Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Híradástechnika Tanszék

Sorbanállásos Rendszerek
vizsgasorok és megoldásaik

Szabó Csanád István
egyetemi hallgató

Dr. Telek Miklós
egyetemi docens

Budapest, 2000

Az öt kidolgozott vizsgasorból álló anyag javított változata.

Budapest, 2000. október 30.

Irodalom:

- Györfi László - Páli István: Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996
- Jereb László - Telek Miklós: Sokfelhasználós kommunikációs rendszerek. Nyomtatott jegyzet, Budapest, 1999
- Leonard Kleinrock: Queueing Systems, Volume I: Theory. Wiley, New York, 1975.

1999. december 22. vizsga:

kiskérdések:

1. *X egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, c egy pozitív szám. Adja meg az $Y = max(X, c)$ valószínűségi változó várható értékét.*
   $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, $c > 0$ és $Y = max(X, c)$:
$$Y = \left\{ \begin{matrix} c,\ X \leqslant c \\ X,\ X > c \end{matrix} \right\} \Longrightarrow E(Y) = c \int_0^c \lambda\, e^{-\lambda t} \mathrm{d}t + \int_c^\infty t\, \lambda\, e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

2. *Adja meg az $F(t)$ eloszlásfüggvénnyel adott X valószínűségi változó c-től hátralevő élettartamának eloszlását.*
   Definiáljuk az X valószínűségi változó c-től hátralevő élettartamának eloszlását úgy, hogy bevezetjük : $\bar{X} = (X - c \mid X > c)$!
   Keresett tehát az $F_{\bar{X}}(t)$ eloszlásfüggvény:
$$F_{\bar{X}}(t) = Pr(\bar{X} < t) = Pr(X - c < t \mid X > c) = \frac{Pr(X - c < t,\, X > c)}{Pr(X > c)} =$$
$$= \frac{Pr(c < X < t + c)}{Pr(X > c)} = \frac{F(t + c) - F(c)}{1 - F(c)}$$
   Exponenciális eloszlásfüggvény esetén:
$$\frac{F(t + c) - F(c)}{1 - F(c)} = \frac{(1 - e^{-\lambda(t+c)}) - (1 - e^{-\lambda c})}{1 - (1 - e^{-\lambda c})} = \frac{e^{-\lambda c} - e^{-\lambda(t+c)}}{e^{-\lambda c}} = 1 - e^{-\lambda t}$$
   a hátralevő élettartam eloszlásfüggvénye jól láthatóan nem függ c-től, mint tudjuk *örökifjú.*

3. *Miért nem vizsgálható közvetlenül folytonos idejű Markov lánccal az $M/G/1$ rendszer? E rendszernek milyen jellemzője vizsgálható Markov lánccal? Miért?*
   Az $M/G/1$ rendszerben egy igény kiszolgálása alatt a folyamat jövője – a rendszerben levő igények száma – függ attól, hogy mióta van kiszolgálás alatt az igény, ezért nem írható fel rá Markov lánc.
   Csak a távozási pillanatokba beágyazott Markov lánc teljesíti az emlékezetmentesség feltételét, ezekben a pillanatokban a hátralevő kiszolgálási idő nem függ az addig eltelt időtől (vö. örökifjúság követelménye).

4. *Milyen módszerrel határozható meg (egyszerűen) a diszkrét idejű születési halálozási Markov láncok egyensúlyi eloszlása? Adja meg az egyensúlyi eloszlást véges es végtelen állapottér esetén, ha az i állapotban a "születés" valószínűsége p_i, a "halálozásé" pedig q_i.*
   Felírjuk az állapotba be- illetve kiáramló valószínűségeket, ezeknek a valószínűség-áramlásra vonatkozó feltétel miatt egyensúlyi állapotban meg kell egyezniük. Ha tehát

az i.-dik állapotban p_i valószínűséggel lép előre, ill. q_i valószínűséggel vissza és a_i az állapot valószínűsége, akkor: $a_i p_i = a_{i+1} q_{i+1}$, ebből $a_{i+1} = \frac{p_i}{q_{i+1}} a_i$ és ismert, hogy $a_1 = \frac{p_0}{q_1} a_0$.
Kihasználva, hogy $\sum_i a_i = 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}} a_0 = 1 \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}}$$

Ezután már csak különbséget kell tennünk véges és végtelen állapottér között:

$$a_m = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}}{1 + \sum_{i=0}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}} \qquad \text{véges (N) állapottérre}$$

$$a_m = \frac{\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}}{1 + \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{p_j}{q_{j+1}}} \qquad \text{végtelen állapottérre}$$

5. *Adja meg az $M/M/\infty$ rendszer határeloszlását! Mi a stabilitás feltétele?*
Az $M/M/\infty$ rendszer határeloszlását és stabilitásának feltételét az előző példával analóg módon számoljuk ki. Itt az előrelépés intenzitása mindig λ, míg a visszalépésé állapotfüggő, $i\mu$. Így: $p_i = \frac{\lambda}{i\mu} p_{i-1}$ és $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$.

$$p_i = \prod_{k=1}^{i} \frac{\lambda}{k\mu} p_0 = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

$$p_0 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}}_{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Az állapotok valószínűsége – egyensúlyi eloszlásnál – megfelel egy $\frac{\lambda}{\mu}$ paraméterű Poisson eloszlásnak:

$$p_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

A stabilitás feltétele pedig $\mu > 0$.

1. feladat

Egy kétkiszolgálós diszkrét sorbanállási rendszerbe a rendszer állapotától és a korábbi időközöktől függetlenül egy időegységben p valószínűséggel érkezik egy igény és $1 - p$ valószínűséggel egy sem. Az igények kiszolgálása az érkezést követő időrésben kezdődik. Egy megkezdett kiszolgálás egy adott időrésben – a korábbi időrésektől függetlenül – r valószínűséggel befejeződik, vagy $1 - r$ valószínűséggel a következő időrésben tovább folytatódik.

(a) Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját és adja meg az egyensúlyi eloszlást, ha a rendszerben nincs puffer!

(b) Adja meg az igényvesztés valószínűségét, ha nincs puffer!

(c) Adja meg a rendszer kihasználtságát, ha végtelen a puffer és stabil a rendszer!

(d) Adjon felső korlátot p értékére, ha r ismert!

Keresett a rendszer állapotgráfja és az egyensúlyi eloszlás, ha a rendszerben nincs puffer!
A rendszerben két kiszolgáló van puffer nélkül, valamint az igény kiszolgálása csak az érkezést követő időrésben kezdődhet. Azt az állapotot, amikor két igény van a rendszerben és nem fejeződik be egy igény kiszolgálása sem, de egy új igény érkezik, úgy tekintjük, hogy az érkező igényt a rendszer kénytelen eldobni.
Nézzük meg, hogy mik a lehetséges esetek az egyes állapotokban!
(A 0.-dik állapot triviális, ezért azt nem részletezem.)

