ANALÍZIS 1. **II. aláíráspótló zárthelyi** **2021. december 15.**
Mérnökinformatikus szak β-variáns Megoldások

---

1. feladat (18 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x+2)}{x^2-2x-8}, & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{3\,\mathrm{th}(x^2)}{x-5}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Mo. A függvény folytonos függvények kompozíciója, így a nevező zérushelyeiben, tehát az $x = -2$, $x = 5$ pontban van, valamint az $x = 0$ pontban lehet szakadása. **(3p)** ($x = 4$ esetén nincs baj, hiszen máshogy van értelmezve a függvény.)

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \lim_{x\to -2\pm} \frac{\sin(x+2)}{(x+2)} \cdot \frac{1}{x-4} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right), \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 5\pm} f(x) = \lim_{x\to 5\pm} \frac{3\,\mathrm{th}(x^2)}{x-5} = \pm\infty, \textbf{(3p)}$$

vagyis ebben a pontban a függvénynek másodfajú szakadása van. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \frac{-\sin 2}{8} \neq 0 = \frac{3\,\mathrm{th}(0^2)}{0-5} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\,\mathrm{th}(x^2)}{x-5}, \textbf{(3p)}$$

így az $x = 0$ pontban véges ugrása van a függvénynek. **(2p)**

---

2. feladat (5+10=15 pont)
a) Írja le egy f függgvény x_0 pontbeli deriváltjának definícióját!
b) A definíció alapján számolja ki az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+4}}$ függvény deriváltját az $x_0 = 4$ pontban!

Mo. *a)* Tegyük fel, hogy x belső pontja az f függvény értelmezési tartományának, ekkor $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, amennyiben létezik véges határérték **(5p)** .

b) $$f'(4) \overset{(2p)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{3(4+h)+4}} - \frac{1}{4}}{h} \overset{(2p)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+3h}}{4h\sqrt{16+3h}} =$$

$$\overset{(2p)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{16-(16+3h)}{4h\sqrt{16+3h}(4+\sqrt{16+3h})} \overset{(2p)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-3}{4\sqrt{16+3h}(4+\sqrt{16+3h})} \overset{(2p)}{=} -\frac{3}{128}.$$

3. feladat (10+12+10=32 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{arctg}(3x-6)}{\sin(12-6x)}$ *b)* $\lim_{x\to 0+} (\operatorname{sh} x)^x$ *c)* $\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{ch}(5x+3)}{\operatorname{sh}(2-5x)}$

Mo. *a)* $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így használható a L'Hospital-szabály **(1p)**

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{arctg}(3x-6)}{\sin(12-6x)} \overset{(\mathbf{6p})}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3}{1+(3x-6)^2}}{-6\cos(12-6x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} -\frac{1}{2}.$$

b) 0^0 típusú határérték **(1p)** :

$$\lim_{x\to 0+} (\operatorname{sh} x)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln \operatorname{sh} x}\right)^x \overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} e^{x \ln \operatorname{sh} x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{\lim_{x\to 0+} x \ln \operatorname{sh} x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 1,$$

mert

$$\lim_{x\to 0+} x \ln \operatorname{sh} x \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\ln \operatorname{sh} x}{\frac{1}{x}} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\overset{(\mathbf{1p})}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{\operatorname{sh} x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} -\lim_{x\to 0+} \frac{2x}{\operatorname{ch} x} \overset{(\mathbf{1p})}{=} 0$$

c) A függvények definíciója szerint

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{ch}(5x+3)}{\operatorname{sh}(2-5x)} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{5x+3}+e^{-5x-3}}{e^{2-5x}-e^{5x-2}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-5x}}{e^{-5x}} \cdot \frac{e^{10x+3}+e^{-3}}{e^2-e^{10x-2}} \overset{(\mathbf{3p})}{=} \frac{e^{-3}}{e^2} \overset{(\mathbf{1p})}{=} e^{-5}.$$

4. feladat (17 pont)
Határozza meg az $f(x) = -2\pi + \arcsin(3-5x)$ függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, igazolja, hogy a függvény invertálható, majd adja meg a függvény inverzét, annak értelmezési tartományát és értékkészletét!

Mo. $D_{\arcsin} = [-1,1]$, így $-1 \le 3-5x \le 1 \iff -4 \le -5x \le -2 \iff \frac{4}{5} \ge x \ge \frac{2}{5}$, így $D_f = \left[\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right]$ **(3p)** . $R_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, így $R_f = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$ **(2p)** .

$$f'(x) = \frac{-5}{\sqrt{1-(3-5x)^2}} < 0, (\mathbf{3p})$$

így a függvény szigorúan monoton csökkenő, vagyis invertálható **(2p)** .

$$y = -2\pi + \arcsin(3-5x) \iff 2\pi + y = \arcsin(3-5x) \iff$$
$$\iff \sin(2\pi + y) = 3 - 5x \iff \frac{\sin(2\pi + y) - 3}{-5} = x(\mathbf{4p}),$$

tehát $f^{-1}(x) = \dfrac{\sin(2\pi + x) - 3}{-5} = \dfrac{3 - \sin(x)}{5}$ **(1p)** , és $D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$ **(1p)** és $R_{f^{-1}} = D_f = \left[\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ **(1p)** .

---

5. feladat (18 pont)
Melyek azok a legbővebb intervallumok, amelyeken az $f(x) = (x-5)\,\mathrm{arctg}(x+1)$ függvény konvex, illetve konkáv? Hol vannak inflexiós pontjai a függvénynek?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$ **(1p)** , és

$$f''(x) \overset{(\mathbf{3p})}{=} \left(\mathrm{arctg}(x+1) + \frac{x-5}{1+(x+1)^2}\right)' =$$
$$\overset{(\mathbf{4p})}{=} \frac{1}{1+(x+1)^2} + \frac{1+(x+1)^2 - 2(x-5)(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2} =$$
$$\overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{2+2(x+1)^2 - 2(x-5)(x+1)}{\left(1+(x+1)^2\right)^2} \overset{(\mathbf{2p})}{=} \frac{12x+14}{\left(1+(x+1)^2\right)^2},$$

így $f''\left(-\dfrac{7}{6}\right) = 0$, $f''(x) < 0$, ha $x < -\dfrac{7}{6}$, $f''(x) >$, ha $x > -\dfrac{7}{6}$ **(3p)** , vagyis a függvény a $\left(-\infty, -\dfrac{7}{6}\right]$ intervallumon konkáv, **(1p)** , a $\left[-\dfrac{7}{6}, \infty\right)$ intervallumon konvex **(1p)** , és a $-\dfrac{7}{6}$ pontban inflexiós pontja van **(1p)** .
