1. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést : (12 pont)

$$\left(\frac{2}{x^2-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{2x^2+2x}{x^3-1} = \left(\frac{2}{x\cdot(x-1)}+\frac{2x}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(x+1)+2x^2}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = = \frac{2\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \boxed{=\frac{4}{(x-1)^2}} .$$

2. Egy téglalap oldalai $a=10$ cm, $b=20$ cm .
Az a oldal hosszát 10 %-kal növeljük, a b oldal hosszát 20 %-kal csökkentjük.
Hány százalékkal változik a téglalap területe ? (12 pont)

Az eredeti téglalap területe $T_1=a\cdot b$, a módosítotté $T_2=(1.1\cdot a)\cdot(0.8\cdot b)=0.88\cdot a\cdot b=0.88\cdot T_1$ $\Rightarrow$

T_2 a T_1-nek 88 százaléka, tehát $\boxed{\text{12 % -kal csökken a téglalap területe}}$.

3. Adjuk meg az $f(x):=\ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit : (13 pont)

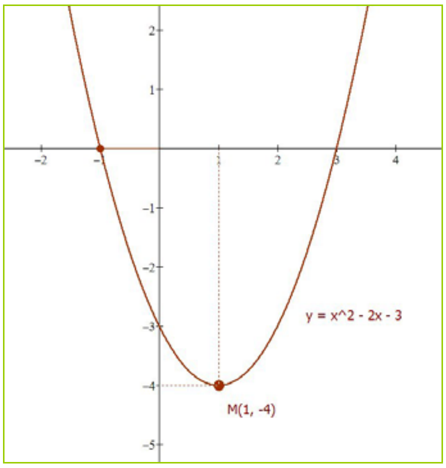
I. Értelmezési tartomány : $x-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}>0 \Leftrightarrow$

a.) $x>0$ és $x^2-1>0 \Leftrightarrow \boxed{x>1}$, **b.)** $x<0$ és $x^2-1<0 \Leftrightarrow \boxed{-1<x<0}$,

tehát $D_f=(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

II. Zérushelyek : $f(x)=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

4. Az $y=x^2+b\cdot x+c$ parabola csúcspontja $M(1,-4)$. (13 pont)
A parabola és az x tengely egyik metszéspontja : -1 .
Adjuk meg b és c értékét ! Adjuk meg a parabola és az x tengely másik metszéspontját is !



A csúcspont koordinátái kielégítik az egyenletet : $-4=1^2+b\cdot1+c$,
A $(-1,0)$ pont a parabolára illeszkedik : $0=(-1)^2+b\cdot(-1)+c$

$\Rightarrow$ $-5=b+c$, $-1=-b+c$ $\Rightarrow$ (a két egyenletet összeadjuk) $\Rightarrow$

$\boxed{c=-3\ ,\ b=-2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=x^2-2x-3}$ a parabola egyenlete .

Az x tengellyel való másik metszéspont a $0=x^2-2x-3$ egyenletből,
felhasználva, hogy az egyik gyök $x_1=-1$, s a gyökök összege 2 ,
(vagy a tengelyre vonatkozó szimmetriából) : $x_2=3$, a metszéspont tehát $(3,0)$

.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet : (8 pont)

$$4^x - 10\cdot 2^x = -2^4 \quad\Leftrightarrow\quad (2^x)^2 - 10\cdot 2^x + 16 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2^x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 16}}{2} = 5 \pm 3 \quad\Rightarrow\quad 2^x = 2 \text{ vagy } 2^x = 8$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 1\,,\ 3}\ .$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$\sqrt{1-\cos^2 x} - \sin 2x = 0 \qquad (\ x \in [0, 2\pi]\ ) \qquad\Leftrightarrow\qquad |\sin x| = 2\cdot \sin x \cdot \cos x \quad\Rightarrow$$

I. Ha $\sin x = 0$, akkor az egyenlőség teljesül (0=0), tehát $\boxed{x = 0,\ \pi,\ 2\pi}$ megoldások.

II. Ha $\sin x \neq 0$, akkor $0 < x < \pi$ esetén $1 = 2\cdot\cos x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$; $\pi < x < 2\pi$ esetén $-1 = 2\cdot \cos x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$.

3. Egy (a_n) mértani sorozat első három tagjának összege 63.
Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk.
Mi a mértani sorozat **?** (17 pont)

Legyen a számtani sorozat (b_n), a differencia d, a mértani sorozat hányadosa q.