1. állapot:

érk.	táv.	valószínűség	köv. áll.
0	0	$(1-p)(1-r)$	1
0	1	$(1-p)r$	0
1	0	$p(1-r)$	2
1	1	pr	1

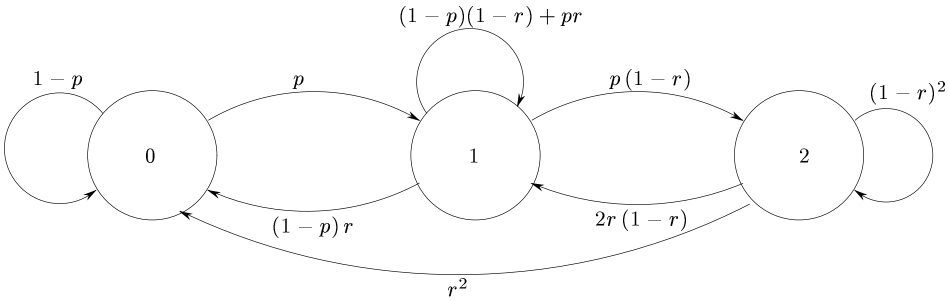
2. állapot:

érk.	táv.	valószínűség	köv. áll.
0	0	$(1-p)(1-r)^2$	2
0	1	$(1-p)(1-r)\,2r$	1
0	2	$(1-p)r^2$	0
1	0	$p(1-r)^2$	2
1	1	$p(1-r)\,2r$	1
1	2	pr^2	0

Az állapotgráfot a táblázatok alapján már könnyedén felvehetjük:

Az egyensúlyi eloszlást pedig a következő egyenletekből számoljuk:

$$p\,a_0 = r(1-p)\,a_1 + r^2\,a_2$$
$$p(1-p)\,a_1 = r(2-r)\,a_2$$
$$\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$$



Végeredményként a következő már elfogadható (egyszerűsítés az olvasóra bízva):

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \left(\frac{r}{p}(1-p) + \frac{r^3(2-r)}{p^2(1-r)}\right)\left[\frac{r}{p}(1-p) + \frac{r(1-r)}{2-r} + \frac{1-r}{r(2-r)} + 1\right]^{-1} \\
a_1 &= \left[\frac{r}{p}(1-p) + \frac{r(1-r)}{2-r} + \frac{1-r}{r(2-r)} + 1\right]^{-1} \\
a_2 &= \frac{r(2-r)}{p(1-r)}\left[\frac{r}{p}(1-p) + \frac{r(1-r)}{2-r} + \frac{1-r}{r(2-r)} + 1\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

Keresett az igényvesztés valószínűsége, ha nincs puffer!

Puffer nélküli esetben igényvesztés csakis a 2. állapotban lép fel és valószínűsége *egy időrésben* megegyezik az igény érkezésének valószínűségével. Az elvesző igények részaránya, azaz az igényvesztés valószínűsége azonban:

$$p_v = \frac{a_2\,p}{p} = a_2$$

Keresett a rendszer kihasználtsága, ha végtelen a puffer és stabil a rendszer!

Egykiszolgálós rendszerben a kihasználtság definició szerint egyenlő az érkező igények várható értékének és a várható kiszolgálási időnek a szorzatával. Többkiszolgálós esetben annyiban módosul, hogy leosztunk a kiszolgálók számával. (*Figyelem!* Ezt még a feladatok során sokszor ki fogjuk használni!) Tehát:

$$\varrho = \frac{p}{2\,r}$$

Keresett p értékének felső korlátja, ha r ismert!

Stabil rendszerben a kihasználtság kisebb mint 1! Ha $\varrho < 1$, akkor:

$$p < 2r$$

2. feladat

Egy 3 kapacitású kiszolgáló csatornába kétféle igény érkezhet. Az első igénytípus λ_1 paraméterű Poisson folyamat szerint, egy kiszolgálási csatornát és μ_1 paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási időt igényelve, míg a második λ_2 paraméterű Poisson folyamat szerint érkezik, két csatornát használ μ_2 paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási idővel.

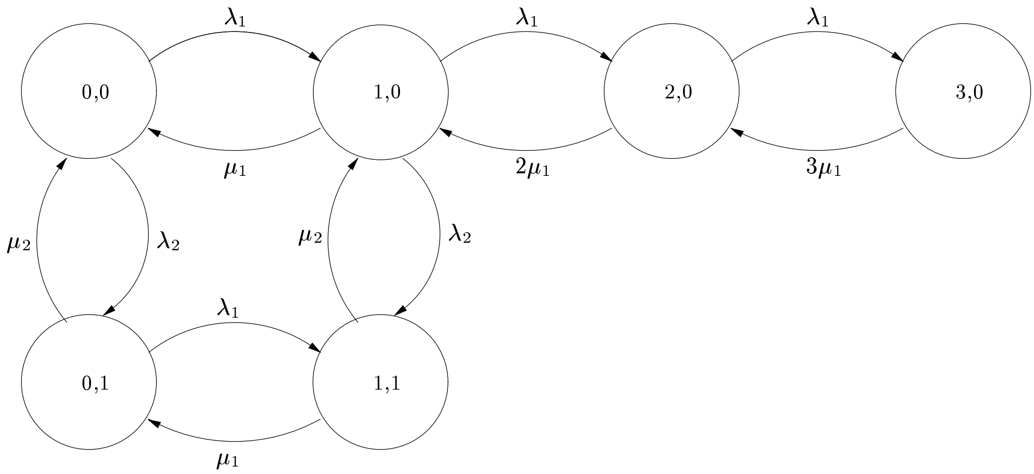
(a) Adja meg a rendszer viselkedését leíró Markov láncot és az átmeneti intenzitás mátrixot, ha nincs puffer!

(b) Adja meg az átlagos csatornakihasználtságot és az igényvesztés valószínűségét (feltételezve, hogy ismert az egyes állapotok valószínűsége.

(c) Hogyan változna a rendszer viselkedését leíró Markov lánc, ha csak kettő kiszolgáló csatorna lenne, de lenne még egy puffer is, amelyben az igények a kiszolgálási igényüktől függetlenül csak egy helyet igényelnének? Hogyan lenne ekkor felírható az igényvesztés valószínűsége?

Keresett a rendszer viselkedését leíró Markov lánc és az átmeneti intenzitás mátrix, ha nincs puffer!

Két különböző fajtájú igényt kell kezelnünk, ezért érdemes kétdimenziós Markov láncban gondolkodni, mely következőképpen néz ki:



Az intenzitás mátrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 2\mu_1 & -(\lambda_1+2\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu_1 & -3\mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix}$$

Keresett az átlagos csatornakihasználtság és az igényvesztés valószínűsége (feltételezve, hogy ismert az egyes állapotok valószínűsége.)

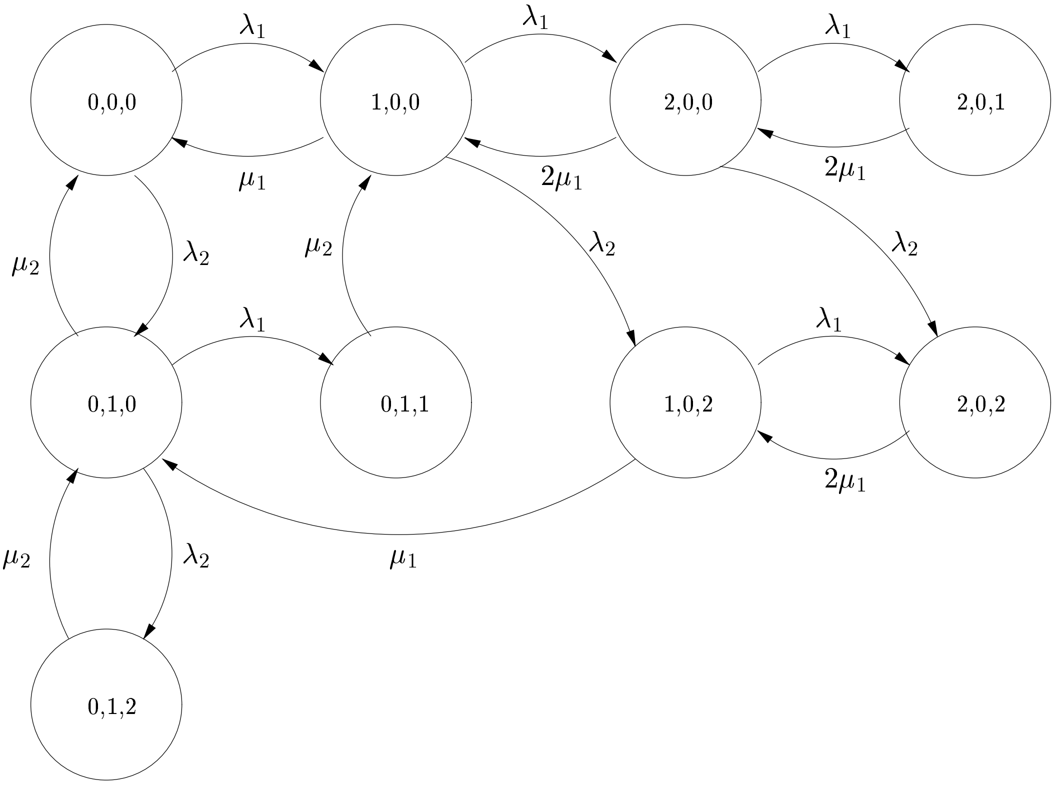
Láttunk az előző példában a kihasználtságra egy képletet, ismert azonban egy másik is: $\varrho = \sum_i \varrho_i \, p_i$, ahol p_i az i.-dik állapot valószínűsége, innen már csak egy lépés:

$$\varrho = \frac{1}{3}\,p_{1,0} + \frac{2}{3}\left(p_{2,0} + p_{0,1}\right) + p_{3,0} + p_{1,1}$$

