_k}(\underline{x}) = \dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}$ m- változós függvény x_l változó szerinti parciális derivált függvénye:

$$\frac{\partial g(\underline{x})}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_l\,\partial x_k} = f''_{x_k\,x_l}(\underline{x})$$

Magasabbrendű parciális deriváltak értelemszerűen definiálhatók.

Young tétel:

Ⓣ Ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ m- változós fügvény összes $\dfrac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_l\,\partial x_k}$ másodrendű parciális deriváltja létezik és folytonos $K_{\underline{a}}$-ban, akkor

$$\left.\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_l\,\partial x_k}\right|_{\underline{a}} = \left.\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_k\,\partial x_l}\right|_{\underline{a}}$$

(¬B)

Ⓓ $f \in C^2_{K_{\underline{a}}}$ (f kétszer folytonosan deriválható) jelentése:

a parciálisok másodrenddel bezárólag léteznek és folytonosak $K_{\underline{a}}$-ban.

$f \in C^r_{K_{\underline{a}}}$ azt jelenti, hogy
f-nek valamennyi r-edrendű parciális deriváltja folytonos $K_{\underline{a}}$-ban.

Következmény:
Ha f kétváltozós függvény és $f \in C^3_{K_{\underline{a}}}$, akkor

$$f'''_{xxy}(\underline{a}) = f'''_{xyx}(\underline{a}) = f'''_{yxx}(\underline{a}) \ .$$

Ha $f \in C^r_{K_{\underline{a}}}$, akkor f-nek az r-edrendű parciális deriváltjai közül mindazok megegyeznek, amelyek csak a deriválások sorrendjében különböznek egymástól.

●●●

Feladatok

1.) Melyik állítás igaz? A hamis állításokra keressen ellenpéldát! Az igaz állításokhoz keresse meg ebben az anyagban a megfelelő tételt! (A feladatok most csak kétváltozós függvényekre szólnak, de hasonló állítások többváltozós esetre is megfogalmazhatók.)

a.) f folytonos (x_0, y_0)-ban $\Longrightarrow$ f totálisan differenciálható (x_0, y_0)-ban

b.) f folytonos (x_0, y_0)-ban $\Longleftarrow$ f totálisan differenciálható (x_0, y_0)-ban

c.) f folytonos (x_0, y_0)-ban $\Longrightarrow$ $\exists\ f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$

d.) f folytonos (x_0, y_0)-ban $\Longleftarrow$ $\exists\ f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$

e.) f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban $\Longrightarrow$ $\exists\ f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$

f.) f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban $\Longleftarrow$ $\exists\ f'_x(x_0, y_0)$ és $f'_y(x_0, y_0)$

g.) f'_x, f'_y $\exists$ és folytonos $K_{(x_0,y_0)}$-ban $\Longrightarrow$ f totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban

2.) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3$

a.) Tekintsük azt a térgörbét, melyet a fenti függvény által meghatározott felületből az $y = 1$ sík kimetsz. Írja fel ezen görbe $x = 2$ értékhez tartozó pontjában az érintőegyenes egyenletét!

b.) Az előzőhöz hasonlóan az $x = 2$ sík által kimetszett felületi görbe $y = 1$ pontjabeli érintőegyenesét írja fel!

c.) Írja fel a $(2, 1)$ ponthoz tartozó felületi pontbeli érintősík egyenletét!

4.6. Vektor-vektor függvény deriválhatósága *(derivált tenzor)*

Az összetett függvény folytonosságánál láttuk, hogy a külső függvény egy vektor-vektor függvény. Ezért először a vektor-vektor függvény differenciálhatóságával kell foglalkoznunk. A differenciálhatóság definíciójában a függvény megváltozását lineáris függvénnyel közelítettük. Most is ilyen lesz a definíció, ezért meg kell értenünk, hogy melyek a lineáris vektor-vektor függvények. A vektor-vektor függvényeket szokás leképezésnek vagy transzformációnak is nevezni.

Ⓜ $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k, \quad P\underline{x} = \underline{y}$
leképezést lineárisnak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} &P(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) = P(\underline{x}_1) + P(\underline{x}_2) \\ &P(\lambda\,\underline{x}) = \lambda\,P(\underline{x}) \qquad \forall\,\underline{x},\,\underline{x}_1,\,\underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A $P : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ lineáris leképezéseket mátrixszal lehet megadni:

$$P\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{x}\,,$$

ahol $\underline{\underline{P}}$-nek n darab oszlopa és k darab sora van.

Ⓜ Ebben a részben mátrixokat és vektorokat szorzunk össze, ezért nem mindegy, hogy sor- vagy oszlopvektorról van-e szó. Megállapodunk, hogy $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektort jelöl, az $\underline{x}^T$ transzponáltja pedig sorvektor.

Ⓜ Egy $\underline{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ leképezést differenciálhatónak nevezünk az $\underline{a}$ pontban, ha $K_{\underline{a},\delta}$-ban a függvény megváltozása lineáris függvénnyel „jól” közelíthető.

Pl. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ esetén $f'(x_0)\,h$ (h-nak lineáris függvénye) közelíti az $\Delta f = f(a+h) - f(a)$ értéket. A közelítés hibája $\varepsilon(h)\,h$, ahol $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ehhez hasonlóan definiáljuk az $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ függvény differenciálhatóságát, a lineáris függvénnyel való közelítést mátrixszal adjuk meg.

Ⓓ Az $\underline{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ függvény <u>differenciálható</u> az értelmezési tartomány $\underline{a}$ belső pontjában, ha megváltozása felírható az alábbi alakban:

$$\underline{f}(\underline{a} + \underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{h} + \underline{\underline{\varepsilon}}\,\underline{h}, \qquad \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{0}}\,,$$

ahol $\underline{\underline{A}}$ független $\underline{h}$-tól. $\underline{\underline{A}}$ neve: derivált mátrix.

A bal oldal l-edik koordinátája egy f_l skalár-vektor függvény megváltozása, amelyről már tanultuk, hogy a függvény $\underline{a}$-beli gradiensével jól közelíthető, mégpedig:

$$f_l(\underline{a} + \underline{h}) - f_l(\underline{a}) = \underline{\operatorname{grad}}^T f_l\big|_{\underline{a}}\ \underline{h} + \underline{\varepsilon}_l^T\ \underline{h}\,, \qquad \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \underline{\varepsilon}_l = \underline{0}\,,$$

ahol az

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_l \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix}, \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1^T \\ \underline{\varepsilon}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_l^T \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_k^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{l1} & \varepsilon_{l2} & \dots & \varepsilon_{ln} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{k1} & \varepsilon_{k2} & \dots & \varepsilon_{kn} \end{bmatrix}$$

jelölést használtuk.
$l = 1, 2, \dots, k$ választásával kapjuk:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathrm{grad}}^T f_1 \\ \underline{\mathrm{grad}}^T f_2 \\ \vdots \\ \underline{\mathrm{grad}}^T f_k \end{bmatrix}_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{a}}$$

$\underline{\underline{A}}$-t az $\underline{f}$ függvény $\underline{a}$ pontbeli derivált tenzorának (mátrixának) nevezzük.

