1. feladat (4+4=8 pont)
Adja meg a következő komplex mennyiségeket algebrai alakban!

a) $\dfrac{2-3i}{4i+3} =$

Megoldás: $\dfrac{(2-3i)(-4i+3)}{(4i+3)(-4i+3)} = \dfrac{-6-17i}{25}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$ $= \dfrac{-6}{25} + \dfrac{-17}{25}i$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

b) $z^3 = -27i$ egyenlet megoldásai

Megoldás: $z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2)}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$ $= 3(\cos(\pi/2 + 2k\pi/3) + i\sin(\pi/2 + 2k\pi/3)), \qquad (k = 0, 1, 2)$ $\boxed{\textbf{2p.}}$;
$k = 0: \; z = 3(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = 3i;$
$k = 1: \; z = 3(\cos(\pi/2 + 2\pi/3) + i\sin(\pi/2 + 2\pi/3)) = -3\sqrt{3}/2 - 3/2i;$
$k = 2: \; z = 2(\cos(\pi/2 + 4\pi/3) + i\sin(\pi/2 + 4\pi/3)) = 3\sqrt{3}/2 - 3/2i;$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

2. feladat (3+5=8 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$? (Írja le a definíciót!)

Megoldás: Azt mondjuk, hogy a b_n sorozat konvergens és határértéke $B \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{R} : N < n \in \mathbb{N}^+ \implies |b_n - B| < \varepsilon. \boxed{\textbf{3p.}}$$

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^5 + n}{n^5 - 200} = 4.$$

Megoldás:

$$\left| \frac{4n^5 + n}{n^5 - 200} - 4 \right| < \varepsilon \boxed{\textbf{2p.}}$$

$$\left| \frac{4n^5 + n - (4n^5 - 800)}{n^5 - 200} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n + 800}{n^5 - 200} \right| < \varepsilon \boxed{\textbf{1p.}}$$

$n > 3 \implies n \geq 4 \implies n^5 \geq 1024 \implies n^5/2 \geq 512 > 200 \implies 0 < n^5/2 = n^5 - n^5/2 < n^5 - 200$, így ekkor $\left|\dfrac{n+800}{n^5-200}\right| = \dfrac{n+800}{n^5-200} \leq \dfrac{801n}{n^5/2} = \dfrac{1602}{n^4}$.

$\dfrac{1602}{n^4} < \varepsilon \iff n > \sqrt[4]{\dfrac{1602}{\varepsilon}}$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

A küszöb lehet $N(\varepsilon) = \max\left\{3, \sqrt[4]{\dfrac{1602}{\varepsilon}}\right\}$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

3. feladat (5+5+5=15 pont)
Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$a)\quad a_n = \sqrt{n^2+4n+5} - \sqrt{n^2+1}, \quad b)\quad b_n = \frac{n^7 + 2^{2n+4}}{7^n + n^3}, \quad c)\quad c_n = \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n$$

Megoldás:

a) $$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+4n+5}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}}\boxed{\textbf{2p.}} = \frac{n^2+4n+5-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{4n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{4+4/n}{\sqrt{1+4/n+5/n^2}+\sqrt{1+1/n^2}}\boxed{\textbf{2p.}} \to \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = 2\boxed{\textbf{1p.}};$$

b) $$b_n = \frac{n^7/7^n + 16(4/7)^n}{1+n^3/7^n}\boxed{\textbf{3p.}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0\boxed{\textbf{2p.}};$$

c) $\dfrac{3n+2}{n+1} \to 3$, így $\dfrac{3n+2}{n+1} > 2$ ha n elég nagy $\boxed{\textbf{2p.}}$. Ekkor $c_n > 2^n \to \infty$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, és így a speciális rendőrelv miatt $c_n \to \infty$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

4. feladat (4+4+4=12 pont)

$$a_1 = 4, \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{21}{10 - a_n}.$$

a) Igazolja, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $3 < a_n < 7$!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton csökken!

c) Határozza meg az a_n sorozat határértékét!

Megoldás:

a) Teljes indukcióval: $n = 1$-re $3 < a_1 = 4 < 7$ $\boxed{\textbf{1p.}}$;

Indukciós lépés: $3 < a_n < 7 \overset{?}{\Longrightarrow} 3 < a_{n+1} < 7 \quad (n \in \mathbb{N})$. Ez teljesül, hiszen ha $3 < a_n < 7$, akkor $7 = 10 - 3 > 10 - a_n > 10 - 7 = 3$, ezért $3 = \frac{21}{7} < \frac{21}{10 - a_n} < \frac{21}{3} = 7$ $\boxed{\textbf{3p.}}$.

b) Be kell látni, hogy $a_{n+1} \le a_n \quad (n \in \mathbb{N}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. $\frac{21}{10 - a_n} \le a_n$ azzal ekvivalens, hogy $0 \le -a_n^2 + 10a_n - 21$, ami pontosan akkor teljesül, ha $3 < a_n < 7$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, amit az előbb már láttunk $\boxed{\textbf{1p.}}$.

c) Az előzőek szerint a_n konvergens $\boxed{\textbf{2p.}}$, jelölje határértékét $A \in \mathbb{R}$. Ekkor $a_{n+1} \to A$, mert részsorozat, másfelől a határérték és a műveletek kapcsolata miatt $A = \lim a_{n+1} = \lim \frac{21}{10 - a_n} = \frac{21}{10 - A}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$. Két megoldás van $A_1 = 3$ és $A_2 = 7$. Mivel a_n monoton csökkenő, ezért $A = \lim a_n = \inf a_n$, ami nem lehet 7, mert ez nem alsó korlát. Tehát $A = \lim a_n = 3$ $\boxed{\textbf{1p.}}$.

5. feladat (7 pont)

Határozza meg a következő sorozat limesz szuperiorját, limesz inferiorját valamint limeszét, ha létezik!

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{(-4)^n + 2^{2n} + 3^n}$$

Megoldás: $a_n = \frac{9 \cdot 3^n}{(-4)^n + 4^n + 3^n}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$, így

$a_{2n} = \frac{9 \cdot 3^{2n}}{2 \cdot 4^{2n} + 3^{2n}} = \frac{9(9/16)^n}{2 + (9/16)^n} \to \frac{9 \cdot 0}{2 + 0} = 0$, és $a_{2n-1} = \frac{9 \cdot 3^{2n-1}}{-4^{2n-1} + 4^{2n-1} + 3^{2n-1}} = \frac{9 \cdot 3^{2n-1}}{3^{2n-1}} = 9 \to 9$ $\boxed{\textbf{3p.}}$.

Mivel a sorozat minden eleme szerepel a fenti két részsorozat valamelyikében, ezért a_n-nek 2 torlódási pontja van 0 és 9 $\boxed{\textbf{2p.}}$.

Ekkor $\limsup a_n = 9 \ne 0 = \liminf a_n$, és ezért nincs határérték $\boxed{\textbf{1p.}}$.