Igényt három állapotban fogunk veszíteni, ezek közül kettőben ($p_{3,0}\,, p_{1,1}$) mindent, egyikben ($p_{2,0}$) pedig csak második típusú igényt:

$$p_v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} p_{2,0} + p_{3,0} + p_{1,1}$$

Keresett a módosított a rendszer viselkedését leíró Markov lánc és az igényvesztés valószínűsége!
Két kiszolgáló csatorna és egy puffer van a rendszerben. A pufferbe bármilyen igény eltárolásra kerül – típustól függetlenül – ha nem tudunk megfelelő kapacitású kiszolgálást nyújtani. Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, ha egyes típusú igény van a rendszerben és kettes típusú érkezik, akkor pufferbe kerül, ha az üres. Viszont ha egyes típusú igény van a rendszerben, kettes pufferelve és érkezik egy egyes típusú, az *azonnal* kiszolgálásra kerül.
Ezt így ábrázolhatjuk (a gráfon az állapotban levő 1. szám az első típusú, a 2. szám a második típusú igények számát, a 3. szám pedig a pufferben levő igény típusát adja meg):



Itt már öt állapotban veszítünk igényt. Ismételten meg kell különböztetnünk, hogy az egyes állapotban *milyen típusú* igényt fogunk veszíteni:

$$p_v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} p_{1,0,2} + p_{0,1,1} + p_{0,1,2} + p_{2,0,1} + p_{2,0,2}$$

2000. január 20. vizsga

kiskérdések:

1. *X egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, c egy pozitív szám. Adja meg az $Y = X \mid X < c$ valószínűségi változó várható értékét.*
   $f_X(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, $c > 0$ és $Y = X \mid X < c$:

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{f_X(t)}{Pr(X<c)} = \frac{f_X(t)}{F_X(c)} & \text{, ha} \quad 0 < t < c \\ 0 & \text{, ha} \quad t \geqslant c \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} \frac{F_X(t)}{Pr(X<c)} = \frac{F_X(t)}{F_X(c)} & \text{, ha} \quad 0 < t < c \\ 1 & \text{, ha} \quad t \geqslant c \end{cases}$$

   Ezek ismeretében könnyedén kiszámolhatjuk:

$$E(Y) = \int_0^c t\, \frac{\lambda\, e^{-\lambda\, t}}{1 - e^{-\lambda\, c}}\, \mathrm{d}t$$

2. *Határozza meg a geometriai eloszlás várható értékét az eloszlás örökifjú tulajdonságát kihasználva.*
   A bekövetkezés valószínűsége p. Bontsuk fel a várható értéket két részre, majd használjuk ki, hogy a geometriai eloszlás örökifjúsága miatt $E(X) = E(X-1 \mid X > 1)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X \mid X = 1)\, p + E(X \mid X > 1)\, (1-p) \\ &= p + [1 + \underbrace{E(X-1 \mid X > 1)}_{E(X)=E(X \text{ 1-től hátralevő élettartama})}]\, (1-p) \\ &= p + (1 + E(X))\, (1-p) \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

3. *Mit nevezünk véletlen forgalomnak? Mi a felkínált-, a lebonyolított-, és a túlcsorduló forgalom, és milyen tulajdonságai vannak ezeknek a forgalmaknak?*
   Véletlen forgalomnak nevezzük az olyan igények forgalmát, melyek érkezése Poisson folyamatnak felel meg és egymástól független, azonos exponenciális eloszlású a kiszolgálásuk. A **felkínált forgalom** jellemzi, mennyi - a rendszer által felkínált - erőforrást akarnak igénybe venni a felhasználók. A **lebonyolított forgalom** adja meg, hogy a véges kapacitású rendszer mekkora igénymennyiséget szolgál ki. (A lebonyolított és a felkínált forgalom $M/M/\infty$ rendszer esetén megegyezik!) A **túlcsorduló forgalom** az a forgalmi összetevő, ami a véges kapacitású rendszerben nem nyer kiszolgálást. Az egyes forgalmi típusok relatív szórásai egymáshoz a következőképpen viszonyulnak: $c^2_{\text{lebonyolított}} < c^2_{\text{felkínált}} < c^2_{\text{túlcsorduló}}$

4. *Adja meg az $M/G/1$ sor távozási időpontjaiba beágyazott Markov láncot evolúciós egyenlettel. Definiálja az abban szereplő mennyiségeket.*
   Definiáljuk először a mennyiségeket! Y_{i-1} adja meg a rendszerben levő igények számát az $i-1$.-dik igény távozása után; A_i az i.-dik igény kiszolgálása alatt érkezett igények számát; végül $I_{(Y_{i-1}>0)}$ egy olyan indikátor, melynek értéke 1, ha teljesül az indexben levő feltétel, egyébként 0.

$$Y_i = Y_{i-1} + A_i - I_{(Y_{i-1}>0)}$$

   Vizsgáljuk meg A_n valószínűségét, azaz hogy az n. igény kiszolgálása alatt mekkora valószínűséggel érkezett i darab igény (használjuk fel a teljes valószínűség tételét!):

$$Pr\left(A_n = i\right) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b(t)\, \mathrm{d}t$$

   ahol $b(t)$ a kiszolgálási idő sűrűségfüggvénye. Ennek várható értékét egy későbbi feladatban ki is fogjuk számolni.

5. *Ismertesse a végtelen állapotú diszkrét idejű Markov láncok stabilitásának feltételét.*
   Végtelen állapotú diszkrét idejű Markov láncok stabilitásának három feltétele:
   - irreducibilitás,
   - aperiodikusság,
   - pozitív visszatérőség.

1. feladat

Egy egykiszolgálós diszkrét idejű sorbanállási rendszerbe kétféle igény érkezhet a rendszer állapotától és a korábbi időközöktől függetlenül. Egy időegységben egy 1-es típusú igény p_1 valószínűséggel, egy kettes típusú igény p_2 valószínűséggel, 0 igény $1 - p_1 - p_2$ valószínűséggel érkezik. Az igények kiszolgálása az érkezést követő időrésben kezdődik. Egy megkezdett kiszolgálás egy adott időrésben – a korábbi időrésektől függetlenül – r_1 illetve r_2 valószínűséggel befejeződik vagy $1 - r_1$ illetve $1 - r_2$ valószínűséggel a következő időrésben tovább folytatódik.

(a) Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját és adja meg az egyensúlyi eloszlást, ha a rendszerben legfeljebb két igény tartózkodhat!

