A1 gyakorlat, 2005-2006/1., 3. hét

2005.09.27./29. Határértékszámolás

A következő feladatokban számítsd ki a sorozatok határértékeit!

1. Racionális törtfüggvények

   a) $\dfrac{5n+1}{8n-3}$ b) $\dfrac{6n^3-8n+2}{n^2+n+1}$ c) $\dfrac{n-8}{n^2-6n+2}$

   Az első példában keresd meg az $\varepsilon = 10^{-2}$-hez tartozó N küszöbindexet!

2. Gyökös kifejezések, gyöktelenítés

   a) $\dfrac{\sqrt[4]{n+3}}{\sqrt[3]{n^2+2n-3}}$ b) $n-\sqrt{n^2-n}$ c) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

   d) $n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$ e) $n(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}}-1)$ f) $\sqrt[3]{1-n^3}+n$

   g) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}}$ h) $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}$

3. n-edik gyökök

   a) $\sqrt[n]{10n}$ b) $\left(\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ c) $\sqrt[n]{a^n+b^n}$

   d) $\sqrt[n]{n^3-n}$ e) $\sqrt[n]{4^n\cdot n}$

4. Exponenciális kifejezések

   a) $\dfrac{1}{(0,9)^n}$ b) $\dfrac{\sin^2 n}{2^n}$ c) $\dfrac{3^n}{n^8}$

   d) $\dfrac{(\frac{10}{11})^n}{(\frac{9}{10})^n+(\frac{11}{12})^n}$ e) $\dfrac{n!}{10^{6n}}$ f) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)\cdot 2^n$

5. Kifejezések faktoriálissal

   a) $\dfrac{n^{15}}{n!}$ b) $\dfrac{n!}{n^n}$ c) $\dfrac{n!+5^n}{(n+1)!-3^n\cdot n^3}$ d) $\sqrt[n]{n!}$

6. Logaritmusos kifejezések (az alap tetszőleges 1-nél nagyobb szám)

   a) $\dfrac{\log n}{n^{\frac{1}{n}}}$ b) $\log n-\log(n+1)$ c) $\dfrac{(\log n)^5}{\sqrt{n}}$ d) $\dfrac{\log(5n+3)}{n^2-8}$

7. Binomiális együtthatókkal

   a) $\dfrac{n^3}{\binom{n}{3}}$ b) $\dfrac{\binom{n}{3}-\frac{n}{3}\binom{n}{2}}{n^2}$ c) $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ d) $\dfrac{3^n}{\binom{2n}{n}}$ e) $\dfrac{5^n}{\binom{2n}{n}}$

További gyakorló példák
(némelyik szerepelhetett (vagy lesz) előadáson, némelyik pedig kifejezetten nehezebb)

1. Az e számhoz tartozó sorozatok ismeretében igazold, hogy

   a) $(\frac{n}{e})^n < n! < e(\frac{n+1}{e})^{n+1},\ n \in \mathbb{N}$

   b) $n! < n(\frac{n}{e})^n,\ n \in \mathbb{N}!$

2. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel bizonyítsd be, hogy

   a) $(1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

   b) $(1-\frac{1}{n})^n \leq (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$

   c) $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$

   d) $(1+\frac{1}{n})^n \leq 4$

   e) $(1-\frac{1}{n})^n \leq \frac{4}{9}$

   f) $(1+\frac{1}{n})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n \leq \frac{4}{n}$.

3. Igazold, hogy $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén $(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

4. A definíció alapján mutasd meg, hogy az alábbi sorozatok konvergensek, valamint határozd meg az $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ hibakorláthoz tartozó legkisebb $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet!

   a) $(\frac{1}{n^2})$

   b) $(\frac{n-1}{n})$

   c) $((-1)^n \frac{1}{n})$

5. Bizonyítsd be, hogy

   a) $\lim \frac{1}{n} = 0$

   b) $\lim n! = \infty$

   c) $\lim n^n = \infty$

   d) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

   e) $\lim q^n = \infty$, ha $q \in \mathbb{R}, q > 1$

   f) $\lim q^n = 0$, ha $q \in \mathbb{R},\ \mid q \mid < 1$

   g) (q^n) divergens, ha $q \leq -1$

   h) $\lim n^\alpha = \infty$, ha $\alpha \in \mathbb{R}_+$

   i) $\lim n^\alpha = 0$, ha $\alpha \in \mathbb{R}_-$

   j) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, ha $a \in \mathbb{R}_+$

   k) $\lim \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1},\ k \in \mathbb{N}$.

6. Mi a $p(x) := \sum_{i=1}^{k} a_i x^i\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R},\ a_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$ polinom határértéke a végtelenben?

7. Legyenek $p(x) := \sum_{i=1}^{k} a_i x^i,\ q(x) := \sum_{i=1}^{m} b_i x^i$, polinomok, $a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_k b_m \neq 0,\ k, m \in \mathbb{N}!$ Mi a $\frac{p}{q}$ ún. racionális törtfüggvény határértéke a végtelenben?

8. Számold ki a következő határtértékeket!

   a) $\lim(1-\frac{1}{n^2})^n$

   b) $\lim(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

   c) $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(2k-1)2k}$

   d) $\lim \sqrt[n+2]{2n+3}$

   e) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n} + 1$

9. És ezeket is!

   a) $\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   b) $\lim \sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt[3]{n^3-n^2}$

   c) $\lim n(\sqrt[3]{n^3+5n} - \sqrt[3]{n^3-3n})$

   d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}}}$

10. Legyen $c \in \mathbb{R}_+,\ c \neq 1,\ a \in \mathbb{R},\ a > 1,\ k \in \mathbb{N}!$ Bizonyítsd be, hogy

    a) $\lim \frac{\log_c n}{n^k} = 0$

    b) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$

    c) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$

    d) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

11. Még mindig a határérték a kérdés.

a) $\dfrac{2^{2n}+n^2}{5^n-n}$ b) $\dfrac{3\cdot 8^{2n}-n^{10}\cdot 3^{3n}}{n^2\cdot 5^n+2\cdot 4^{3n+1}}$ c) $\dfrac{3^n}{(n-1)!}$

d) $\dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$ e) $\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$ f) $\dfrac{2^{n^2}}{n!}$

g) $\dfrac{\sqrt[n]{n^4+2^n}}{n+2}$

12. (Középsorozatok.)

(a) Adott (a_n) sorozat esetén az

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n\in\mathbb{N}$$

sorozatot az eredeti sorozat számtaniközép-sorozatának nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor az (s_n) sorozatnak is létezik határértéke, valamint $\lim(a_n)=\lim(s_n)$!

(b) Adott (a_n) pozitív tagú sorozat esetén a

$$h_n := \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}, \quad n\in\mathbb{N}$$

sorozatot az eredeti sorozat harmonikusközép-sorozatának nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor a (h_n) sorozatnak is létezik határértéke, valamint $\lim(a_n)=\lim(h_n)$!

(c) Adott (a_n) pozitív tagú sorozat esetén a

$$g_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}, \quad n\in\mathbb{N}$$

sorozatot az eredeti sorozat mértaniközép-sorozatának nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak létezik határértéke, akkor a (g_n) sorozatnak is létezik határértéke, valamint $\lim(a_n)=\lim(g_n)$!

13. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\to e$

14. Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat és $q\in\mathbb{R}_+$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, akkor $\lim\sqrt[n]{a_n}=q$