Ha $n = k$, akkor az f függvény az n dimenziós euklideszi teret önmagába képezi le. (Lásd új változók bevezetése többes integrálok esetén!) Ilyenkor a derivált mátrixot Jacobi mátrixnak nevezzük, determinánsát pedig Jacobi determinánsnak.

Például, ha $n = k = 3$: $\quad \underline{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ transzformáció esetén

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{a}} \overset{\text{jel}}{=} \left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)} \right|_{\underline{a}} \qquad : \text{ Jacobi-mátrix}$$

$$\det \left. \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)} \right|_{\underline{a}} \qquad : \text{Jacobi-determináns}$$

Ⓜ Az $\underline{\underline{A}}$ derivált mátrix skalárinvariánsát divergenciának $(\mathrm{div}\,\underline{\underline{A}})$, vektorinvariánsát pedig rotációnak $(\mathrm{rot}\,\underline{\underline{A}})$ nevezzük.

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{A}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \mathrm{div}\,\underline{f}$$

$$\operatorname{rot} \underline{\underline{A}} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) \underline{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) \underline{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) \underline{k} = \operatorname{rot} \underline{f}$$

A $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ nabla szimbólum segítségével

$$\operatorname{div} \underline{f} = \underline{\nabla}\, \underline{f}, \qquad \operatorname{rot} \underline{f} = \underline{\nabla} \times \underline{f}$$

alakban írható és könnyebben megjegyezhető.

Speciálisan, ha $n = 3$, $k = 1$: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ skalár-vektor függvény derivált mátrixa egyetlen sorból áll

$$\underline{\underline{A}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right]_{\underline{a}} = \underline{\operatorname{grad}}^T f_{\underline{a}}$$

4.7. Összetett függvény deriválhatósága *(láncszabály)*

T_1

Ha $\underline{\varphi}: \quad \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ és derivált tenzora az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben $\underline{\underline{A}}_{\underline{\varphi}}$,

és $\underline{f}: \quad \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^k$ és derivált tenzora a $\underline{b} = \underline{\varphi}(\underline{a}) \in \mathbb{R}^m$-ben $\underline{\underline{A}}_{\underline{f}}$,

akkor $\underline{f} \circ \underline{\varphi}: \quad \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^k$ derivált tenzora az $\underline{a}$-ban:

$$\underline{\underline{A}}_{\underline{f} \circ \underline{\varphi}} = \underline{\underline{A}}_{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{A}}_{\underline{\varphi}}$$

(¬B)

Tehát az összetett függvény derivált tenzora egyenlő a külső függvény derivált tenzora szorozva a belső függvény derivált tenzorával. (A mátrixok szorzásánál a sorrend fontos!) Ha a külső függvény $\mathbb{R}^m$-ből $\mathbb{R}$-be képez $(k = 1)$, akkor derivált mátrixa a gradiensvektor lesz:

$$\underline{\underline{A}}_f = \underline{\operatorname{grad}}^T f$$

és az összetett függvény derivált mátrixa:

$$\underline{\underline{A}}_{f \circ \underline{\varphi}} = \underline{\operatorname{grad}}^T f \cdot \underline{\underline{A}}_{\underline{\varphi}}$$

Az eredmény egy sormátrix, melynek i-edik eleme az összetett függvény parciális deriváltja az i-edik változója szerint. Ez az úgynevezett többváltozós láncszabály, amit a következő tételben fogalmazunk meg.

Mostantól csak vektorokkal dolgozunk, a skalár szorzásnál nem jelöljük, hogy az első vektort sorvektornak, a másodikat pedig oszlopvektornak kell tekinteni.

Összetett függvények deriválására vonatkozó láncszabály

(T₂)

Ha $\underline{\varphi}: \quad \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ differenciálható $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben ,

és $f: \quad \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható $\underline{b} = \underline{\varphi}(\underline{a}) \in \mathbb{R}^m$-ben ,

akkor $(f \circ \underline{\varphi})(\underline{x}) = f\big(\underline{\varphi}(\underline{x})\big) \overset{\text{jel}}{=} h(\underline{x}) = h(x_1, \ldots, x_n)$ differenciálható $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben és

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \left[f'_{y_1}, \quad \ldots, \quad f'_{y_m}\right]_{\underline{b}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{bmatrix}_{\underline{a}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

A h összetett függvény parciális deriváltjainak meghatározása az alábbi láncszabály szerint történik:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|_{\underline{\varphi}(\underline{a})} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial y_m}\right|_{\underline{\varphi}(\underline{a})} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{\underline{\varphi}(\underline{a})} \cdot \left.\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f\Big|_{\underline{\varphi}(\underline{a})} \cdot \left.\frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}}$$

$$\operatorname{grad} f = \left[f'_{y_1}, \quad \ldots, \quad f'_{y_m}\right] \qquad \frac{\partial \underline{\varphi}}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right]$$

Az összetett függvény parciális deriváltjait felírva rendre $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, megkaphatjuk a h gradiensét is:

$$\operatorname{grad} h = \left[h'_{x_1}, \quad \ldots, \quad h'_{x_n}\right] = \operatorname{grad} f(\underline{\varphi}(\underline{x})) = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{\varphi}}{\mathrm{d}\underline{x}} = \operatorname{grad} f \cdot \underline{\underline{D}} =$$

$$= \left[f'_{y_1}, \quad \ldots, \quad f'_{y_m}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \operatorname{grad} f \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{grad} \varphi_1 \\ \operatorname{grad} \varphi_2 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} \varphi_m \end{bmatrix}$$

Jacobi mátrix

(Pl.) Írjuk fel az előző láncszabályt $n = 1$ és tetszőleges m esetére:

$$h(t) = (f \circ \underline{\varphi})(t) = f(\underline{\varphi}(t))$$

Tehát az $f(y_1, \ldots, y_m)$ külső függvénybe az $y_j = \varphi_j(t)$ $(j = 1, \cdots, m)$ belső függvényeket helyettesítjük. Ekkor h egyváltozós, gradiense $\dot{h}(t)$, melyre kapjuk:

$$\dot{h}(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{\underline{\varphi}(t_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\varphi_j}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} = \operatorname{grad} f(\underline{\varphi}(t_0)) \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\underline{\varphi}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

$$\dot{h}(t) = \operatorname{grad} f(\underline{\varphi}(t)) \cdot \underline{\dot{\varphi}}(t); \qquad \underline{\dot{\varphi}}(t) = \left[\dot{\varphi}_1(t), \quad \ldots, \quad \dot{\varphi}_m(t)\right]$$

Pl. A láncszabályban most n legyen tetszőleges és $m = 1$, azaz

$$h(\underline{x}) = (f \circ \varphi)(\underline{x}) = f(\varphi(\underline{x})),$$

ahol most az $f(y)$ egyváltozós függvény a külső függvény és $\quad y = \varphi(\underline{x})$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\right|_{\varphi(\underline{a})} \cdot \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|_{\underline{a}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Tehát

$$\operatorname{grad} h(\underline{a}) = f'(\varphi(\underline{a})) \cdot \operatorname{grad} \varphi(\underline{a}), \qquad \operatorname{grad} f(\varphi(\underline{x})) = f'(\varphi(\underline{x})) \cdot \operatorname{grad} \varphi(\underline{x})$$

Felületi görbék

Ha az $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ térgörbe ("út") illeszkedik a $z = f(x, y)$ felületre, akkor

$$z(t) = f\big(x(t), y(t)\big), \qquad \forall\ t \in [t_1, t_2]$$

Ha f totálisan differenciálható valamint $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ és $\dot{z}(t)$ folytonosak, akkor a láncszabály szerint

$$\dot{z}(t) = f'_x\ \dot{x}(t) + f'_y\ \dot{y}(t) \qquad \text{azaz} \qquad f'_x\ \dot{x}(t) + f'_y\ \dot{y}(t) - \dot{z}(t) = 0$$

Tehát a felületi görbe $[\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$ érintővektora és az érintősík $[f'_x, f'_y, -1]$ normálvektora merőlegesek egymásra (skalárszorzatuk nulla).