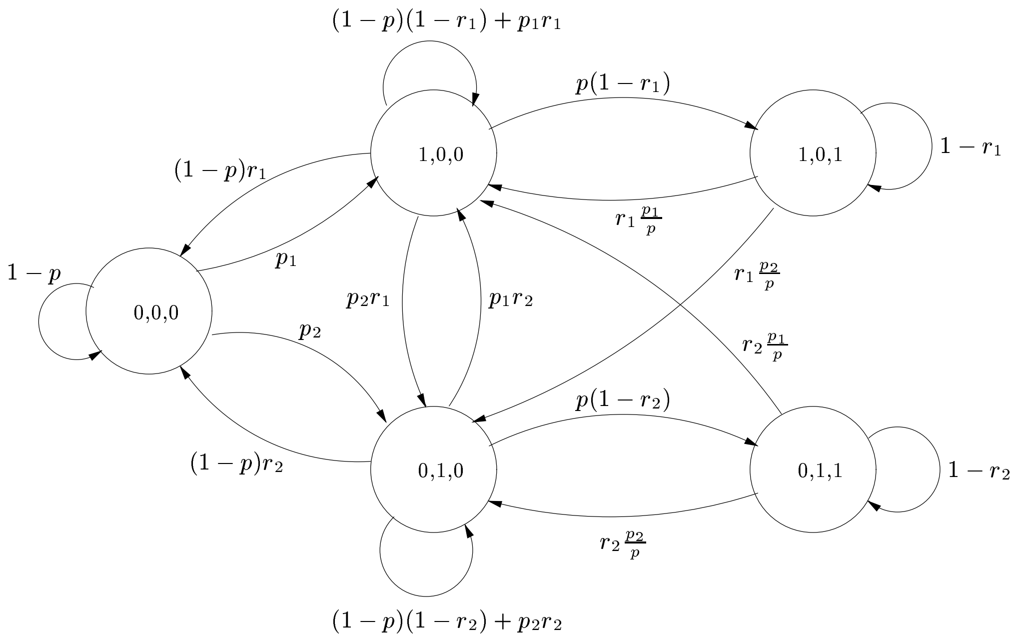
(b) Adja meg az időegységenként sikeresen távozó igények számát egyensúlyi állapotban!

(c) Adja meg a rendszer kihasználtságát, ha végtelen a puffer és stabil a rendszer!

(d) Milyen feltételnek kell eleget tennie a p_1, p_2 és az r_1, r_2 értékeknek stabil rendszer esetén?

Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját és adja meg az egyensúlyi eloszlást, ha a rendszerben legfeljebb két igény tartózkodhat!

A háromdimenziós Markov lánc első dimenziója az egyes típusú, második a kettes típusú, a harmadik a pufferben tartozkodó igények számát adja meg, ez utóbbi a típustól független. Továbbá $p = p_1 + p_2$.



Adja meg az időegységenként sikeresen távozó igények számát egyensúlyi állapotban!

Legyen az időegységenként sikeresen távozó igények száma q. Egyensúlyi állapotban q-ra felírható: $q = \sum_{i=0}^{7} a_i\, Pr(\text{távozás } i. \text{ állapotban})$, ahol a_i az i. állapot valószínűsége.

$$q = (a_{1,0,0} + a_{1,0,1})\, r_1 + (a_{0,1,0} + a_{0,1,1})\, r_2$$

Adja meg a rendszer kihasználtságát, ha végtelen a puffer és stabil a rendszer!

A rendszer immár veszteségmentes, így könnyű dolgunk van:

$$\varrho = \frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2}$$

Milyen feltételnek kell eleget tennie a p_1, p_2 és az r_1, r_2 értékeknek stabil rendszer esetén?

A rendszer akkor stabil, ha a kihasználtság kisebb mint 1. Kis átalakítás után:

$$p_1 r_2 + p_2 r_1 < r_1 r_2$$

2. feladat

Egy kétkiszolgálós sorbanállási rendszerbe kétféle igény érkezhet. Az igénytípus λ_1 paraméterű Poisson folyamat szerint érkezik és μ_1 paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási idejű, a másik igénytípus λ_2 paraméterű Poisson folyamat szerint érkezik és kétfázisú kiszolgálást igényel μ_2 és μ_3 paraméterrel.

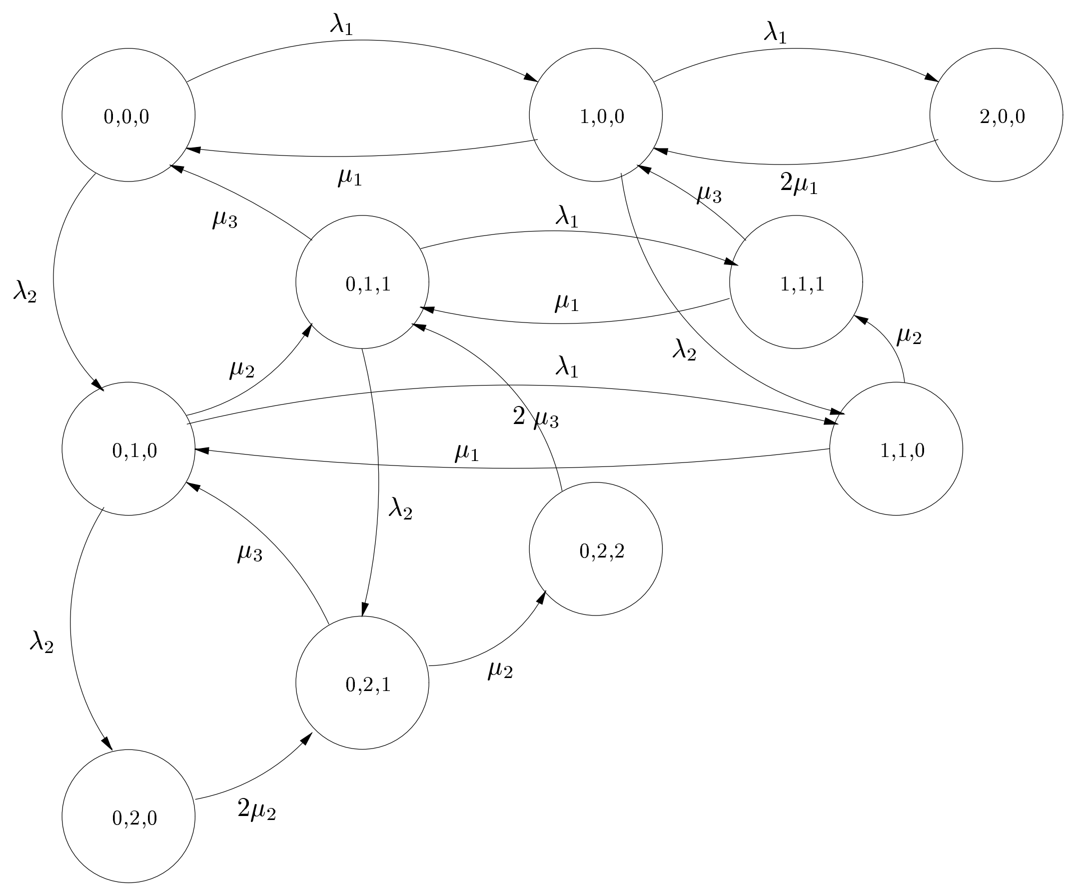
(a) Adja meg a rendszer viselkedését leíró Markov láncot és az átmeneti intenzitás mátrixot, ha nincs puffer!

(b) Adja meg az átlagos csatornakihasználtságot és az igényvesztés valószínűségét (feltételezve, hogy ismert az egyes állapotok valószínűsége).

(c) Adja meg a rendszer kihasználtságát, ha végtelen puffer áll rendelkezésre!

Adja meg a rendszer viselkedését leíró Markov láncot és az átmeneti intenzitás mátrixot, ha nincs puffer!

Háromdimenziós Markov láncot veszünk fel, ahol a három dimenzióból az első az egyes típusú igények, a második a kettes típusú igények számát jelöli, a harmadik pedig azt adja meg, hány második típusú igény kiszolgálása van már a második fázisban.



