

* 1. feladat (14 pont)

Integráljuk az $f(x, y, z) := (x^2 + y^2)z^2$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) függvényt a $z = 0$ és $z = 3$ egyenletű síkok valamint az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű hengerfelület által határolt korlátos térrészen!

Mo. Jelölje H az integrálási tartományt. Hengerkoordinátákkal (2p) ($H = \underline{C}([0, 2] \times [0, 2\pi] \times [0, 3])$):

$$\begin{aligned} \int_H f &\stackrel{(2p)}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z) r \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 z^2 \, dz \, d\varphi \, dr \stackrel{(3p)}{=} 2\pi \left(\int_0^2 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^3 z^2 \, dz \right) \stackrel{(2p)}{=} \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^2 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^3 \stackrel{(2p)}{=} 72\pi. \end{aligned}$$

* 2. feladat (6+6=12 pont)

Tudjuk, hogy a 2π szerint periodikus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora

$$\Phi_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cos(kx) \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+).$$

a) Egyenletesen konvergens-e az f függvény Fourier-sora $\mathbb{R}$ -en?

b) Jelölje az f függvény Fourier-sorának összegfüggvényét Φ . Folytonos-e a Φ függvény?

Mo. a) Minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left| \frac{1}{k^2} \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad (3p),$$

tehát a Weierstrass-kritérium alapján $(\Phi_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en (3p).

b) Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\Phi_n(f)$ folytonos (2p), és az előző rész alapján $(\Phi_n(f))_{n \in \mathbb{N}^+}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$ -en (2p), ezért Φ folytonos (2p).

* 3. feladat (14 pont)

Számítsuk ki az

$$f(x) := \begin{cases} x & , \text{ ha } x \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

függvény Fourier-transzformáltját!

Mo. A definíció szerint számolunk, minden $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f)(\omega) &\stackrel{(2p)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \stackrel{(1p)}{=} \int_{-1}^1 x e^{-i\omega x} dx \stackrel{(2p)}{=} \underbrace{\int_{-1}^1 x \cos(\omega x) dx}_{0} - i \int_{-1}^1 x \sin(\omega x) dx \stackrel{(3p)}{=} \\ &= -i \left(\left[-x \frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos(\omega x)}{\omega} dx \right) \stackrel{(2p)}{=} 2i \frac{\cos(\omega)}{\omega} - i \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega^2} \right]_{x=-1}^1 \stackrel{(2p)}{=} \\ &= 2i \left(\frac{\cos(\omega)}{\omega} - \frac{\sin(\omega)}{\omega^2} \right).\end{aligned}$$

Illetve

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-1}^1 x dx = 0 \quad (2p).^1$$

4. feladat (12 pont)

Számítsuk ki az

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

integrál értékét!

Mo.

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx &\stackrel{(2p)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b \frac{1}{x \ln(x)} dx \stackrel{(6p)}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |\ln(x)|]_{x=3}^b \stackrel{(2p)}{=} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |\ln(b)| - \ln |\ln(3)|) \stackrel{(2p)}{=} +\infty.\end{aligned}$$

5. feladat (14 pont)

Legyen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}.$$

Határozzuk meg f inflexiós pontjait, továbbá azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex illetve konkáv!

Mo.

$$f'(x) = x - \frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (2p)$$

$$f''(x) = 1 + \frac{2}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad (2p)$$

¹A Fourier-transzformált folytonossága miatt ebből azt is megkaptuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2} \quad (3p).$$

	$] -\infty, -\sqrt[3]{2}[$	$-\sqrt[3]{2}$	$] -\sqrt[3]{2}, 0[$	0	$] 0, +\infty[$	
f''	$+$	0	$-$	$\notin \text{Dom}(f)$	$+$	(6p)
f	$\smile$	infl. pont	$\frown$	$\notin \text{Dom}(f)$	$\smile$	

Előjelek:

$$f''(-2) = \frac{3}{4} > 0, \quad f''(-1) = -1 < 0, \quad f''(1) = 3 > 0. \quad (1p)$$

6. feladat (7+7=14 pont)

Konvergens-e az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \qquad b) \sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$$

Mo. a) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $a_n := \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2}$. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_n} \stackrel{(2p)}{=} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \stackrel{(2p)}{=} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(1p)} \frac{e}{e^2} = \frac{1}{e} < 1,$$

tehát a gyökkritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} a_n$ sor konvergens **(2p)**.

b) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} \stackrel{(2p)}{\geq} \frac{1}{n+2} \stackrel{(1p)}{\geq} 0,$$

és $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{n+2}$ divergens **(2p)**, tehát a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ sor divergens **(2p)**.

7. feladat (4+8=12 pont)

a) Definiáljuk a Cauchy-sorozat fogalmát!

b) Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat!

Mo. a) Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq N$ esetén $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. **(4p)**

b) Legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens számsorozat, és jelölje a határértékét $A \in \mathbb{R}$, valamint legyen $\varepsilon > 0$ **(1p)**. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (3p).$$

Tehát minden $n, m \in \mathbb{N}$ és $n, m \geq N$ -re a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (3p),$$

azaz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat **(1p)**.

8. feladat (4+4=8 pont)

a) Mikor nevezünk egyenletesen konvergensnek egy $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ függvényekből álló függvénysorozatot a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon?

b) Mondjuk ki a függvénysorok egyenletes konvergenciájáról szóló Weierstrass-kritériumot!

Mo. a) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló sorozat, és jelölje $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ a pontonkénti limeszfüggvényét. Azt mondjuk, hogy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $H \subseteq \text{Dom}(f)$ **(1p)** és

$$\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3p)$$

b) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat és $H \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom}(f_n)$. Ha létezik olyan $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat, hogy

- minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup_{x \in H} |f_n(x)| \leq b_n$ **(2p)**,
- a $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ numerikus sor konvergens **(1p)**,

akkor a $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ függvénysor egyenletesen és abszolút konvergens a H halmazon **(1p)**.