Összefoglalva azt kaptuk, hogy, ha f totálisan differenciálható, akkor minden folytonosan differenciálható felületi görbe érintőegyenesei valóban a $z = f(x, y)$ felület egy-egy érintősíkjában haladnak.

Síkgörbe mint kétváltozós függvény szintvonala (Implicit megadású görbe)

Azon (x, y) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x, y) = c$ egyenletet, az F függvény c-hez tartozó szintvonalának nevezzük. Tehát, ha $y = f(x) = y(x)$ az F függvény c-hez tartozó szintvonala, akkor $F(x, y(x)) \equiv c$

Ha F, f totálisan deriválható, akkor mindkét oldalt x szerint deriválva és a láncszabályt alkalmazva kapjuk:

$$F'_x + F'_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \text{ha} \quad F'_y \neq 0$$

(Pl.) 1.) Határozzuk meg az $F(x,y) = xy\mathrm{e}^y$ függvény $P(1,-2)$ ponton átmenő szintvonalának az egyenletét!

2.) Írjuk fel ennek a szintvonalnak az $x_0 = 1$ pontbeli deriváltját!

Megoldás:

$xy\mathrm{e}^y = c$ a szintvonalak egyenlete. Most $xy\mathrm{e}^y|_P = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^2} = c$, ezért a keresett szintvonal egyenlete:

$$xy\mathrm{e}^y = -2\mathrm{e}^{-2} = -\frac{2}{\mathrm{e}^2}$$

(Most x-et tudnánk kifejezni mint az y függvényét könnyedén.)
Felhasználva, hogy

$$F'_x = y\mathrm{e}^y\,, \qquad F'_x(P) = -2\mathrm{e}^{-2}$$

$$F'_y = x\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^y\,, \qquad F'_y(P) = \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}$$

kapjuk a keresett deriváltat:

$$y'(1) = -\left.\frac{F'_x}{F'_y}\right|_P = -\left.\frac{y\mathrm{e}^y}{x\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^y}\right|_P = -\left.\frac{y}{x+xy}\right|_P = -2$$

Természetesen az y' értékét az I. félévben látott módon is megkaphatjuk, felhasználva az összetett függvény deriválási szabályát:

$$xy\mathrm{e}^y = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$$

$$y\mathrm{e}^y + xy'\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^y y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{y\mathrm{e}^y}{x\mathrm{e}^y + xy\mathrm{e}^y} = -\frac{y}{x+xy}$$

Felület mint 3 változós függvény szintfelülete (Implicit megadású felület)

Azon (x,y,z) pontok összességét, amelyek kielégítik az $F(x,y,z) = c$ egyenletet, az F függvény c-hez tartozó szintfelületének nevezzük.
Tehát, ha $z = f(x,y)$ az F függvény c-hez tartozó szintfelülete, akkor

$$F(x,y,f(x,y) \equiv c\,, \qquad \forall(x,y) \in D_f$$

Ha a $z = f(x,y)$ totálisan differenciálható és kielégíti a fenti egyenletet, valamint F is totálisan differenciálható és még feltesszük, hogy $F'_z \neq 0$, akkor $F(x,y,f(x,y)) \equiv c$ mindkét oldalát a láncszabály értelmében rendre x, illetve y szerint kapjuk:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Tudjuk, hogy a $z=f(x,y)$ felület P-beli érintősíkjának normálvektora párhuzamos a $[f'_x, f'_y, -1]\big|_P$ vektorral. Ezért

$$\underline{n} \parallel [f'_x, f'_y, -1] \parallel \left[-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right] \quad\Longrightarrow\quad \underline{n} \parallel [F'_x, F'_y, F'_z]_P$$

Tehát $\operatorname{grad} F(P)$ merőleges a P-n áthaladó szintfelületre. Így a P-n áthaladó szintfelület P-beli érintősíkjának normálvektora $\operatorname{grad} F(P)$.
Így az $F(x,y,f(x,y))=c$ szintfelület $P(x_0,y_0,z_0)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P (x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P (y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P (z-z_0) = 0$$

Pl.

$$F(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2 , \qquad P(1,1,-1)$$

1.) Írjuk fel F-nek a P ponton áthaladó szintfelületének az implicit egyenletét!

2.) Írjuk fel a P ponton áthaladó szintfelület P-beli érintősíkjának az egyenletét!

Megoldás:
$F(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2$, $P(1,1,-1)$ ponton átmenő szintfelülete:

$$x^2-y^2+2z^2=2 \qquad (c=2)$$

$\underline{n}=\operatorname{grad} F(P)=[2x,-2y,4z]_P=2\,\underline{i}-2\,\underline{j}-4\,\underline{k}$
Az érintősík egyenlete:

$$2(x-1)-2(y-1)-4(z+1)=0$$

•••

Feladatok

1.) g elegendően sokszor folytonosan differenciálható egyváltozós függvény.

a.) $u(x,y)=g(x-y)$ $\qquad u'_x=?,\ u'_y=?$
b.) $u(x,y)=g(x^2+y^3)$ $\qquad u'_x=?,\ u'_y=?$
c.) $u(x,y)=g(x^2y)$ $\qquad u'_x=?,\ u'_y=?,\ u''_{xx}=?,\ u''_{xy}=?,\ u''_{yx}=?,\ u''_{yy}=?$

2.) Helyettesítse be az $u(x,y) = g(xy^2)$ függvényt az

$$xyu''_{xy} - y^2u''_{yy} + 2x^2u''_{xx}$$

kifejezésbe és hozza egyszerűbb alakra, ha g kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény, melynek változója helyére az xy^2 kifejezést helyettesítettük.

3.) $g_1(x)$ és $g_2(x)$ kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény ($g_1, g_2 \in C^2_{\mathbb{R}}$),
$h(x,y) = x \cdot g_1(y-x) + y \cdot g_2(x-y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$
Hozza egyszerűbb alakra a $\quad h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} \quad$ kifejezést!

4.) Hozza egyszerűbb alakra az

$$xyu''_{xx} + 2xyu''_{xy} + xyu''_{yy} - xu'_x - yu'_y = 0$$

differenciálegyenlet bal oldalát, ha $u(x,y) = g(t)|_{t=xy}$, ahol a g egyváltozós függvény kétszer folytonosan differenciálható! Az egyszerűsített kifejezés alapján adja meg azokat a g függvényeket, melyek azonosan kielégítik a differenciálegyenletet!

