Jelek és Rendszerek 2. Kidolgozott Témakörök

Gábor Norbert és Kondor Máté András

2012 január

Előszó, figyelmeztetés, jogi nyilatkozat, stb.

1. Ez ***nem*** *hivatalos* jegyzet! ***Nem*** *oktatók írták!* Hibák előfordulahatnak!
2. Ez ***nem*** *a hivatalos tananyag, vagy vizsgaanyag*! Hiányosságok előfordulhatnak!
3. Mint ahogy a tanszék is megmondta: „*a szóbelin* ***nem*** *ezek a kérdések lesznek*”!
4. Ha hibát, vagy hiányosságot tapasztalsz, vagy megjegyzésed van, jelezd a `fokgyem@gmail.com` címen!
5. A jegyzetet szabadon terjesztheted, ha ***nem*** *adod tovább sajátodként*!
6. Készült Barbarics Tamás előadásai, Bokor Árpád gyakorlatai, valamint Fodor György Hálózatok és Rendszerek című tankönyve alapján.

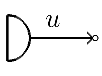
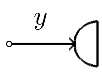
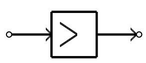
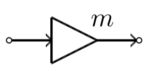
Sikeres vizsgát kívánunk!

1. Ismertesse a diszkrét idejű, lineáris, invariáns jelfolyam típusú hálózat fogalmát, elemi komponenseinek karakterisztikáját az idő-, a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban!

Definíciók.

- Diszkrét idejű: a jelek értékét csak meghatározott időpillanatokban vehetjük figyelembe.
- Lineáris: Ha $u_1[k] \to y_1[k]$ és $u_2[k] \to y_2[k]$ akkor $c_1 u_1[k] + c_2 u_2[k] \to c_1 y_1[k] + c_2 y_2[k]$.
- Invariáns: Ha $u[k] \to y[k]$, akkor $u[k+\kappa] \to y[k+\kappa]$.
- Jelfolyam típusú: input-output karakterisztikákkal jellemezhető elemekből épített hálózat.

Elemek ábrái karakterisztikái.

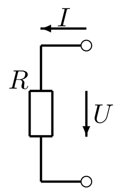
Elem	Ábra	Időtartomány	Frekvencia-tartomány	Komplex frekvenciatartomány
Forrás		$u[k]$	U	U
Nyelő		$y[k]$	Y	Y
Késleltető		$y[k] = u[k-1]$	$Y = Ue^{-j\vartheta}$	$Y = Uz^{-1}$
Erősítő		$y[k] = mu[k]$	$Y = mU$	$Y = mU$

2. Ismertesse a folytonos idejű, lineáris, invariáns Kirchhoff típusú hálózat fogalmát, elemi komponenseinek (csatolatlan és csatolt kétpólusok) karakterisztikáját a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban!

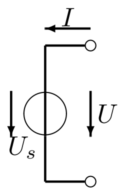
Definíciók.

- Folytonos idejű: a jelek értékét tetszőleges időpillanatban figyelembe vesszük.
- Lineáris: Ha $u_1(t) \to y_1(t)$ és $u_2(t) \to y_2(t)$ akkor $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) \to c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.
- Invariáns: Ha $u(t) \to y(t)$, akkor $u(t+\tau) \to y(t+\tau)$.
- Kirchhoff-típusú: olyan hálózat, amelyben érvényesek a Kirchhoff-törvények.

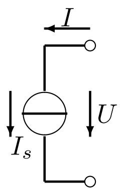
Kétpólusok ábrái és konvencionális áram–, és feszültség–mérőirányai. Lineáris, rezisztív, csatolatlan kétpólusok:



Ellenállás

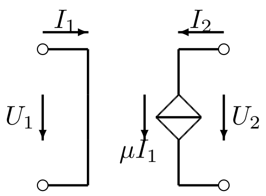


Feszültségforrás

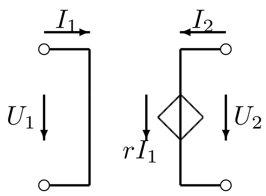


Áramforrás

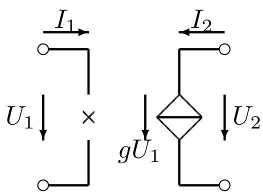
Vezérelt források (lineáris, rezisztív, csatolt kétpólusok):