Az állapotok balról jobbra, majd felülről lefele kerültek felvételre az intenzitás mátrixban:

$$
\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \left[\begin{array}{cccccccccc}
-(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_1 & -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu_1 & -2\mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu_3 & 0 & 0 & -(\lambda_1+\mu_3) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_3 & 0 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2) & \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & \mu_1 & -(\mu_1+\mu_2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu_3 & 0 & 0 & 0 & -2\mu_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\mu_3) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_2 & -2\mu_2
\end{array}\right]
$$

Adja meg az átlagos csatornakihasználtságot és az igényvesztés valószínűségét (feltételezve, hogy ismert az egyes állapotok valószínűsége).

Vegyük a kihasználtság felírásakor figyelembe, hogy két kiszolgálónk van, valamint az igényvesztés valószínűségének megadásakor azt, hogy azonos intenzitással érkezhet minden állapotban az igény, és vesztés abban az állapotban történik, ahol mind a két kiszolgáló foglalt.

$$
\varrho = \frac{1}{2}\left(p_{0,1,0}+p_{0,1,1}+p_{1,0,1}\right) + \left(p_{0,2,0}+p_{0,2,1}+p_{0,2,2}+p_{1,1,0}+p_{1,1,1}+p_{2,0,0}\right)
$$
$$
p_v = p_{0,2,0}+p_{0,2,1}+p_{0,2,2}+p_{1,1,0}+p_{1,1,1}+p_{2,0,0}
$$

Adja meg a rendszer kihasználtságát, ha végtelen puffer áll rendelkezésre!

$$
\varrho = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \lambda_2\left(\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)
$$

Magyarázatként annyit, hogy érdemes elgondolkozni azon, milyen igény érkezhet a rendszerbe és milyen munkaigényt von maga után. Emlékezzünk csak a képletre: *kihasználtság = az érkezés intenzitásának és a várható munkaigénynek a szorzata*!

2000. február 3. vizsga

kiskérdések:

1. *Ismertesse X valószínűségi változó t időponttól hátralévő élettartamának definicióját, és annak eloszlását, ha X eloszlása ismert.*
Hogyan definiálható az örökifjú tulajdonság a hátralévő élettartam alapján?
Legyen $\bar{X}$ az X valószínűségi változó t időponttól hátralevő élettartama, ekkor – a lineáris transzformációból adódóan – $\bar{X} = X - t \mid X > t$. Eloszlása pedig a következő:

$$F_{\bar{X}}(\tau) = Pr(\bar{X} < \tau) = Pr(X - t < \tau \mid X > t) = \frac{Pr(X - t < \tau, X > t)}{Pr(X > t)}$$
$$= \frac{Pr(t < X < t + \tau)}{Pr(X > t)} = \frac{F_X(t+\tau) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

Az eloszlás akkor örökifjú, ha $F_{\bar{X}}(\tau)$ független a t értékétől, tehát $F_{\bar{X}}(\tau) = F_X(\tau)$. Látható, hogy az exponenciális eloszlás teljesíti ezt az elvárást:

$$F_{\bar{X}}(\tau) = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda\tau} = F_X(\tau)$$

2. *X val. változó λ paraméterű exponenciális eloszlású, Y val. változó diszkrét egyenletes eloszlású, $Y \in \{1, 2\}$. Adja meg a $Pr(X < Y)$ valószínűséget.*

$$F_X(t) \;=\; \lambda e^{-\lambda t} \qquad Pr(Y=1) = 0.5 \quad Pr(Y=2) = 0.5$$

$$Pr(X < Y) = Pr(X < Y \mid Y = 1)Pr(Y = 1) + Pr(X < Y \mid Y = 2)Pr(Y = 2)$$
$$Pr(X < Y) = \tfrac{1}{2}F_X(1) + \tfrac{1}{2}F_X(2) = 1 - \tfrac{1}{2}\Big(e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\Big)$$

3. *Ismertesse a folytonos idejű Markov láncok leírására alkalmazott $\mathbf{Q}$ mátrix (infinitezimális generátor) definicióját, tulajdonságait, és mutassa meg, hogy a tulajdonságok hogyan következnek a definicióból.*
A $\mathbf{Q}$ infinitezimális generátormátrix az állapotátmeneti intenzitást adja meg.

$$\frac{d}{dt}\Pi(0,t) = \lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\Pi(0,t+\Delta) - \Pi(0,t)}{\Delta} = \Pi(0,t)\underbrace{\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\Pi(0,\Delta) - \mathbf{I}}{\Delta}}_{\mathbf{Q}}$$

Nézzük a további definiciókat:

$$\pi_{ij}(0,t) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i), \qquad \sum_{j\in S}\pi_{ij}(0,t) = 1, \qquad \frac{d}{dt}\pi_{ij}(t) = \sum_{k\in S}\pi_{ik}(t)q_{kj}$$

1. tulajdonság: A mátrix főátlójának elemei negatívak, míg a többi elem pozitív.

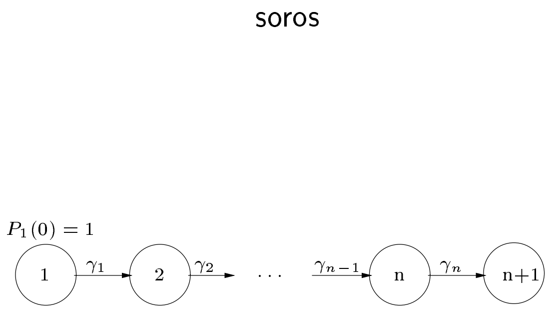
$$q_{ij} = \lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\overbrace{\pi_{ij}(0,\Delta)}^{\geqslant 0}}{\Delta} \geqslant 0 \qquad\qquad q_{ii} = \lim_{\Delta\to 0^+}\frac{\overbrace{\pi_{ii}(0,\Delta)}^{\leqslant 1} - 1}{\Delta} \leqslant 0$$

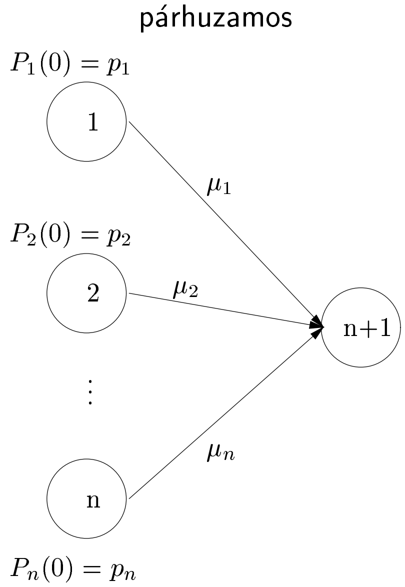
2. tulajdonság: A mátrix sorainak sorösszege nullával egyenlő.

$$\sum_{j\in S} q_{ij} = q_{ii} + \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} q_{ij} = \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\pi_{ii}(0,\Delta)-1}{\Delta} + \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\pi_{ij}(0,\Delta)}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0^+} \frac{\overbrace{\pi_{ii}(0,\Delta) + \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}} \pi_{ij}(0,\Delta)}^{=1} - 1}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{0}{\Delta} = 0$$

4. *Ismertessen relatív szórást növelő, és csökkentő Phase-type struktúrákat. Hogyan számítható az ismertetett struktúrák relatív szórása?*
   A relatív szórás növelését *soros*, csökkenését pedig *párhuzamos* Phase-type struktúrával érhetjük el.