5.) Határozza meg az $F(x,y,z) = \mathrm{e}^{2x}y + x\mathrm{e}^{y+2z}$, $\quad P(1,-1,0)$ ponton átmenő szintfelülete érintősíkjának az egyenletét!

6.) Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{x^2+3y}{4x+5y}$, $\quad P(1,-1)$-hez tartozó érintősíkjának az egyenletét!

4.8. Iránymenti derivált

Az értelmezési tartomány $\underline{a}$ pontjában az $\underline{e}$ irányban adja meg a függvény változási sebességét.

(D) $\underline{a} \in \operatorname{int} D_f \subset \mathbb{R}^m, \quad |\underline{e}| = 1$

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}}$$

(M1) Az iránymenti derivált $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ módon is jelölhető.

(M2) $t \to 0$-ra is szokás definiálni, mi $t \to +0$-ra definiáljuk.

(M3) $m \geq 3$-ra is definiálható a fogalom, csak nem szemléltethető.

(M4) A parciális deriváltak is iránymenti deriváltak.

Elégséges tétel iránymenti derivált létezésére:

Ⓣ $\boxed{\begin{array}{l}\text{Ha } f \text{ totálisan deriválható } K_{\underline{a}}\text{-ban, akkor } \underline{a}\text{-ban } \forall \text{ irányban } \exists \text{ az iránymenti} \\ \text{derivált, és} \\ \qquad\qquad\qquad \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} \qquad (|\underline{e}| = 1)\end{array}}$

Ⓜ Ha $\forall$ irányban $\exists \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} \not\Longrightarrow \exists \operatorname{grad} f(\underline{a})$

Ⓑ Az összetett függvény differenciálási szabályát kell alkalmaznunk.

$$f(\underline{x}); \qquad \underline{x} = \underline{\varphi}(t) := \underline{a} + t\underline{e} = \big[a_1 + te_1, \quad a_2 + te_2, \quad \dots, \quad a_m + te_m\big]$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \dot{\underline{\varphi}}(t) = \big[e_1, \quad e_2, \quad \dots, \quad e_m\big] = \underline{e}$$

$$h(t) := f(\underline{\varphi}(t)) = f(a_1 + te_1, a_2 + te_2, \dots, a_m + te_m)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \dot{h}_+(0) = \dot{h}(0) =$$

$$= f'_{x_1}\big|_{\underline{a}} \cdot e_1 + \dots + f'_{x_m}\big|_{\underline{a}} \cdot e_m = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$$ ■

Speciális képletek:

a.) $m = 2$ és $\underline{e}$ α szöget zár be $\underline{i}$-vel:

$$\underline{e} = \cos\alpha\, \underline{i} + \sin\alpha\, \underline{j} = \big[\cos\alpha, \quad \sin\alpha\big]$$

$$\operatorname{grad} f = f'_x\, \underline{i} + f'_y\, \underline{j} = \big[f'_x, \quad f'_y\big]$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos\alpha + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin\alpha$$

b.) $m = 3$; az $\underline{e}$ vektor tengelyekkel bezárt szögei: α, β, γ

$$\underline{e} = \big[\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma\big] \qquad \text{(iránykoszinuszok)}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = f'_x|_{P_0} \cdot \cos\alpha + f'_y\big|_{P_0} \cdot \cos\beta + f'_z|_{P_0} \cdot \cos\gamma$$

Ⓜ$_1$ Geometriai tartalom $m = 2$ esetén:

Tekintsük azt a felületi görbét, melyet a $z = f(x, y)$ felületből az az (x, y) síkra merőleges sík metsz ki, melynek nyomvonala az (x_0, y_0) ponton áthaladó $\underline{e}$ irányú egyenes. E felületi görbéhez az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ felületi pontban húzzunk érintőegyenest.

Ennek irányát jelölje: $\underline{w}$. (Irányítás olyan, hogy $\gamma = (\underline{w}, \underline{e})\measuredangle$ hegyesszög legyen.)
Ekkor igaz az alábbi:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)} = \operatorname{tg}\gamma\,; \qquad \gamma = (\underline{w}, \underline{e})\measuredangle, \quad \underline{w}: \text{ érintő irányú vektor}$$

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{f(\underline{a}+t\underline{e}) - f(\underline{a})}{t}\,, \qquad\qquad \operatorname{tg}\gamma = \lim_{t\to+0} \operatorname{tg}\gamma'$$

M2 $m = 2$ esetén az érintő benne van az érintősíkban.

Ui.: (x_0, y_0, z_0) pont közös és $\underline{n} \perp \underline{w}$ megmutatható.

$$\underline{n} = \left[f'_x(x_0,y_0), \quad f'_y(x_0,y_0), \quad -1\right]$$

$$\underline{w} = \underline{e} + \operatorname{tg}\gamma\,\underline{k} = \left[\cos\alpha, \quad \sin\alpha, \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(x_0,y_0)}\right] = \left[\cos\alpha, \quad \sin\alpha, \quad f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha\right]$$

Így valóban $\underline{n}\,\underline{w} = 0$.

4.8.1. A gradiensvektor tulajdonságai

(Két és háromváltozós esetre, itt geometriai tartalom is van.)

T Ha $\exists$ grad $f(\underline{a})$, akkor $\exists \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ $\forall\,\underline{e}$-re és

a *maximális iránymenti derivált* iránya: grad $f(\underline{a})$, értéke: $|\operatorname{grad} f(\underline{a})|$

B Már láttuk, hogy $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$. Ebből

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|\,|\underline{e}| \cdot \cos\varphi = |\operatorname{grad} f(\underline{a})| \cdot \cos\varphi$$

Így $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}}$ maximális, ha $\cos\varphi = 1 \implies \varphi = 0$, tehát $\underline{e} \parallel \operatorname{grad} f(\underline{a})$, pontosabban

$$\underline{e} = \frac{\operatorname{grad} f(\underline{a})}{|\operatorname{grad} f(\underline{a})|} \qquad \text{és} \qquad \max \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = |\operatorname{grad} f(\underline{a})|\,.$$

Tehát a grad vektor irányában elmozdulva nő leggyorsabban a függvényérték, és $-$grad irányában csökken a leggyorsabban.

■

Ⓣ Ha $\exists\ \mathrm{grad} f(\underline{a}) \neq \underline{0}$, akkor $\mathrm{grad} f(\underline{a}) \perp$ az $f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ szintalakzatra (az $\underline{a}$ helyvektorú ponton átmenő szintvonalra vagy szintfelületre) és a növekvő paraméterű szintalakzatok irányába mutat.

Ⓑ Csak vázlatosan.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}} = \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e}$$

1.) Ha $\underline{e} \parallel$ az érintő irányával ill. az érintősíkkal, tehát ha a szintalakzaton mozdulunk el, akkor $\Delta f = 0 \implies \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}} = 0 \implies \mathrm{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{e} = 0 \implies \mathrm{grad} f(\underline{a}) \perp \underline{e}$

2.) Ha a növekvő paraméterű szintalakzat felé mozdulunk el:
$\Delta f > 0 \implies \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}} > 0 \implies \mathrm{grad}\ f(\underline{a}) \cdot \underline{e} > 0 \implies (\mathrm{grad}\, f(\underline{a}), \underline{e})\measuredangle < \dfrac{\pi}{2}$,
tehát $\mathrm{grad} f(\underline{a})$ is a növekvő paraméterű szintalakzat felé mutat.

