1. pótzh
2007. december 14.
Feladatok és megoldások

1. feladat:

Amennyiben az ötös lottón a számokat egymás után húzzák ki, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a számokat növekvő sorrendben húzzák ki?

Első megoldás:

A 90 szám közül 5-öt viszatevés nélkül kihúzva a lehetséges variáció száma:

$$90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 = \frac{90!}{85!}$$

Azon sorozatok száma, melyekben a számok növekedő sorozatot alkotnak, egyenlő azzal, hogy a 90 szám közül hány féleképpen lehet 5-öt kivenni, vagyis $\binom{90}{5}$. Ezért a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{90}{5}}{\frac{90!}{85!}} = \frac{1}{5!} = 0,08$$

Második megoldás:

Akármelyik öt számot is húzzák ki, az öt szám $5!$ féle lehetséges sorrendje mindegyike ugyanolyan esélyű. Ezek között egyetlen olyan sorrend van, amikor az öt szám növekvő sorozatot alkot, ezért a kérdezett valószínűség $\frac{1}{5!} = 0,08$.

2. feladat:

Egy kapus tizenegyesek védését gyakorolja úgy, hogy sok tizenegyest rúgnak neki. Átlagosan az ötödiket védi ki először. Mi a valószínűsége annak, hogy

a) csak a 9. rúgást védi ki először?

b) az első 7 rúgás közül legalább hármat kivéd?

(Feltesszük, hogy az egyes rúgások sikere azonos esélyű és független az előzőektől.)

Megoldás:

Az a valószínűségi változó, hogy hányadik az rúgás, amelyiket a kapus elsőszörre kivéd, geometriai eloszlást követ. Az eloszlás várható értéke a feladat szövege szerint 5, ezért a paraméter reciproka 5-tel egyenlő, vagyis a paraméter $\frac{1}{5}$. Az a) kérdésre tehát a válasz:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right) = 0,034$$

Az a valószínűségi változó, hogy 7 rúgás közül hányat véd ki a kapus, binomiális eloszlást követ 7 és $\frac{1}{5}$ paraméterekkel. A b) kérdésre tehát a válasz:

$$\sum_{k=3}^{7} \binom{7}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{7-k} = 0,148$$

3. feladat:

Egy magas mennyezeten található égő 0.4 valószínűséggel 40W-os, 0.6 valószínűséggel 60W-os. Az égők élettartama exponenciális eloszlású, a 40 W-osoké 2500 óra átlaggal, a 60W -osoké pedig 2800 óra átlaggal. Ha a mennyezeten található égő nem éli meg a 2700 óra élettartamot, akkor mi a valószínűsége, hogy 40W-os?

Megoldás: A feladat szövege szerint $P(40\text{W}) = 0,4$, $P(60\text{W}) = 0,6$. A 40W-os izzók élettartama 2500 óra várható értékű exponenciális eloszolást követnek, ezért

$$P(\text{élettartam} < x|40\text{W}) = 1 - e^{\frac{x}{2500}}$$

A 60W-os izzók élettartama 2800 óra várható értékű exponenciális eloszolást követnek, ezért

$$P(\text{élettartam} < x|60\text{W}) = 1 - e^{\frac{x}{2800}}$$

A kérdezett feltételes valószínűség:

$$P(40\text{W}|\text{élettartam} < 2700) = \frac{P(40\text{W} \bigcap \text{élettartam} < 2700)}{P(\text{élettartam} < 2700)}$$

$$= \frac{P(40\text{W})\ P(\text{élettartam} < 2700|40\text{W})}{P(40\text{W})\ P(\text{élettartam} < 2700|40\text{W}) + P(60\text{W})\ P(\text{élettartam} < 2700|60\text{W})}$$

$$= \frac{0,4\ \left(1 - e^{\frac{2700}{2500}}\right)}{0,4\ \left(1 - e^{\frac{2700}{2500}}\right) + 0,6\ \left(1 - e^{\frac{2700}{2800}}\right)} = 0,416$$