1. feladat **10 pont**

Adja meg a

$$p(z) = (1-\imath)z^2 + (3-\imath)z + 2$$

polinom gyökeinek szorzatát trigonometrikus alakban!

Megoldás: Az algebra alaptétele szerint létezik z_1 és z_2 gyökök, melyekre

$$p(z) = (1-\imath)(z-z_1)(z-z_2).\boxed{\textbf{4p.}}$$

Innen $z_1 z_2 = \dfrac{2}{1-\imath}$, ahonnan $|z_1 z_2| = \dfrac{|2|}{|1-\imath|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\boxed{\textbf{2p.}}$, és $\arg(z_1 z_2) = \arg 2 - \arg(1-\imath) = 0 - (-\pi/4) = \pi/4\boxed{\textbf{3p.}}$. Vagyis

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + \imath \sin \pi/4).\boxed{\textbf{1p.}}$$

2. feladat **4+6+6 pont**

Mondja ki, és bizonyítsa be a sorozatoknál tanult rendőrelvet!

$$\lim \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n^2} = ?$$

Megoldás: **Tétel:** Ha $a_n \le b_n \le c_n$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, és a_n és c_n konvergens úgy, hogy

$$\lim a_n = A = \lim c_n,$$

akkor b_n is konvergens, és

$$\lim b_n = A.\boxed{\textbf{4p.}}$$

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A feltételek miatt létezik $N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$n > N_1 \quad \text{esetén} \quad A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

és

$$n > N_2 \quad \text{esetén} \quad A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon,$$

így

$$n > \max\{N_1, N_2\} \text{ esetén } A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon,$$

ami definíció szerint adja az állítást.$\boxed{\textbf{6p.}}$

$\lim = \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^n = \lim \dfrac{\left(1 - \dfrac{2/3}{n}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{1/3}{n}\right)^n} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2/3}}{\mathrm{e}^{1/3}} = \mathrm{e}^{-1}$ Így $\left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^n < \dfrac{1}{2}$, ha n elég nagy.$\boxed{\textbf{3p.}}$

Alkalmazható a rendőrelv: $0 \le \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n^2} \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n} = \dfrac{1}{4^n} \to 0$, miatt $\lim \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n^2} = 0.\boxed{\textbf{3p.}}$

3. feladat — 4 pont

Mondja ki a differenciálszámítás Rolle-féle középértéktételét!

Megoldás: Legyen f deriválható $]a,b[$-n, és folytonos a-ban és b-ben. Ha $f(a)=f(b)$, akkor létezik $\xi \in]a,b[$: $f'(\xi)=0$. $\boxed{\textbf{4p.}}$

4. feladat — 3+4+5 pont

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x^2} = ?$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = ?$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = ?$

Megoldás:

(a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} \underbrace{\cos x}_{\text{korl.}} = 0 \;\boxed{\textbf{3p.}}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1/x} \boxed{\textbf{2p.}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty} \underbrace{e^x}_{\to\infty} = \infty \boxed{\textbf{2p.}}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} \boxed{\textbf{1p.}} = e^0 = 1$, mert e^x folytonos a 0-ban $\boxed{\textbf{2p.}}$, és
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x} \overset{\frac{0}{0}\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = 0. \boxed{\textbf{2p.}}$$

5. feladat — 12 pont

Vizsgálja monotonitás és konvexitás szempontjából az

$$f(x) = (x+3)^8 (x-2)^2$$

függvényt!

Megoldás: $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 8(x+3)^7(x-2)^2 + 2(x+3)^8(x-2)$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$0 = f'(x) = (x+3)^7(x-2)[8(x-2)+2(x+3)] = (x+3)^7(x-2)(10x-10)$ megoldásai $x_1=-3$, $x_2=2$ és $x_3=1$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$f''(x) = 7(x+3)^6(x-2)(10x-10) + (x+3)^7(10x-10) + (x+3)^7(x-2)10$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$0 = f''(x) = (x+3)^6[7(x-2)(10x-10) + (x+3)(10x-10) + 10(x+3)(x-2)] = (x+3)^6(90x^2-180x+50)$ megoldásai $x_1=-3$, $x_4=1/3$ és $x_5=5/3$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,\frac{1}{3}[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3},1[$	1	$]1,\frac{5}{3}[$	$\frac{5}{3}$	$]\frac{5}{3},2[$	2	$]2,\infty[$	**2p.**
f	$\downarrow\cup$	l. min.$\cup$	$\uparrow\cup$	$\uparrow$infl.	$\uparrow\cap$	l. max.$\cap$	$\downarrow\cap$	$\downarrow$infl.	$\downarrow\cup$	l. min.$\cup$	$\uparrow\cup$	**4p.**
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	**1p.**
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	**1p.**

6. feladat* **8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x (1 - \cos^2 x)\cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x \,\mathrm{d}x \boxed{\textbf{4p.}} = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c \boxed{\textbf{4p.}}$.

(b) $\displaystyle\frac{3x^2}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \qquad / \cdot (x+1)(x^2+2) \boxed{\textbf{2p.}}$

$3x^2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2 + (B+C)x + 2A + C \implies A = 1,\ B = 2,\ C = -2 \boxed{\textbf{2p.}}$

Így $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x+1| + \ln(x^2+2) - \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(x/\sqrt{2}) + c \boxed{\textbf{4p.}}$

7. feladat* **8+8 pont**

(a) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = ?$ ($t = \mathrm{e}^x$ helyettesítéssel)

Megoldás:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g}\,\mathrm{d}x = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \underbrace{\ln x}_{g}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,\mathrm{d}x \boxed{\textbf{4p.}} = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - (\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}) = 2\ln 2 - \frac{3}{4} \boxed{\textbf{4p.}}$.

(b) $x = \ln t \implies \mathrm{d}x = 1/t\,\mathrm{d}t$, így $\displaystyle\int_{x=0}^{4} \sqrt{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{t=\mathrm{e}^0}^{\mathrm{e}^4} \sqrt{t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \boxed{\textbf{5p.}} = [2\sqrt{t}]_1^{\mathrm{e}^4} = 2\mathrm{e}^2 - 2$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

8. feladat* **6+8 pont**

Mondja ki az integrálfüggvény folytonosságáról és deriválhatóságáról szóló tételt! (Integrálszámítás (II.) alaptétele.)

Legyen

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in [0,1] \\ 1/t, & \text{ha } t > 1 \end{cases}$$

Adja meg $x \geq 0$ esetén az $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ függvényt! Határozza meg, hogy hol deriválható, és adja meg a deriváltját!

Megoldás: Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor F integrálfüggvénye folytonos. $\boxed{\mathbf{3p.}}$

Ha még valamely $\xi \in [a,b]$ esetén f folytonos ξ-ben, akkor F deriválható itt, és $F'(\xi) = f(\xi)$. $\boxed{\mathbf{3p.}}$

Ha $x \in [0,1]$, akkor $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$. $\boxed{\mathbf{3p.}}$

Ha $x > 1$, akkor $F(x) = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \ln x$. $\boxed{\mathbf{3p.}}$

Mivel f mindenütt folytonos, ezért F mindenütt deriválható, és $F' = f$. $\boxed{\mathbf{2p.}}$