Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Műszaki informatikus BSc
2013.01.16.
Megoldás
A.

1. f-fekete, F- fehér golyó.
   A_1 : a ($f, f \leftrightarrow f$ ill. $f, F \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 4 fekete, 7 fehér;
   A_2 : a ($f, f \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 3 fekete, 8 fehér;
   A_3 : a ($f, F \leftrightarrow f$ ill. $F, F \leftrightarrow F$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 5 fekete, 6 fehér,
   A_4 :a ($F, F \leftrightarrow f$) keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 6 fekete, 5 fehér
   B : a keverés után az első urnából fehéret húzunk.
   $\mathbf{P}(A_1) = \frac{10}{66}\frac{5}{13} + \frac{35}{66}\frac{9}{13} = \frac{365}{858}; \mathbf{P}(A_2) = \frac{10}{66}\frac{8}{13} = \frac{80}{858}; \mathbf{P}(A_3) = \frac{35}{66}\frac{4}{13} + \frac{21}{66}\frac{10}{13} = \frac{350}{858}; \mathbf{P}(A_4) = \frac{21}{66}\frac{3}{13} = \frac{63}{858}$.
   $\mathbf{P}(B \mid A_1) = \frac{7}{11}; \mathbf{P}(B \mid A_2) = \frac{8}{11}; \mathbf{P}(B \mid A_3) = \frac{6}{11}, \mathbf{P}(B \mid A_4) = \frac{5}{11}$.
   A teljes valószínűség tételéből:
   $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{11} \cdot \frac{365}{858} + \frac{8}{11} \cdot \frac{80}{858} + \frac{6}{11} \cdot \frac{350}{858} + \frac{5}{11} \cdot \frac{63}{858} = \frac{5610}{9438} \approx 0,5944$.

2. $\mathbf{E}(X(X-1)(X-2)) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\frac{2^k}{k!}e^{-2} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{(k-3)!}e^{-2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{l+3}}{l!}e^{-2} = 2^3 \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l}{l!}e^{-2} = 8$, hiszen a szumma éppen a $Po(2)$ eloszlás valószínűséginek az összege, ami 1.
   $\mathbf{E}(X) = 2$, $\mathbf{E}(X^2) = \boldsymbol{\sigma}^2 X + \mathbf{E}(X)^2 = 2 + 4 = 6$,
   $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X(X-1)(X-2)) + \mathbf{E}(X^2) - 5\mathbf{E}(X) = 8 + 6 - 10 = 4$.

3. A sűrűségfüggvényből leolvasható, hogy $X \in N(0, \sqrt{\pi})$.
   a.) X standardizáltja: $\tilde{X} = \frac{X}{\sqrt{\pi}}$
   b.) $\mathbf{P}(X > \sqrt{2}) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = 1 - \Phi(0,7979) \approx 1 - 0,7881 = 0,2119$

4. $f_Y(y) = \int\limits_0^1 \frac{4}{5}(x + y + xy)\,dx = \frac{4}{5}\left[xy + \frac{x^2}{2}(1+y)\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)$,
   $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{2x+2y+2xy}{3y+1}$, így $\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int\limits_0^1 x\frac{2x+2y+2xy}{3y+1}dx = \frac{5y+2}{9y+3}$,
   azaz $\mathbf{E}(X \mid Y) = \frac{5Y+2}{9Y+3}$.

5. .

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	X perem
0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
Y perem	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$\mathbf{E}X = \frac{1}{3}, \mathbf{E}Y = 7, \mathbf{E}\,(XY) = \frac{2}{36}\,[3+4+5+6+7] + 4 \cdot \frac{1}{36} = \frac{54}{36}$;
$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{30}{36} \approx -0{,}833$.

6. $\underline{P}_5^T = \underline{P}_0^T \cdot \underline{\underline{\Pi}}^5$.

Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Műszaki informatikus BSc
2013.01.16.
Megoldás

B.