■

Pl.

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 1\,, \qquad P_0(1, -1, 0)$$

a.) $\mathrm{grad}\, f|_{P_0} = ?$, $\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$, $\quad$ ha $\quad \underline{e} \parallel \underline{v} = [2, 1, 3]$

b.) Adja meg $\quad \max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}$ értékét és irányát!

c.) Írja fel a P_0 ponton áthaladó szintfelület egyenletét és annak P_0-beli érintősíkját!

Megoldás:

a.) $f'_x = 4\,x^3\,, \quad f'_y = 4\,y^3\,, \quad f'_z = 4\,z^3$

A parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak, ezért a gradiens mindenütt létezik:

$\mathrm{grad}\, f = f'_x\,\underline{i} + f'_y\,\underline{j} + f'_z\,\underline{k} \implies \mathrm{grad}\, f|_{P_0} = 4\,\underline{i} - 4\,\underline{j}$

Mivel $|\underline{v}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$, $\qquad \underline{e} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}\,\underline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{14}}\,\underline{j} + \dfrac{3}{\sqrt{14}}\,\underline{k}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\cdot\underline{e} = \big(4\,\underline{i} - 4\,\underline{j}\big)\cdot\Big(\frac{2}{\sqrt{14}}\,\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\,\underline{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\,\underline{k}\Big) =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

b.) $\max \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0} = \big|\operatorname{grad} f(P_0)\big| = \sqrt{32}$

És iránya: $\underline{e} = \dfrac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = \dfrac{4}{\sqrt{32}}\,\underline{i} - \dfrac{4}{\sqrt{32}}\,\underline{j}$

c.) A szintfelület egyenlete: $f(x,y,z) = c$.

Mivel $f(1,-1,0) = 3$, azért $c = 3$, tehát a kérdezett szintfelület:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 1 = 3$$

Mivel a gradiens merőleges a szintalakzatra, az érintősík normálvektorára fennáll, hogy

$$\underline{n} \parallel \operatorname{grad} f(P_0) = 4\,\underline{i} - 4\,\underline{j} \quad\Longrightarrow\quad \underline{n} := \underline{i} - \underline{j}$$

És a sík átmegy az adott P_0 ponton, így egyenlete:

$$\operatorname{grad} f(P_0)\,\Big(\underline{r} - \underline{r}_0\Big) = 0\,, \qquad \text{tehát}$$

$$(x-1) - \big(y - (-1)\big) = 0$$

4.8.2. Lagrange-féle középértéktétel

Egyváltozós függvény differenciálhatósága:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + o(h) = \mathrm{d}f(x_0,h) + o(h)$$

Lagrange-féle középértéktétel egyváltozós függvényre:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi) = f'(x_0+\vartheta h)\,, \qquad 0<\vartheta<1 \quad \text{alakból:}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0+\vartheta h)\cdot h = \mathrm{d}f(x_0+\vartheta h, h)\,, \qquad 0<\vartheta<1$$

Lagrange-féle középértéktétel:

T Legyen $D\subset\mathbb{R}^m$ konvex tartomány, és $f: D\mapsto\mathbb{R}$ totálisan deriválható D-ben; $\underline{x}_0\in \operatorname{int} D$.
Ekkor $\forall$ olyan $\underline{h}$-hoz, melyre $\underline{x}_0+\underline{h}\in D$, van $0<\vartheta<1$ szám, hogy

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(\underline{x}_0+\vartheta\underline{h})\cdot h_i = \mathrm{d}f(\underline{x}_0+\vartheta\underline{h}\,,\,\underline{h}) \qquad (\neg\mathrm{B})$$

Ⓜ $\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h}$ az $\underline{x}_0$ és $\underline{x}_0 + \underline{h}$ pontok által meghatározott egyenes szakasz egy pontja, így a konvexitás miatt $\underline{x}_0 + \vartheta \underline{h} \in D$.

Ⓣ Legyen $D \subset \mathbb{R}^m$ konvex, nyílt tartomány.
Ha az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható D-ben és $\mathrm{d}f(\underline{x}, \underline{h}) \equiv 0 \Longrightarrow f$ állandó.

Ⓑ Az előző tétel értelmében $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in D$-hez van az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ pontokat összekötő szakaszon olyan $\underline{c}$ pont, hogy $f(\underline{b}) - f(\underline{a}) = \mathrm{d}f(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a})$.
Mivel D konvex, így $\quad \underline{c} \in D \Longrightarrow \mathrm{d}f(\underline{c}, \underline{b} - \underline{a}) = 0 \Longrightarrow f(\underline{a}) = f(\underline{b})$.

■

●●●

Néhány kidolgozott összetettebb példa:

Pl.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{3x^2 + 4y^2}, & \text{ha}(x,y) \neq (0,0) \\[2ex] \dfrac{1}{7}, & \text{ha}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a.) Mutassa meg, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik!

b.) Hol differenciálható totálisan az f kétváltozós függvény? $\operatorname{grad} f = ?$

c.) Írja fel a $P(0,1)$ ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

d.) $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,1)} = ?$ ill. $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)} = ?$, ha $\underline{e} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}$ ($\underline{e}$ irányú iránymenti derivált)

Megoldás:

a.)

$$\lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{tetsz.}}} \frac{\varrho_n^2 \cos\varphi_n \sin\varphi_n}{\varrho_n^2 (3\cos^2\varphi_n + 4\sin^2\varphi_n)} \nexists \quad (\text{függ } \varphi_n\text{-től; pl. } \varphi_n = 0,\ \varphi_n = \frac{\pi}{4} : \cdots)$$

b.) $\operatorname{grad} f|_{\underline{0}} \nexists$, mert f nem folytonos $\underline{0}$-ban. (Szükséges feltétel nem teljesül.)
Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor f'_x és f'_y létezik és folytonos $\Longrightarrow \operatorname{grad} f\ \exists :\quad \operatorname{grad} f = f'_x\underline{i} + f'_y\underline{j}$, ahol

$$f'_x = \frac{y(3x^2 + 4y^2) - xy \cdot 6x}{(3x^2 + 4y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{x(3x^2 + 4y^2) - xy \cdot 8y}{(3x^2 + 4y^2)^2}$$

c.) Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(0,1)\,(x-0)+f'_y(0,1)\,(y-1)-(z-f(0,1))=0$$

$f'_x(0,1)=\frac{1}{4},\quad f'_y(0,1)=0,\quad f(0,1)=0$

$$\frac{1}{4}(x-0)+0\cdot(y-1)-(z-0)=0\ \longrightarrow\ z=\frac{1}{4}x$$

d.) $\operatorname{grad} f|_{(0,1)}=\frac{1}{4}\underline{i}+0\underline{j}\ \exists\implies(0,1)$-ben bármilyen irányban létezik az iránymenti derivált, és

$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{P_0}=\operatorname{grad} f|_{P_0}\cdot\underline{e}$ képlettel számolható.

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,1)}=\left(\frac{1}{4}\underline{i}+0\underline{j}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)}$ csak a definícióval vizsgálható, mivel itt az előző elégséges tétel nem használható, mert $\operatorname{grad} f|_{(0,0)}\ \nexists$. (A kétváltozós függvény folytonossága nem szükséges feltétele az iránymenti derivált létezésének. Csak az adott egyenes mentén való „megfelelő irányú” folytonosság kell, de ezt nem érdemes külön vizsgálni.)