$(b_2 - d) + b_2 + (b_2 + d) = 63 + 3 - 30 = 36 \quad\Rightarrow\quad \boxed{b_2 = a_2 = 12}$. A mértani sorozatra $\frac{a_2}{q} + a_2 + a_2\cdot q = 63 \quad\Rightarrow$

$$12 + 12\cdot q + 12\cdot q^2 = 63\cdot q \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot q^2 - 17\cdot q + 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad q = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 8^2}}{8} = \frac{17 \pm 3\cdot 5}{8} \quad\Rightarrow\quad \boxed{q_1 = 4\ ,\quad q_2 = \frac{1}{4}}\ .$$

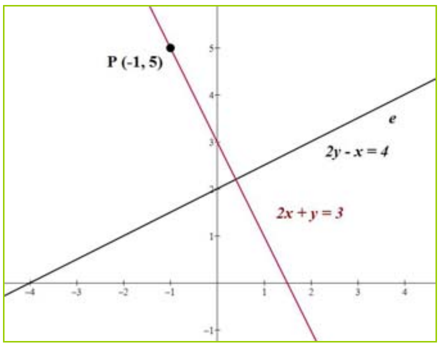
$\Rightarrow$ A mértani sorozat : $\boxed{a_1 = 3,\ \ a_2 = 12,\ \ a_3 = 48,\ \ldots \qquad q = 4}$, vagy

$\boxed{a_1 = 48,\ \ a_2 = 12,\ \ a_3 = 3,\ \ldots \qquad q = \frac{1}{4}}$,

4. Adott egy egyenes $e:\ 2y - x = 4$, és a $P(-1, 5)$ pont .
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges e-re, és átmegy P-n **!** (13 pont)

e egy normálvektora $\mathbf{n} = (-1, 2)$, erre merőleges pl. az $\mathbf{m} = (2, 1)$ vektor.
Így a P-n átmenő e-re merőleges egyenes egyenlete :

$2x + y = -2 + 5 \quad\Rightarrow\quad \boxed{2x + y = 3}$.



A két egyenes metszéspontjának meghatározása :

$$y = 3 - 2x\ , \quad 2\cdot(3 - 2x) - x = 4 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{2}{5}\ , \quad y = 3 - 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{Mp = (\ 0.4,\ 2.2\ )}$.

1. Rakjuk nagyság szerinti sorrendbe az alábbi kifejezéseket ! Számítsuk ki a pontos értékeket is ! (13 pont)

$A = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$, $B = \sqrt[3]{-27} = -3$, $C = e^{\ln 4} = 4$, $D = (\frac{1}{9})^{\log_3 5} = ((3)^{-2})^{\log_3 5} = (3)^{(-2)\cdot\log_3 5} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$,

$E = \ln 1 = 0$, $F = \cos 7\pi = \cos(\pi + 6\pi) = \cos\pi = -1$, $G = 2\cdot\log_2\sqrt{56} - \log_2 7 = \log_2\frac{56}{7} = \log_2 8 = 3$

$\Rightarrow \quad \boxed{B < F < E < D < A < G < C}$.

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket : (12 pont)

a.) $$\frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\frac{2-2x+3x-1}{1-x}} = \frac{-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{1-x}{x+1} \boxed{= \frac{1}{(x+1)^2}} .$$

b.) $$\frac{(x^2+2x+1)\cdot(x^3-x)}{(x^2+x)\cdot(4x^2+8x+4)} = \frac{(x+1)^2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot 4\cdot(x+1)^2} \boxed{= \frac{x-1}{4}} .$$

3. Egy gép értéke évente 20 %-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének 3/4 -éért eladták.
Az eredeti érték hány százalékáért jutott az új tulajdonos a géphez ? (10 pont)

Legyen a gép eredeti értéke E . Ekkor a második év végén az értéke $E\cdot 0.8^2$ lesz (az évi 20 % -os értékcsökkenés miatt) .

Ennek 3/4 -ed része $E\cdot 0.8^2\cdot\frac{3}{4} = E\cdot 0.4^2\cdot 3 = E\cdot 0.48 \Rightarrow$ Az eredeti érték 48 % -áért jutott az új tulajdonos a géphez .

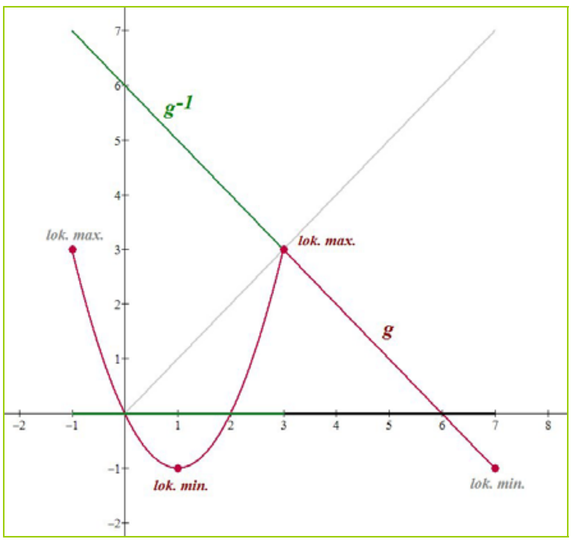
4. Legyen $f(x) := \begin{cases} x^2-2x & , \text{ ha } x \le 3 \\ 6-x & , \text{ ha } x > 3 \end{cases}$. **a.)** Ábrázoljuk az f függvényt ! **b.)** Adjuk meg az f zérushelyeit !

c.) Adjuk meg az f függvény $[-1, 7]$ intervallumba eső lokális minimum- és maximumhelyeit, majd értékeit !

d.) Adjuk meg az f $[3, 7]$ intervallumra való leszűkítésének inverzét (Értelmezési tartomány, értékkészlet, grafikon is) !