1. A sűrűségfüggvényből leolvasható, hogy $X \in N\left(0, \sqrt{2}\right)$.
   a.) X standardizáltja: $\tilde{X} = \frac{X}{\sqrt{2}}$
   b.) $\mathbf{P}\left(X > \sqrt{\pi}\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1 - \Phi\left(1,2533\right) \approx 1 - 0,8944 = 0,1056$

2. f -fefekete, F-fehér jelöléssel:
   A_1 : a $(f, f \leftrightarrow f$ ill. $f, F \leftrightarrow F)$ keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 2 fekete, 7 fehér;
   A_2 : a $(F, F \leftrightarrow F$ ill. $f, F \leftrightarrow f)$ keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 3 fekete, 6 fehér;
   A_3 : a $(f, f \leftrightarrow F)$ keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 1 fekete, 8 fehér,
   A_4 :a $(FF \leftrightarrow f)$ keverés után, a húzás előtt az első urna tartalma: 4 fekete, 5 fehér
   B : a keverés után az első urnából fehéret húzunk.
   $\mathbf{P}\left(A_1\right) = \frac{3}{45}\frac{7}{15} + \frac{21}{45}\frac{9}{15} = \frac{210}{675}; \mathbf{P}\left(A_2\right) = \frac{21}{45}\frac{10}{15} + \frac{21}{45}\frac{6}{15} = \frac{336}{675}; \mathbf{P}\left(A_3\right) = \frac{3}{45}\frac{8}{15} = \frac{24}{675}; \mathbf{P}\left(A_4\right) = \frac{21}{45}\frac{5}{15} = \frac{105}{675}$.
   $\mathbf{P}\left(B \mid A_1\right) = \frac{7}{9}; \mathbf{P}\left(B \mid A_2\right) = \frac{6}{9}; \mathbf{P}\left(B \mid A_3\right) = \frac{8}{9}, \mathbf{P}\left(B \mid A_4\right) = \frac{5}{9}$.
   A teljes valószínűség tételéből:
   $\mathbf{P}\left(B\right) = \frac{7}{9} \cdot \frac{210}{675} + \frac{6}{9} \cdot \frac{336}{675} + \frac{8}{9} \cdot \frac{24}{675} + \frac{5}{9} \cdot \frac{105}{675} = \frac{4203}{6075} \approx 0,692.$

3. $\mathbf{E}\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right) = \sum_{k=3}^{\infty} k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\frac{3^k}{k!}e^{-3} = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{3^k}{(k-3)!}e^{-3} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{3^{l+3}}{l!}e^{-3} = 3^3 \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\frac{3^l}{l!}e^{-3} = 27$, hiszen a szumma éppen a $Po\left(3\right)$ eloszlás valószínűséginek az összege, ami 1. $\mathbf{E}\left(X\right) = 3, \mathbf{E}\left(X^2\right) = \boldsymbol{\sigma}^2 X + \mathbf{E}\left(X\right)^2 = 3 + 9 = 12$,
   $\mathbf{E}\left(Y\right) = \mathbf{E}\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right) + 2\mathbf{E}\left(X^2\right) - 4\mathbf{E}\left(X\right) = 27 + 24 - 12 = 39.$

4. $X \in B\left(6, \frac{1}{6}\right), Y \in B\left(6, \frac{1}{2}\right), \mathbf{P}\left(X = i \mid Y = j\right) = \binom{j}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{j-i}, i \in \{0, 1, ..., j\}$.
   Így $\mathbf{E}\left(X \mid Y = j\right) = j \cdot \frac{1}{3} \Longrightarrow \mathbf{E}\left(X \mid Y\right) = \frac{Y}{3}$

5. $f_X\left(y\right) = f_Y(y) = \int\limits_0^1 \frac{4}{5}\left(x + y + xy\right)dx = \frac{4}{5}\left[xy + \frac{x^2}{2}\left(1+y\right)\right]_0^1 = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right),$

   $\mathbf{E}\left(X\right) = \mathbf{E}\left(Y\right) = \int\limits_0^1 \frac{6}{5}x^2 + \frac{2}{5}xdx = \frac{3}{5},$

   $\mathbf{E}\left(XY\right) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{4}{5}xy\left(x + y + xy\right)dxdy = \frac{4}{5}\int\limits_0^1 \frac{5}{6}y^2 + \frac{1}{3}ydy = \frac{16}{45},$

$\mathrm{cov}\,(X,Y) = \mathbf{E}\,(XY) - \mathbf{E}\,(X)\,\mathbf{E}\,(Y) = \frac{16}{45} - \frac{9}{25} = -\frac{1}{225}$

6. Ha $\mathbf{P}\,(X_n = i \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_{n-1} = j) = \mathbf{P}\,(X_n = i \mid X_{n-1} = j)\,, \forall n, i, j, i_0, i_1, ..., i_{n-2}$.
   Homogén, ha $\mathbf{P}\,(X_n = i \mid X_{n-1} = j) = \mathbf{P}\,(X_1 = i \mid X_0 = j)\,, \forall n, i, j$.