A sorosnál érkezik egy igény és n darab, γ_i paraméterű ($i = 1 \ldots n$) kiszolgálási fázison halad keresztül. A párhuzamosnál p_i valószínűséggel a μ_i paraméterű kiszolgálási fázisba kerül, ahol $\sum_i p_i = 1$. Mindkét típusnál a kiszolgálás exponenciális.
Relatív szórást következőképpen számolunk: $c_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{E^2(x)}$. A soros struktúránál legyen igaz: $\gamma_i = \gamma$.
Soros struktúra:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma} = \frac{n}{\gamma} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma^2} = \frac{n}{\gamma^2}$$

$$c_X^2 = \frac{\sigma^2}{E^2(X)} = \frac{1}{n} \qquad \mathbf{c_X^2 < 1}$$

Párhuzamos struktúra:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\mu_i} \qquad\qquad E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{2}{\mu_i^2}$$

$$c_X^2 = \frac{E(X^2) - E^2(X)}{E^2(X)} \qquad\qquad \mathbf{c_X^2 \geqslant 1}$$

Számításainkból kinyertük, hogy a soros relatív szórás csökkentő, a párhuzamos azonban relatív szórás növelő struktúra, ahol $c_X^2 = 1$, ha $\mu_i = \mu$.
Megj.: Párhuzamos struktúránál a $c_X^2 \geqslant 1$ *belátása nem a trivialitások közé tartozik, a szerző sem a vizsgán jött rá. A fenti állítás valódiságát az olvasó a Cauchy-Schwarz féle egyenlőtlenséggel azonban be tudja bizonyítani.*

5. *Hogyan ellenőrizhető egy diszkrét idejű Markov lánc stabilitása?*
A diszkrét Markov lánc stabilitásának három feltétele van:
– irreducibilitás,
– aperiodikusság,
– pozitív visszatérőség (∞ állapotú Markov lánc esetén).
A stabilitás elégséges feltétele, hogy a Markov lánc tegyen eleget a *Foster-kritériumnak*:
– az előrelépés várható értéke legyen véges,
– N küszöb fölött a Markov lánc előrelépésének várható értéke legyen kisebb mint a visszalépés várható értéke.

6. *Adja meg egy $M/M/1$ rendszerben egy igény kiszolgálása alatt érkező igények számát?*
Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy igény kiszolgálása alatt i darab igény érkezik? Legyen ez a valószínűség $Pr(N = i)$. $M/G/1$ rendszerben ezt a valószínűséget pont az előző vizsgasorban írtuk fel:

$$Pr(N = i) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} b(t) \mathrm{d}t$$

ahol $b(t)$ a kiszolgálást leíró függvény. $M/M/1$ rendszerben: $b(t) = \mu e^{-\mu t}$
A várható érték felírásával megadhatjuk az érkező igények számát:

$$E(N) = \sum_{i=0}^{\infty} i \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} \mathrm{d}t$$

Feladat

Négy igényforrás használ két kiszolgáló egységet igényeinek feldolgozására. Ha három igény van feldolgozás alatt, akkor az utolsóként érkezett igény várakozik (egy puffer), míg ha a negyedik igényforrás is igényt generál, miközben három igény feldolgozása folyik, akkor a keletkező igény azonnal elveszik. Minden igényforrás α állandó intenzitással generál igényeket, s amíg az igénye kiszolgálás alatt van addig újabb igényt nem generál. Minden igény β paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási időt igényel.

(a) Rajzolja fel a rendszer állapotgráfját.

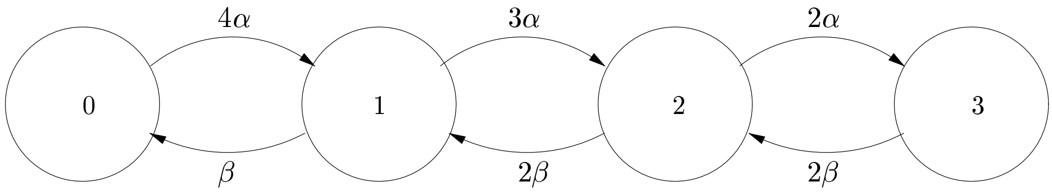
(b) Adja meg az egyensúlyi valószínűségeket.

(c) Mekkora a kiszolgáló egységek várható kihasználtsága?

(d) Mekkora az igényvesztés valószínűsége?

Rajzolja fel a rendszer állapotgráfját.

A feladat megfeleltethető egy $M/M/2/3/4$ rendszernek.



Adja meg az egyensúlyi valószínűségeket.

$$p_1 = \frac{4\alpha}{\beta} p_0 \qquad p_2 = \frac{3\alpha}{2\beta} p_1 = \frac{6\alpha^2}{\beta^2} p_0 \qquad p_3 = \frac{2\alpha}{2\beta} p_2 = \frac{6\alpha^3}{\beta^3} p_0 \qquad \sum_{i=0}^{3} p_i = 1$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)^{-1} \qquad p_1 = \frac{4\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)^{-1}$$

$$p_2 = \frac{6\alpha^2}{\beta^2}\left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)^{-1} \qquad p_3 = \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)^{-1}$$

Mekkora a kiszolgáló egységek várható kihasználtsága?

$$\varrho = \sum_{i=0}^{3} \varrho_i\, p_i = \frac{1}{2} p_1 + p_2 + p_3 = \left(\frac{2\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)\left(1 + \frac{4\alpha}{\beta} + \frac{6\alpha^2}{\beta^2} + \frac{6\alpha^3}{\beta^3}\right)^{-1}$$

Mekkora az igényvesztés valószínűsége?

A vesztés valószínűsége (p_v) nem írható fel egyszerűen a 3. állapot valószínűségeként (p_3), mivel az érkezési intenzitás az egyes állapotokban különböző. Ehelyett:

$$p_v = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_i\, E(\text{elvesző igények várható száma} \mid i \text{ igény a rendszerben})}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} p_i\, E(\text{érkező igények várható száma} \mid i \text{ igény a rendszerben})}$$

Ebből adódóan:

$$p_v = \frac{p_3}{4p_0 + 3p_1 + 2p_2 + p_3}$$

Korábbi évek vizsgapéldái

1994. június 15. vizsga

1. feladat

Csomagküldés zajos csatornán:
adó $\longrightarrow$ csatorna $\longrightarrow$ vevő
A csatornán egy csomag sikeres átjutásának a valószínűsége p. Az adó M darab felhasználó csomagjait próbálja átjuttatni a csatornán. (Az adóban végtelen puffer van.)
A felhasználók mindegyike egy időrésben q valószínűséggel generál egy igényt (függetlenül attól, hogy az előzőek átjutottak-e a csatornán).

(a) Stabil-e az átküldésre váró csomagok számát meghatározó Markov lánc? Miért? Milyen feltétel adódik ebből a $(p,\, q,\, M)$ paraméterekre?

(b) Adja meg a Markov láncot leíró evolúciós egyenletet, és definiálja annak elemeit (az eloszlás meghatározásával)!

(c) Határozza meg a rendszerben levő igények számának várható értékét!

Stabil-e az átküldésre váró csomagok számát meghatározó Markov lánc? Miért? Milyen feltétel adódik ebből a $(p,\, q,\, M)$ paraméterekre?
Az átküldésre váró csomagok számát meghatározó Markov lánc akkor stabil, ha a csomagok érkezési intenzitása kisebb mint a kiszolgálási sebesség. Az előbbi a binomiális eloszlás várható értéke miatt Mq, utóbbi a Bernoulli eloszlás várható értékéből adódóan p. Ebből adódik a paraméterekre az alábbi feltétel: $M\,q < p$.

Adja meg a Markov láncot leíró evolúciós egyenletet, és definiálja annak elemeit (az eloszlás meghatározásával)!

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - V_{n+1} I_{X_n > 0}$$

Az egyenletben szereplő X_{n+1} az $n{+}1$. időrésben a rendszerben levő igények számát adja meg. Az Y_{n+1} az érkezési valószínűség, ami binomiális eloszlású. A V_{n+1} a távozás valószínűségét adja meg Bernoulli eloszlás szerint. Ezt a valószínűséget az I indikátorral kell szoroznunk attól függően, hogy a rendszer üres vagy sem.

$$Y_{n+1} = \begin{cases} M, & q^M \\ i, & \binom{M}{i} q^i\,(1-q)^{(M-i)} \\ 0, & (1-q)^M \end{cases} \qquad\qquad V_{n+1} = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

Határozza meg a rendszerben levő igények számának várható értékét!
A sorhossz várható értékét a valószínűségek négyzetének várható értékéből tudunk számolni.