(15 pont)

a.)



b.) $f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \le 3$ esetén $x\cdot(x-2) = 0$,
$x > 3$ esetén pedig $6 - x = 0$,

így $\boxed{f \text{ zérushelyei } 0,\ 2 \text{ és } 6}$.

c.) Lok. min. helyek a $[-1, 7]$ intervallumban : $\boxed{x = 1,\quad f(1) = -1}$,

Lok. max. helyek a $[-1, 7]$ intervallumban : $\boxed{x = 3,\quad f(3) = 3}$,

d.) Legyen $g := f\big|_{[3,7]} \Rightarrow g : [3, 7] \to [-1, 3]$, $g(x) = 6 - x$,

g injektív (u.i. szig. mon. fogyó) $\Rightarrow x = 6 - g^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{g^{-1}(x) = 6 - x}$, $D_{g^{-1}} = [-1, 3]$, $R_{g^{-1}} = [3, 7]$.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet : (10 pont)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\frac{x+9}{2x+2}} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x+9}{x+1} \Leftrightarrow (2x+3)\cdot(x+1)=(x+9)\cdot(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+5x+3=2x^2+17x-9 \quad \Leftrightarrow \quad 12x=12 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=1} \ .$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$\cos x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\sin x+\sin 2x = \frac{1}{\cos x} \quad (\ \cos x\neq 0\ ) \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+2\sin x\cdot\cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x\cdot\cos x\cdot(1+2\cos x) = 0 \quad \Rightarrow$$

I. $\sin x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$,

II. $\cos x=-\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=\dfrac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$ vagy $\boxed{x=\dfrac{4\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

3. Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21.
Ha az elsőhöz 6 -ot, a másodikhoz 13 -at és a harmadikhoz 30 -at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk.
Mi a számtani sorozat ? (15 pont)

Legyen a számtani sorozat (a_n), a differencia d, a mértani sorozat (b_n), hányadosa q.

$$(a_2-d)+a_2+(a_2+d)=21 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_2=7} \ , \quad b_2=a_2+13=20 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{20}{q}+20+20\cdot q=21+6+13+30 \quad \Rightarrow \quad 20+20\cdot q^2=50\cdot q \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0$$

$$\Rightarrow \quad q=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad q_1=2\,,\quad q_2=\frac{1}{2}\ .$$

A mértani sorozat első három tagja tehát $\boxed{10,\ 20,\ 40 \quad \text{vagy} \quad 40,\ 20,\ 10}$.

$\Rightarrow$ A számtani sorozat : $\boxed{a_1=4,\ a_2=7,\ a_3=10,\ \dots \qquad d=3}$, vagy

$\boxed{a_1=34,\ a_2=7,\ a_3=-20,\ \dots \qquad d=-27}$,

4. Adott két egyenes : $g:\ y-2x=5$ és $h:\ 2y+3x=3$ és a $P(5,2)$ pont.
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P ponton és a két egyenes metszéspontján ! (13 pont)

A két egyenes metszéspontját az egyenletrendszerük megoldása adja, azaz $y=2x+5 \ \Rightarrow \ 2\cdot(2x+5)+3x=3 \ \Rightarrow \ 7x=-7$
$\Rightarrow \ \boxed{x=-1,\quad y=3}$. A metszéspontra és P -re illeszkedő egyenes egy irányvektora : $\mathbf{v}=(5-(-1),\,2-3)=(6,-1)$, $\Rightarrow$
egy normálvektora : $\mathbf{n}=(1,6)$, így egyenlete : $x+6y=1\cdot 5+6\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x+6y=17}$.

Megj. : A 4. feladatot másként megoldva:

A két egyenes metszéspontjára illeszkedő egyenesek egyenletei megadhatók $\lambda \cdot (-2x+y-5)+\mu \cdot (3x+2y-3)=0$ alakban, ahol $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$. A meghatározandó egyenes tehát $(-2\lambda+3\mu)\cdot x+(\lambda+2\mu)\cdot y = 5\lambda+3\mu$ alakba írható, s mivel a P pontra is illeszkedik, így $(-2\lambda+3\mu)\cdot 5+(\lambda+2\mu)\cdot 2 = 5\lambda+3\mu$ teljesül, azaz $-13\lambda+16\mu = 0$. $\lambda := 1$ választható, így $\mu = \frac{13}{16}$. Az egyenlet tehát: $(-2+\frac{39}{16})\cdot x+(1+\frac{26}{16})\cdot y = 5+\frac{39}{16}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{x+6y=17}$.