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(\underline{0}+t\underline{e})-f(\underline{0})}{t}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f(\frac{\sqrt{2}}{2}t,\frac{\sqrt{2}}{2}t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{\frac{3}{2}t^2+\frac{4}{2}t^2}-\dfrac{1}{7}}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{0}{t}=0$$

Pl. Legyen $f(x,y)=\sin\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ha $(x,y)\neq(0,0)$, és $f(0,0)=0$

a.) Határozza meg az f függvény parciális deriváltjait az origóban!

b.) Mutassa meg, hogy f-nek létezik az origóban a $\underline{v}=[1,1]$ irányú iránymenti deriváltja, és értéke nem nulla!

c.) Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?

d.) Milyen előjelű az f függvény az origó környezetében?

Van-e az f-nek lokális szélsőértéke az origóban?

Megoldás

a.) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$ és a szimmetria miatt $f'_y(0,0) = 0$ szintén.

b.) $\underline{v} = \underline{i} + \underline{j}$; $\underline{e} = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = \lim_{t \to +0} \frac{f(\underline{0} + \underline{e}t) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{f(\frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{\sqrt{2}}t) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to +0} \frac{\sin \frac{t^2}{2t}}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ (\neq 0)$$

c.) Ha f totálisan deriválható lenne, akkor

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}} = \mathrm{grad} f \cdot \underline{e} \quad \text{miatt} \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\underline{e}}\right|_{\underline{0}} = [\underbrace{f'_x(0,0)}_{=0}, \underbrace{f'_y(0,0)}_{=0}] \cdot \underline{e} = 0$$

lenne $\Longrightarrow$ f nem totálisan deriválható a $(0,0)$-ban.
Vagy a definícióval:

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = A \cdot h + B \cdot k + \varepsilon$$

$$\sin \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} - 0 = 0 \cdot h + 0 \cdot k + \varepsilon$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\varepsilon}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\sin \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$(h := \varrho_n \cos \varphi_n; \quad k := \varrho_n \sin \varphi_n)$

$$= \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{tetsz.}}} \frac{\sin(\varrho_n \cos \varphi_n \sin \varphi_n)}{\varrho_n} = \lim_{\substack{\varrho_n \to 0 \\ \varphi_n \text{tetsz.}}} \underbrace{\frac{\sin(\varrho_n \cos \varphi_n \sin \varphi_n)}{\varrho_n \cos \varphi_n \sin \varphi_n}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \cos \varphi_n \sin \varphi_n \neq 0$$

$\Longrightarrow$ nem tot. deriválható

d.) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ miatt az origó elegendően kis sugarú környezetében $\sin \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ előjele azonos az argumentum előjelével $\Longrightarrow$ $f(0,0) = 0$ nem lehet lokális szélsőérték, mert $(0,0)$ bármely környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is a függvény.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
- & - & - & + & + & + \\
- & - & - & + & + & + \\
- & - & - & + & + & + \\
\hline
+ & + & + & - & - & - \\
+ & + & + & - & - & - \\
+ & + & + & - & - & -
\end{array}$$

4.9. Magasabbrendű differenciálok

Elsőrendű differenciál (teljes differenciál)

Mint már láttuk totálisan deriválható függvényre:

Ⓓ $$df\,(\underline{x},\underline{h}) \;=\; \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\underline{x})\cdot h_k \;=\; \mathrm{grad} f(\underline{x})\cdot \underline{h}$$

Kétváltozós függvény esetén:

$$\underline{x}=[x,y]\,, \qquad \underline{h}=[h_1,h_2]$$

$$df\,(\underline{x},\underline{h}) \;=\; f'_x(x,y)\,h_1 \;+\; f'_y(x,y)\,h_2$$

Háromváltozós függvény esetén:

$$\underline{x}=[x,y,z]\,, \qquad \underline{h}=[h_1,h_2,h_3]$$

$$df\,(\underline{x},\underline{h}) \;=\; f'_x(x,y,z)\,h_1 \;+\; f'_y(x,y,z)\,h_2 \;+\; f'_z(x,y,z)\,h_3$$

Például: $f(x,y,z)=xy^3+xyz$ esetén:

$$df\,(\underline{x},\underline{h}) \;=\; (y^3+yz)\,h_1 \;+\; (3xy^2+xz)\,h_2 \;+\; xy\,h_3$$

Ez egy $2m=6$-változós függvény.

Másodrendű differenciál

Az elsőrendű differenciálban rögzítsük a $\underline{h}$ vektort! Ekkor ennek az $\underline{x}$-től függő függvénynek is vehetjük az $\underline{x}$-beli differenciálját $\underline{h}$ megváltozás mellett. (Természetesen csak akkor, ha az elsőrendű parciálisok differenciálhatók. Ezt úgy érhetjük el, ha például feltesszük, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak.)
Tehát a másodrendű differenciál az elsőrendű differenciál elsőrendű differenciálja.

Ⓓ $$d^2f(\underline{x},\underline{h}) \;=\; d\Big(df\,(\underline{x},\underline{h})\Big)(\underline{x},\underline{h})\,, \qquad f\in C^2_{K_{\underline{x}}}$$

Kétváltozós függvény esetén:

$$d^2f(\underline{x},\underline{h}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\Big(f'_x(x,y)\;h_1+f'_y(x,y)\;h_2\Big)\cdot h_1+\frac{\partial}{\partial y}\Big(f'_x(x,y)\;h_1+f'_y(x,y)\;h_2\Big)\cdot h_2 \;=$$

$$= \Big(f''_{xx}(x,y)\, h_1 \,+\, f''_{yx}(x,y)\, h_2 \Big) \cdot h_1 \,+\, \Big(f''_{xy}(x,y)\, h_1 \,+\, f''_{yy}(x,y)\, h_2 \Big) \cdot h_2$$

$$= f''_{xx}(x,y) \cdot h_1^2 \,+\, 2\, f''_{xy}(x,y) \cdot h_1 h_2 \,+\, f''_{yy}(x,y) \cdot h_2^2$$

Felhasználtuk, hogy Young tétele miatt: $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)\,.$

Ha (x,y)-t rögzítjük, akkor $d^2 f(\underline{x},\underline{h})$ kvadratikus függvénye (csak másodfokú tagokból álló polinomja) a $h_1\,, h_2$ változóknak.

A kifejezés mátrixosan felírva jobban átlátható:

$$d^2 f(\underline{x},\underline{h}) \,=\, \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \,=\, \underline{h}^T\, \underline{\underline{H}}\; \underline{h}$$

$\underline{\underline{H}}$ neve: Hesse-féle mátrix. $\underline{\underline{H}}$ szimmetrikus mátrix.