A levezetés megértéséhez (ld. *Györfi, Páli 53. o.*) tudnunk kell, hogy stabil rendszerben fennáll: $E(Y_1) = E(V_1 I_{X_0>0})$, valamint az eloszlás bináris volta miatt $E(V) = E(V^2)$:

$$\begin{aligned}
E({X_{n+1}}^2) &= E({X_n}^2) + E(V_n I_{X_n>0}) + E({Y_{n+1}}^2) + 2E(X_n Y_{n+1}) - \\
&- 2E(X_n V_{n+1} I_{X_n>0}) - 2E(V_{n+1} I_{X_n>0} Y_{n+1}) \\
&= E({X_n}^2) + E(V_1 I_{X_0>0}) + E({Y_1}^2) + 2E(X_0 Y_1) - \\
&- 2E(X_0 V_1) - 2E(V_1 I_{X_0>0})E(Y_1) \\
0 &= E(Y_1) + E({Y_1}^2) + 2E(X_0)E(Y_1) - 2E(X_0)E(V_1) - 2E(Y_1)^2 \\
E(X_0) &= \frac{E(Y_1)(1 - 2E(Y_1)) + E({Y_1}^2)}{2(E(V_1) - E(Y_1))}
\end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalán ismerjük az összes változót. Innen:

$$E(X_0) = \frac{Mq(1 - 2Mq) + Mq(1 - q + Mq)}{2(p - Mq)} = \frac{Mq(2 - q - Mq)}{2(p - Mq)}$$

2. feladat

Egy távközlő rendszerben a végtelen populációból minden időrésben N felhasználó kap adási jogot (N λ paraméterű, Poisson eloszlású véletlen valószínűségi változó).
Minden felhasználó p valószínűséggel ad, amikor adási joga van. Vezesse le az egy időrés alatt keletkező csomagok számának eloszlását!
Rendszerünkben j (ha $N = j$) felhasználó adhat a végtelen populációból, de csak k fog adni. Tehát meg kell szűrnünk az eredeti Poisson folyamatot a binomiális eloszlású p val. változóval úgy, hogy felírunk a teljes valószínűség tételét kihasználva egy egyenletet az egy időrésben keletkező csomagokra. Nézzük meg azonban először az egyes valószínűségeket!

$$\begin{aligned}
Pr(N = i) &= \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} && i \text{ felh. adhat} \\
Pr(k \text{ ad} \mid j \text{ adhat}) &= \binom{j}{k} p^j \, (1-p)^{(j-k)} && k \text{ felh. ad, ha } j \text{ adhat} \\
Pr(k \text{ ad}) &= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} p^j \, (1-p)^{(j-k)} \, \frac{\lambda^j}{j!} \, e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Álljunk neki egyszerűsíteni:

$$= \frac{\lambda^k \, p^k}{k!} \, e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^{(j-k)} \, (1-p)^{(j-k)}}{(j-k)!}}_{e^{(1-p)\lambda}} = \frac{(\lambda \, p)^k}{k!} \, e^{-p\lambda}$$

3. feladat

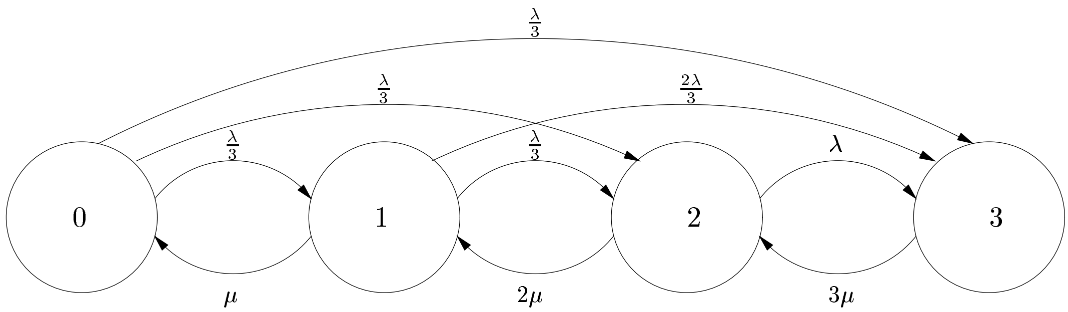
Egy három kiszolgálót tartalmazó sorbanállási rendszerbe csoportosan érkezhetnek az igények. Az igények beérkezési időpontjai λ paraméterű Poisson folyamatot alkotnak. Egy igény beérkezés alkalmával 1, 2 vagy 3 igény jelenik meg a rendszerben azonos valószínűséggel. Csak azok az igények vesznek el, amik nem férnek a rendszerbe. (Pl.: ha két igény érkezik és csak egynek van helye, akkor csak egy veszik el. Az igények kiszolgálása μ paraméterű exponenciális eloszlású ideig tart.

(a) Adja meg a rendszert leíró Markov láncot, ha nincs puffer!

(b) Számítsa ki a kihasználtságot, ha nincs puffer!

(c) Számítsa ki a kihasználtságot, ha végtelen puffer van!

Adja meg a rendszert leíró Markov láncot, ha nincs puffer!



Számítsa ki a kihasználtságot, ha nincs puffer!
Először határozzuk meg az állapotvalószínűségeket következő egyenletrendszerből, majd az eredményt felhasználva írjuk fel a jól ismert képletet a kihasználtságra:

$$a_0\lambda = a_1\mu \qquad a_1(\lambda+\mu) = a_0\frac{\lambda}{3} + a_2\,2\mu$$

$$a_3\,3\mu = a_0\frac{\lambda}{3} + a_1\frac{2\lambda}{3} + a_2\lambda \qquad \sum_{i=0}^{3} a_i = 1$$

$$\varrho = \sum_{i=0}^{3} a_i\,\varrho_i \qquad \text{ahol} \qquad \varrho_i = \frac{i}{3}$$

Számítsa ki a kihasználtságot, ha végtelen puffer van!

$$\varrho = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda\left(\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}\right)}{\mu}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{\mu}$$

Sokfelhasználós Hírközlés
2000. január 20. vizsga

1. feladat

Egy réselt adatátviteli csatornára két kiszolgáló továbbít igényeket. Az igények csomagokból állnak. A csomagok számának eloszlása egy igényen belül geometriai, mindkét kiszolgálónál q paraméterrel, azaz annak valószínűsége, hogy egy igény kiszolgálása a következő csomag továbbításával befejeződik q. Az igények a két kiszolgálóhoz egymástól függetlenül, p_1, illetve p_2 paraméterű Bernoulli eloszlás szerint érkeznek. Az igények minden időrésben csak a kiszolgálás megkezdése után érkeznek. A csatornán egy időrésben két csomag továbbítható, de kiszolgálónként minden időrésben csak egy csomag szolgálható ki.

