ANALÍZIS(1) VIZSGADOLGOZAT 1. rész 2001. január 10.
Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (10 pont)
Adja meg a következő fogalmak definícióját!

   a) $df(z_0, h)$
   b) Valós egyváltozós függvény integrálközelítő összege.
      Adja meg a jelölések tartalmát is!
   c) $a_n = \theta(b_n)$ $\qquad a_n = \Omega(b_n)$

Megoldás:
2 pont, a) $df(x_0, h) = f'(x_0) * h$
4 pont, b) $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_n)\Delta x_n = ???_F$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$
$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}; \qquad \xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$
4 pont, c) $a_n = \sigma(b_n)$
$\exists c_1 > 0 : \qquad |a_n| \leq c_1|b_n|, \quad n > N(\exists N)$
$a_n = \Omega(b_n) : \qquad b_n = \sigma(a_n)$
$(=> \exists c_2 > 0 : \quad c_2|b_n| \leq |a_n|, \quad n > N(\exists N))$

2. feladat (13 pont)

   a) Írja le az inverzfüggvény deriválási szabályát!
   b) Ennek segítségével bizonyítsa be, hogy

$$(\text{arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad x > 1$$

   c) $\left(\text{arch } e^{3x^2+1}\right)' = ?$

Megoldás:
3 pont, a) $f^{-1}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$
6 pont, b) $(\text{arch } x)' = \frac{1}{(\text{ch } u)'|_{u=\text{arch } x}} = \frac{1}{\text{sh arch } x} =$
$= \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2 \text{arch } x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
4 pont, c) $(\text{arch } e^{3x^2+1})' = \frac{1}{\sqrt{(e^{3x^2+1})^2 - 1}} \cdot e^{3x^2+1} \cdot 6x$

3. feladat (17 pont)

$$a_n = \frac{3^n + 4^{n+1}}{2^{3n} + 6^n}$$

   a) $\lim_{n \to \infty} a_n = ?$ Ha felhasznál nevezetes határértéket, akkor azt írja le!

b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor? Ha igen, akkor adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítésnél elkövetett hibára!

c) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor?

Megoldás:

5 pont, a) $a_n = \frac{3^n+4\cdot 4^n}{4^n+6^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{0+0}{0+1} = 0$

ui. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ ha $|a| < 1$

b) $0 < a_n < \frac{4^n+4\cdot 4^n}{6^n} = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$

4 pont $5\sum_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konv. $\Rightarrow$ (majoráns kr) $\sum_1^\infty a_n$ konv.

5 pont $0 < H = \sum_{n=101}^{\infty} a_n < 5\sum_{n=101}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{101}}{1-\frac{2}{3}}$

3 pont, c) Mivel a sor absz. konv $\Rightarrow$ konv.

4. feladat (17 pont)

$$f(x) = |x-1|\cos\frac{\pi}{2}x, \qquad x \in (0,2]$$

a) $f'(1) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

b) $f'(x) = ?$

c) (8 pont) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

4 pont, a) $f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|\cos\frac{\pi}{2}x - 0}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}\cos\frac{\pi}{2}x = 0$

5 pont, b) $f(x) = \begin{cases} -(x-1)\cos\frac{\pi}{2}x & ,x\in[0,1) \\ (x-1)\cos\frac{\pi}{2} & ,x\in[1,2] \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -g(x) & ,x\in[0,1) \\ 0 & ,x=1 \\ g(x) & ,x\in(1,2] \end{cases}$

$g(x) = ((x-1)\cos\frac{\pi}{2}x)' = \cos\frac{\pi}{2}x + (x-1)(-\sin\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2}$

8 pont, c) $\int_0^1 (1-x)\cos\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}(1-x)\sin\frac{\pi}{2}x|_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\mathrm{d}x =$

parciálisan(u,v') $u' = -1 \qquad v = \frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}}$

$= 0 + \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{-\cos\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}}\right|_0^1 = \frac{4}{\pi^2}$

5. feladat (12 pont)

$$\text{a)}\ \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = ? \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sh}(2x+1)}{\mathrm{ch}(2x-1)} = ?$$

Megoldás:

7 pont, a) $lim_{x\to+0} e^{\tan x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1$

$lim_{x\to+0}\frac{-\ln x}{\mathrm{ctg}\ x} =^{\text{L'H}} \lim_{x\to+0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x = 0$

5 pont, b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x+1}-e^{-2x-1}}{e^{2x-1}+e^{-2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e-e^{-4x-1}}{e^{-1}+e^{-4x+1}} = \frac{e-0}{\frac{1}{e}+0} = e^2$
(L'H nem vezet eredményre)

6. feladat (11 pont)

$$\text{a)}\ \int \sin^2 x \cos^3 x \mathrm{d}x = ? \qquad \text{b)}\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} \mathrm{d}x = ?$$

Megoldás:
5 pont, a) $\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \mathrm{d}x = \int (\sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x)\mathrm{d}x =$
$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$
6 pont, b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4-4}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-4}} \mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arch} \frac{x+2}{2}}{\frac{1}{2}} + C$

7. feladat (12 pont)

$$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} \mathrm{d}x = ? \qquad (e^x = t)$$

Megoldás
$e^x = t \quad \Rightarrow \quad x = \ln t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
$I := \int \frac{t+1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
$\frac{t+1}{(t^2+1)\cdot t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \quad \Rightarrow \quad t+1 = A(t^2+1) + (Bt+C)t$
$t+1 = (A+B)t^2 + Ct + A \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad C = 1, \quad B = -1$
$I = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = \ln|t| \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \operatorname{arctg}\, t + C$
$\int \frac{e^x+1}{e^{2x}} \mathrm{d}x = \ln e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) + \operatorname{arctg}\, e^x + C$

8. feladat (8 pont)

a) Definiálja az alábbi fogalmakat!

$$a_n \sim b_n$$

b) Adja meg A és a értékét úgy, hogy

$$\sqrt[n]{(4n)!} \sim A n^n$$

teljesüljön! $\qquad \left(n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \sqrt{2\pi n}\right)$

Megoldás
2 pont, a) $a_n \sim b_n : \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$
6 pont, b) Tudjuk: $a_n \sim b_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$

Ezért

$\sqrt[n]{(4n)!} \sim \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n} \sqrt{2\pi \cdot 4n}} \sim \left(\frac{4n}{e}\right)^{4} \cdot \sqrt{\sqrt[n]{8\pi}\,\sqrt[n]{n}} \sim \left(\frac{4}{e}\right)^{4} n^{4}$

$\Rightarrow \qquad A = \left(\frac{4}{e}\right)^{4}, \quad a = 4$