Háromváltozós függvény esetén:

$$\begin{aligned} d^2 f(\underline{x},\underline{h}) \,=\, & \frac{\partial}{\partial x} \Big(f'_x(x,y,z)\, h_1 \,+\, f'_y(x,y,z)\, h_2 \,+\, f'_z(x,y,z)\, h_3 \Big) \cdot h_1 + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \Big(f'_x(x,y,z)\, h_1 \,+\, f'_y(x,y,z)\, h_2 \,+\, f'_z(x,y,z)\, h_3 \Big) \cdot h_2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \Big(f'_x(x,y,z)\, h_1 \,+\, f'_y(x,y,z)\, h_2 \,+\, f'_z(x,y,z)\, h_3 \Big) \cdot h_3 \,= \\ & = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \,=\, \underline{h}^T\, \underline{\underline{H}}\; \underline{h} \end{aligned}$$

Young tétele miatt $\underline{\underline{H}}$ most is szimmetrikus.

k-adrendű differenciál $\quad \big(f \in C^k_{K_{\underline{x}}}\big)$

Ⓓ $$d^k f(\underline{x},\underline{h}) \,=\, d\Big(df^{k-1}\,(\underline{x},\underline{h}) \Big)(\underline{x},\underline{h})\,, \quad k = 2, 3, \ldots$$

5. Többváltozós függvények szélsőértékszámítása

Lokális szélsőérték definíciója

Ⓓ f -nek lokális minimuma (maximuma) van az $\underline{a} \in \mathrm{int} D_f$ pontban, ha $\exists\, K_{\underline{a},\delta} \subset \mathrm{int} D_f$, hogy

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{a}) \qquad \Big(\text{illetve } f(\underline{x}) \leq f(\underline{a})\Big) \quad \forall\, \underline{x} \in K_{\underline{a},\delta}\text{-ra.}$$

(Nem szigorú szélsőértéket definiáltunk!)

Szükséges feltétel differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésére:

Ⓣ $K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.
Ha f -nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor

$$\mathrm{d}f(\underline{a},\underline{h}) = 0 \qquad \forall \quad |\underline{h}| < \delta\text{-ra.}$$

Ⓑ Mivel

$$df\,(\underline{a},\underline{h}) = f'_{x_1}(\underline{a})\, h_1 + f'_{x_2}(\underline{a})\, h_2 + \cdots + f'_{x_m}(\underline{a})\, h_m\ ,$$

elegendő belátni, hogy a parciális deriváltak nullák $\underline{a}$-ban.

$$f_k(t) := f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_m)$$

f_k-nak is lokális szélsőértéke van $t = a_k$-ban, ezért $\dot{f}_k(a_k) = 0$. Azonban az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 = \dot{f}_k(a_k) = \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_1}\cdot 0 + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_2}\cdot 0 + \ldots + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k}\cdot 1 + \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_{k+1}}\cdot 0 + \ldots \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_m}\cdot 0 =$$

$$= \frac{\partial f(\underline{a})}{\partial x_k} \qquad\qquad k = 1, \ldots, m$$

■

Ⓜ A feltétel csak szükséges, de nem elégséges. Erre példa:

$$f(x,y) = (y - x^2)\,(y - 2x^2)$$

$f'_x(0,0) = 0$, $\quad f'_y(0,0) = 0$
f -nek nincs lokális szélsőértéke $(0,0)$-ban, mert $f(0,0) = 0$, ugyanakkor a függvény a $(0,0)$ pont minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is.

(Ábra)

Ugyanis az $y = 2x^2$ parabola feletti pontokban $f(x,y) > 0 \quad (y > 2x^2 > x^2)$. Az $y = x^2$ parabola alatti pontokban szintén $f(x,y) > 0 \quad (y < x^2 < 2x^2)$. A két parabola között $(x^2 < y < 2x^2)$ viszont $f(x,y) < 0$.

Annak ellenére, hogy ennek a kétváltozós függvénynek az origóban nincs lokális szélsőértéke, mégis, ha a felületből az x,y síkra merőleges, az origón átmenő síkokkal kimetszünk felületi görbéket, akkor f-nek minden ilyen felületi görbe mentén lokális minimuma van. Ugyanis a metszetgörbe pontjaiban a függvényérték pozitív, legalábbis az origó egy átszúrt környezetében.

Elégséges tétel lokális szélsőérték létezésére speciálisan kétváltozós függvényre:

(T) Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$$D(x,y) := \left|\underline{\underline{H}}(x,y)\right| \ \left(= \det \underline{\underline{H}}(x,y)\right) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték:
$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$: lok. min.
$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$: lok. max.

$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték
$f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges)

(¬B)

•••

(Pl.) Keresse meg az $f(x,y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$f'_x = 2x - 2 = 0 \implies x = 1 \qquad f'_y = 3y^2 - 3 = 0 \implies y = \pm 1$
$P_1(1,1)$ és $P_2(1,-1)$ pontokban lehet lokális szélsőérték.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 12y$$

$D(1,1) = 12 > 0, \quad f''_{xx}(1,1) > 0 \implies P_1(1,1)$-ben lok. min. van ($f(1,1) = -3$ értékkel).
$D(1,-1) = -12 < 0 \implies P_2(1,-1)$-ben nincs lok. szélsőérték.

Pl. $\boxed{\text{Határozza meg az } f(x,y) = x^2y^3 \text{ lokális szélsőértékeit!}}$

Megoldás:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2xy^3 = 0 \\ f'_y &= 3x^2y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad x = 0 \text{ vagy } y = 0. \text{ Tehát az } (x,0) \text{ és a } (0,y) \text{ pontokban lehet lok. szé.}$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{vmatrix} = 12x^2y^4 - 36x^2y^4 = -24x^2y^4$$

$D(x,0) = 0$ és $D(0,y) = 0$. Így nem tudunk dönteni.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & & y & & & \\ + & + & + & \uparrow & + & + & + \\ + & + & + & 0 & + & + & + \\ + & + & + & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow x \\ - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & 0 & - & - & - \\ - & - & - & | & - & - & - \end{array}\right\} \text{ A függvényérték előjele.}$$

Az x tengely pontjaiban nincs lok. szé. A függvényérték itt 0 és e pontok bármely környezetében a függvény felvesz pozitív és negatív értéket is. Az y tengely pontjaiban (az origót kivéve) van lokális szélsőérték:

$(0,y),\ y > 0$ pontokban lok. minimum van.
$(0,y),\ y < 0$ pontokban lok. maximum van.

Pl.

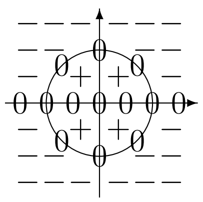
$f(x,y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$ a.) Határozza meg a lokális szélsőérték helyeket!   b.) Határozza meg a függvény minimumát és maximumát, – ha létezik –, az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!

Megoldás:

a.) $f'_x = y^2(-2x) = 0 \longrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0$
$f'_y = 2y(1 - x^2 - y^2) - 2y^3 = -4y^3 + 2y - 2yx^2 = 0 \quad (2)$
Ha $x = 0:$ (2): $2y(1 - 2y^2) = 0 \longrightarrow y = 0 \ \vee \ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
Ha $y = 0:$ (2): x tetsz.
Tehát a szükséges feltétel teljesül: $P_1(0,0)$, $P_2(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_3(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_4(x,0)$ pontokban.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & -12y^2 + 2 - 2x^2 \end{vmatrix}$$

$D(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4 > 0$ és itt $f''_{xx} < 0$ itt $\Longrightarrow$ P_2, P_3-ban lok. max. van $f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{4}$ értékkel.
Az x tengely mentén: $D(x,0) = 0$: ?-es eset.



