**Analízis 1.** **1. PZH ($\alpha$)** **2020.11.03.**

## 1. feladat — 10 pont

Határozza meg a

$$\frac{3-3\imath}{2+\imath}, \qquad \text{és} \qquad (3-3\imath)+\overline{(2+\imath)}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

**Megoldás:** $\dfrac{3-3\imath}{2+\imath} = \dfrac{(3-3\imath)(2-\imath)}{(2+\imath)(2+\imath)} = \dfrac{6+3\imath^2-3\imath-6\imath}{4-\imath^2}$, ezért $\mathrm{Re}\left(\dfrac{3-3\imath}{2+\imath}\right) = \dfrac{3}{5}$, és $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3-3\imath}{2+\imath}\right) = -\dfrac{9}{5}$. $\boxed{\textbf{6p.}}$
$\mathrm{Re}\left(3-3\imath+\overline{2+\imath}\right) = 5$, $\mathrm{Im}\left(3-3\imath+\overline{2+\imath}\right) = -4$. $\boxed{\textbf{4p.}}$

## 2. feladat — 18 pont

Határozza meg a

$$z^4-16 \qquad \text{és} \qquad z^5-27\imath z^2$$

polinomok komplex gyökeit algebrai alakban!

**Megoldás:** $0 = z^4-16$ megoldásai $z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,4} = \pm 2\imath$. $\boxed{\textbf{7p.}}$
$0 = z^5 - 27\imath z^2 = (z^3-27\imath)z^2$ megoldásai $z_k = \sqrt[3]{27\imath} = 3\sqrt[3]{\cos 90^\circ + \imath \sin 90^\circ} = 3\left(\cos\left(30^\circ + k120^\circ\right) + \imath \sin\left(30^\circ + k120^\circ\right)\right)$, $(k=0,1,2)$, azaz $z_{0,1} = \pm 1.5\sqrt{3} + 1.5\imath$, $z_2 = -3\imath$ és $z_{3,4} = 0$. $\boxed{\textbf{11p.}}$

## 3. feladat — 32 pont

Határozza meg az

- $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n}{n^2+n^3}}$;
- $b_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+3}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

**Megoldás:** $3 \leftarrow \dfrac{3}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}^3} = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n^3+n^3}} \le a_n \le \sqrt[n]{\dfrac{3^n+3^n}{1}} = \sqrt[n]{2}\cdot 3 \to 3$, így a rendőrelv miatt $a_n \to 3$ $\boxed{\textbf{16p.}}$
$b_n = \left(\dfrac{1+4.5/3n}{1-7.5/3n}\right)^{3n}\left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^3 \to \dfrac{e^{4.5}}{e^{-7.5}}\cdot 1 = e^{12}$ $\boxed{\textbf{16p.}}$

**4. feladat** **16 pont**

Mondja ki a rendőrelv valamelyik változatát!

Határozza meg a

- $c_n = \dfrac{(-2)^{5n} + (-2)^{-5n}}{(-2)^{4n} + (-2)^{-4n}}$;

sorozat határértékét, ha létezik!

**Megoldás:** Rendőrelv bármelyik változata (akár speciális) $\boxed{\textbf{2p.}}$

$$c_n = \frac{(-32)^n + \dfrac{1}{(-32)^n}}{16^n + \dfrac{1}{16^n}} = \frac{(-2)^n + \dfrac{1}{(-512)^n}}{1 + \dfrac{1}{256^n}}$$

$$c_{2n} = \frac{2^{2n} + \dfrac{1}{512^{2n}}}{1 + \dfrac{1}{256^{2n}}} \to \infty$$

$$c_{2n-1} = \frac{-2^{2n-1} - \dfrac{1}{512^{2n-1}}}{1 + \dfrac{1}{256^{2n-1}}} \to -\infty \boxed{\textbf{10p.}}$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: $\pm\infty$.
$\limsup c_n = \infty, \liminf c_n = -\infty$ határérték nem létezik. $\boxed{\textbf{4p.}}$

**5. feladat** **24 pont**

Legyen $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = \sqrt[3]{5a_n^2 - 4a_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából!

**Megoldás:** $A = \sqrt[3]{5A^2 - 4A}$ egyenlet megoldásai $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ és $A_3 = 4$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $1 \le a_n \le 4$ minden $n$-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$
$n = 1$ esetén $1 \le a_1 = 3 \le 4$ teljesül.
Ha $1 \le a_n \le 4$, akkor $1 \le 5a_n - 4 \le 16$, ezért $1 \le a_n \cdot (5a_n - 4) = 5a_n^2 - 4a_n \le 64$, tehát $1 \le \sqrt[3]{5a_n^2 - 4a_n} = a_{n+1} \le 4$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Megmutatjuk, hogy $a_n \le a_{n+1}$ minden $n$-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Köbre emelés után $a_n^3 \le 5a_n^2 - 4a_n$, azaz $a_n(a_n^2 - 5a_n + 4) = a_n^3 - 5a_n^2 + 4a_n \le 0$, ami teljesül mivel $a_n > 0$ és $a_n^2 - 5a_n + 4 \le 0$ az előbbi korlátok között. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Megmutattuk, hogy $a_n$ monoton, és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt[3]{5A^2 - 4A}$ egyenletet. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Mivel $a_n$ monoton növő, ezért $A \ge a_1 = 3$, így a fenti gyökök közül csak az $A_3 = 4$ lehet a határérték. $\boxed{\textbf{3p.}}$

IMSC **feladat** **8 pont**

(a) Számolja ki a $\lim \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ határértéket!

(b) $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} > \frac{1}{\mathrm{e}}$ felhasználásával számolja ki a $\lim \frac{(3n)!}{n^{3n}}$ határértéket!

**Megoldás:**

(a) A mértani és számtani közepek közötti egyenlőtlenség miatt $\frac{k \cdot (2n-k)}{n^2} \leq 1$ minden $k \in \{0, \ldots, 2n\}$ esetén. Ezt felhasználva

$$0 \leq \frac{(2n)!}{n^{2n}} = \frac{1 \cdot (2n-1)}{n^2} \cdot \underbrace{\frac{2 \cdot (2n-2)}{n^2}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n^2}}_{\leq 1} \cdot \frac{n \cdot 2n}{n^2} \leq \frac{2(2n-1)}{n^2} \to 0$$

A rendőrelv miatt $\lim \frac{(2n)!}{n^{2n}} = 0.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$

(b) $n$ helyére $3n$-et írva kapjuk, hogy $\frac{\sqrt[3n]{(3n)!}}{3n} > \frac{1}{\mathrm{e}}$, amiből $\frac{(3n)!}{n^{3n}} > \left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)^{3n} \to \infty$, így a speciális rendőrelv miatt $\lim \frac{(3n)!}{n^{3n}} = \infty.$ $\boxed{\textbf{4p.}}$