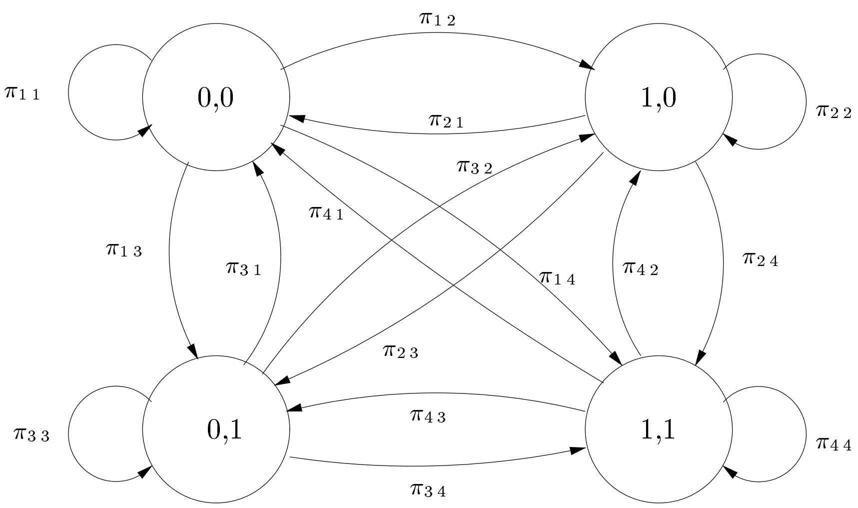
(a) Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját, és adja meg az átmenetvalószínűségek mátrixát, ha egyik kiszolgálónál sincs puffer!

(b) Adja meg az egyensúlyi eloszlást, ha $p_1 = p_2$!

(c) Adja meg a stabilitás feltételét, ha $p_1 \neq p_2$ és mindkét kiszolgálónál végtelen a puffer!

(d) Adja meg a kihasználtságot az utóbbi esetben!

Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját, és adja meg az átmenetvalószínűségek mátrixát, ha egyik kiszolgálónál sincs puffer!



$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{bmatrix} (1-p_1)(1-p_2) & p_1(1-p_2) & (1-p_1)p_2 & p_1p_2 \\ (1-p_1)(1-p_2)q & (1-p_2)(1-q)+ +p_1(1-p_2)q & (1-p_1)p_2q & p_2(1-q)+p_1p_2q \\ (1-p_1)(1-p_2)q & p_1(1-p_2)q & (1-p_1)(1-q)+ +(1-p_1)p_2q & p_1(1-q)+p_1p_2q \\ (1-p_1)(1-p_2)q^2 & p_1(1-p_2)q^2+ +(1-p_2)(1-q)q & (1-p_1)p_2q^2+ +(1-p_1)(1-q)q & p_1p_2q^2+(1-q)^2+ +(p_1+p_2)(1-q)q \end{bmatrix}$$

Adja meg az egyensúlyi eloszlást, ha $p_1 = p_2$!
Vegyük észre, hogy a $p_1 = p_2$ esetben három állapotúra egyszerűsíthetjük az eredeti Markov láncunk, amennyiben a $(0,1)$ és az $(1,0)$ állapotokat összevonjuk. Ezután az átmenetvalószínűségek mátrixa a következőképpen fog kinézni:

$$\underline{\underline{\Pi}}' = \begin{bmatrix} (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 \\ (1-p)^2 q & (1-p)(1-q) + 2pq(1-q) & p(1-q) + p^2 q \\ (1-p)^2 q^2 & (1-p)(2pq^2 + 2q - 2q^2) & p^2q^2 + (1-q)^2 + 2pq(1-q) \end{bmatrix}$$

Ebből kiindulva érdemes kiszámolni az egyensúlyi eloszlást.

Adja meg a stabilitás feltételét ha $p_1 \neq p_2$ és mindkét kiszolgálónál végtelen a puffer!
A csatornán két csomagot vihetünk át, **de** kiszolgálónként csak egyet-egyet. Ez azt jelenti, hogy mindkét sorra igaz kell legyen a pozitív visszatérőség feltétele:

$$p_1 < q \qquad \textbf{és} \qquad p_2 < q$$

Adja meg a kihasználtságot az utóbbi esetben!
A csatorna – mint kiszolgáló – két egységből áll, amelyek egymástól függetlenül szolgálják ki a beérkező igényeket. Ezért a csatorna kihasználtsága az őt alkotó egységek kihasználtságának számtani közepe lesz.

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1 + p_2}{q}\right)$$

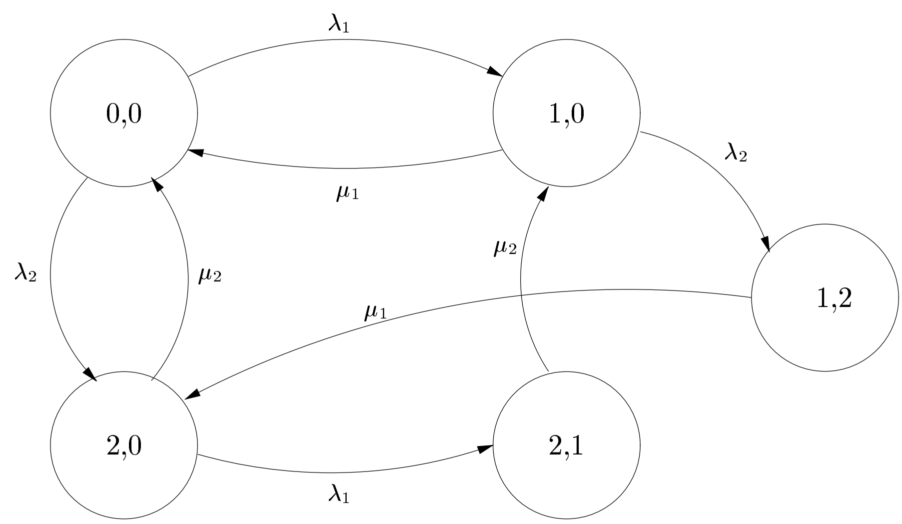
2. feladat

Egy kétprocesszoros rendszer közös memóriát használ úgy, hogy a memóriát egyszerre csak az egyik processzor érheti el egy közös buszon. Az első processzorban λ_1, a másodikban λ_2 intenzitással keletkeznek a memóriaigények, amelyek μ_1, illetve μ_2 paraméterű, exponenciális eloszlású időszakra kívánják lefoglalni a memóriát. A kiszolgálás befejezéséig a processzorok nem tudnak új igényt generálni.

(a) Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját és írja fel az átmeneti intenzitások mátrixát!

(b) Adja meg a memória kihasználtságát abban az esetben, amikor $\lambda_1 = \lambda_2$ és $\mu_1 = \mu_2$.

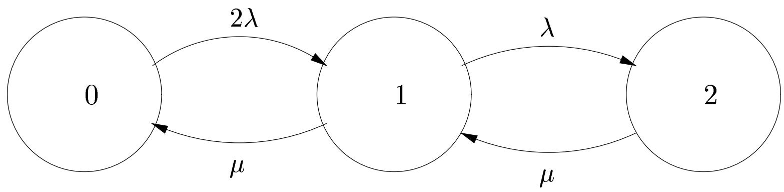
Rajzolja fel a fenti rendszer állapotgráfját és írja fel az átmeneti intenzitások mátrixát!
Olyan kétdimenziós Markov láncot kell felrajzolnunk, amiből kiderül a processzorok egymásra való várakozása. A kétdimenziós láncban az egyik dimenzió a memóriát használó, a másik dimenzió a blokkolt processzor típusa.



Az intenzitás mátrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_2+\mu_1) & 0 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

Adja meg a memória kihasználtságát abban az esetben, amikor $\lambda_1 = \lambda_2$ és $\mu_1 = \mu_2$.
Vegyük észre, hogy egy $M/M/1/2/2$ típusú sorbanállási rendszerre illik a feladat:



A rendszer kihasználtságát az állapotok egyensúlyi valószínűségeiből és a $\varrho = 1 - p_0$ egyenletből számítjuk ki.

$$p_1 = 2\,\frac{\lambda}{\mu}\,p_0 \qquad p_2 = \frac{\lambda}{\mu}\,p_1 = \frac{2\lambda^2}{\mu^2}\,p_0 \qquad p_0 = \left(1 + \frac{2\lambda}{\mu} + \frac{2\lambda^2}{\mu^2}\right)^{-1}$$

$$\varrho = \frac{2\lambda(\lambda+\mu)}{\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda^2}$$