$(x,0)$, $|x| < 1$: lok. min. (Értéke: 0)

$(x,0)$, $|x| > 1$: lok. max. (Értéke: 0)

$(1,0)$ ill. $(-1,0)$ pontokban nincs lok. szé.

b.) f folytonos a kompakt halmazon $\Longrightarrow$ $\exists$ min. és max.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Lokális szé.:} & f(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{4} \\ & f(x,0) = 0 \\ \text{Határon:} & f = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \min = 0 \\ \max = \frac{1}{4} \end{array}$$

Pl.

$f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$
a.) Határozzuk meg a lokális szélsőértéket!
b.) Létezik-e f-nek legnagyobb és legkisebb értéke az $A = \{(x,y):\ x,y \in \mathbb{R};\ \ 0 \le y \le 1-x;\ \ 0 \le x \le 1\}$ tartományon? Ha igen, keresse meg!

Megoldás:

a.) A függvény mindenütt deriválható. (A parciálisok léteznek és folytonosak.)
$f'_x = 3x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\qquad f'_y = 3y^2 - 1 = 0 \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

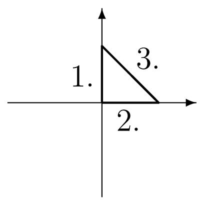
$D(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$, és $f''_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$, tehát $f(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ lok. min.
$D(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) > 0$ és $f''_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$, tehát $f(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ lok. max.
$D(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ nincs lok. szé.; $D(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ nincs lok. szé.

b.) A tartomány korlátos és zárt (kompakt halmaz), f folytonos itt $\underset{\text{Weierstrass II.}}{\Longrightarrow}$ van minimuma és maximuma.
Hol lehet a tartománybeli szélsőérték?

– ahol f nem deriválható (most ilyen hely nincs)

- ahol lok. szélsőérték lehet (nem kell ellenőrizni az elégségességet, ha tudjuk, hogy $\exists$ a min. és max.) Most a lok. szé. helyek nem esnek a tartományba.
- a tartomány határán (1 dimenzióval alacsonyabb szélsőértékszámítási feladat).

A tartomány határán:



1. $\varphi_1(y) := f(0,y) = y^3 - y\,, \qquad y \in [0,1]$
   (Zárt intervallumbeli feladat)
   $\varphi_1' = 3y^2 - 1 = 0 \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
   $f(0,\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
   A végpontok: $f(0,0) = 0$; $f(0,1) = 0$
2. f x-ben és y-ban szimmetrikus. Ezt kihasználva:
   $f(\frac{1}{\sqrt{3}},0) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $f(1,0) = 0$ (végpont; a másik már szerepelt)
3. $\varphi_3(x) := f(x,1-x) = x^3 + (1-x)^3 - x - (1-x) = \cdots = 3x^2 - 3x$
   $\varphi_3' = 6x - 3 = 0 \quad x = \frac{1}{2}; \quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ (Végpontok már voltak.)

($\sim\sim\sim$ -sal jelölt értékek közül kell választani.)
Összefoglalva: $f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = 0:$ maximum

$$f(0,\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = f(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0) = -\tfrac{2}{\sqrt{3}}: \text{ minimum}$$

●●●

Feladatok

1.) Hol differenciálhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott írja fel a gradiens vektort!

a.) $f(x,y) = x\sin(x+y^2)$

b.) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$

c.) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x+1}$

d.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2.) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy^2} + \cos(x+y^3)$ $\quad \mathrm{grad} f = ?$ $\quad \mathrm{d}f\,((x,y),(h,k)) = ?$

3.) $f(x,y) = x^3 + x^{2y} + y^2$ $\quad \mathrm{d}^2 f((\mathrm{e},-1),(h,k)) = ?$

4.) Határozza meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott pontban és az adott irányban!

a.) $f(x,y) = x^2 - 2xy + \mathrm{sh}\,(x+y);$ $\quad P_0(-2,1);$ $\quad \underline{v} = 3\underline{i} - \underline{j}$

b.) $f(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{y};$ $\quad P_0(1,-1);$ $\quad \underline{v} = 3\underline{i} - 4\underline{j}$

c.) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} - z;$ $\quad P_0(1,0,1);$ $\quad \underline{v} = 4\underline{i} - 3\underline{k}$

d.) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{3}{5}, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad P_0(0,0);$ $\quad \underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j}$ ill. $\underline{v} = \underline{i}$

e.) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$ $\quad P_0(0,0,0);$ $\quad \underline{v} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$

5.) Határozza meg az alábbi függvények maximális iránymenti deriváltjának értékét és annak irányát a megadott pontban!

a.) $f(x,y) = xy^2 + \mathrm{e}^{2x};$ $\quad P_0(0,1)$

b.) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y};$ $\quad P_0(1,-1)$

c.) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2} - z;$ $\quad P_0(1,0,1)$

6.) Írja fel az alábbi – $z = f(x,y)$ egyenletű – felületek érintősíkjainak egyenletét a megadott P_0 ponthoz tartozó felületi pontjukban!

a.) $z = x^3 + y^3 - 9x^2y;$ $\quad P_0(1,-1)$

b.) $z = \dfrac{x+1}{2y-1};$ $\quad P_0(0,1)$

7.) Határozza meg az $u = f(x,y,z)$ függvény P_0 ponton áthaladó szintfelületének egyenletét és írja fel a szintfelület P_0-beli érintősíkjának egyenletét!

a.) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2; \quad P_0(1,2,-1)$

b.) $f(x,y,z) = \sqrt[4]{x^2 + y^2 + z^2}; \quad P_0(1,0,-1)$

8.) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin \dfrac{2x^2y^2}{x^2+y^2} + 6x\,, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0\,, & \text{ha } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

a.) Hol folytonos a függvény?

b.) $f'_x(x,y) = ?, \quad f'_y(x,y) = ?$

c.) Totálisan hol deriválható?

d.) Iránymenti derivált a $\underline{v} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$ irányban a

α.) $P_1(0,1)$

β.) $P_2(0,0)$

pontokban?

e.) Írja fel a $P_1(0,1)$ pontbeli érintősík egyenletét!

9.) Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

a.) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b.) $f(x,y) = x^4 - 4x + 2y^2 - 2y$

c.) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2 - 2y^2 + 3xy}$

d.) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy$

e.) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x - y$

10.) $f(x,y) = x^2y(2 - x - y)$
Keressük meg az f függvény legkisebb és legnagyobb értékét az $x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 6$ egyenesekkel határolt zárt halmazban.

11.) $f(x,y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$

a.) Határozza meg a lokális szélsőértékhelyeket!

b.) Határozza meg a függvény minimumát és maximumát, ha létezik, az $x^2 + y^2 \leq 1$ tartományon!

12.) $f(x,y) = (x - y)^3(x + y - 2)x$

a.) Teljesül-e az $y = x$ pontjaiban a lokális szélsőérték létezésére vonatkozó szükséges feltétel?

b.) Az $y = x$ egyenes mely pontjaiban van lokális maximuma, illetve lokális minimuma a függvénynek? (A lokális szélsőérték definíciója alapján adja meg a válaszát!)