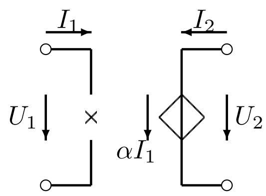
Áramvezérelt áramforrás



Áramvezérelt feszültségforrás

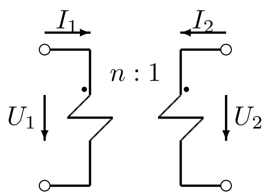


Feszültségvezérelt áramforrás

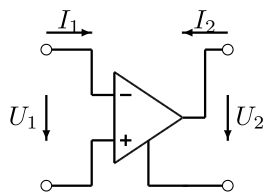


Feszültségvezérelt feszültségforrás

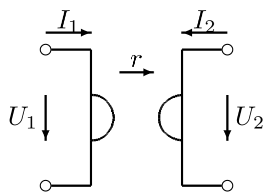
További lineáris, rezisztív, csatolt kétpólusok:



Ideális transzformátor

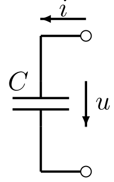


Ideális erősítő

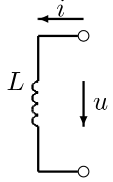


Girátor

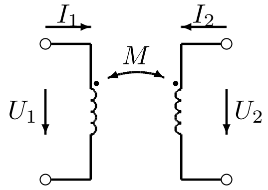
Lineáris, dinamikus, csatolatlan, illetve csatolt kétpólusok:



Kondenzátor



Tekercs



Csatolt tekercs

Kétpólusok karakterisztikái.

Kétpólus	Időtartomány	Frekvenciatartomány	Komplex frekvenciatartomány
Lineáris, rezisztív, csatolatlan kétpólusok			
Ellenállás	$U = RI$		
Áramforrás	$I = I_s$		
Feszültségforrás	$U = U_s$		
Lineáris, rezisztív, csatolt kétpólusok			
Áramvezérelt áramforrás	$U_1 = 0$	$I_2 = \alpha I_1$	
Áramvezérelt feszültségforrás	$U_1 = 0$	$U_2 = rI_1$	
Feszültségvezérelt áramforrás	$I_1 = 0$	$I_2 = gU_1$	
Feszültségvezérelt feszültségforrás	$I_1 = 0$	$U_2 = \mu U_1$	
Ideális transzformátor	$U_1 = nU_2$	$I_2 = -nI_1$	
Ideális erősítő	$U_1 = 0$	$I_1 = 0$	
Girátor	$U_1 = -rI_2$	$U_2 = rI_1$	
Lineáris, dinamikus, csatolatlan kétpólusok			
Kondenzátor	$i(t) = C\frac{du}{dt}$	$I = j\omega CU$	$I = sCU$
Tekercs	$u(t) = L\frac{di}{dt}$	$U = j\omega LI$	$U = sLI$
Lineáris, dinamikus, csatolt kétpólus			
Csatolt tekercs	$u_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$ $u_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$	$U_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$ $U_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$	$U_1 = sL_1I_1 + sMI_2$ $U_2 = sL_2I_2 + sMI_1$

3. Ismertesse a diszkrét idejű jelfolyam típusú hálózat összekapcsolási szabályait és az összekapcsolási kényszereket kifejező egyenleteket! Illusztrálja egy-egy egyszerű példával ezek alkalmazását!

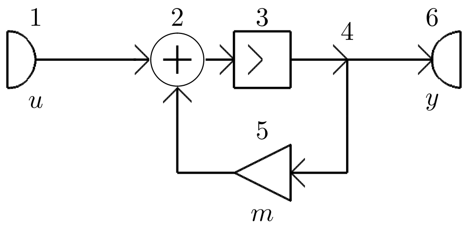
- Összekapcsolási szabályok:
  - Hogy értelmes hálózat legyen, szükséges bele legalább egy forrás és egy nyelő.
  - Minden komponens kimenetét egy másik komponens bemenetéhez kell kötni.
  - ...?
- Összekapcsolási kényszerek:
  - Összegző csomópont: a kimenetén az n számú bemenőjel összege jelenik meg.
    - Időtartomány: $y[k] = \sum_{i=1}^{n} u_i[k]$
    - Frekvencia–, és komplex frekvenciatartomány: $Y = \sum_{i=1}^{n} U_i$.
  - Elágazás: minden kimenetén a bemenet jelenik meg.
    - Időtartomány: $y_i[k] = u[k] \quad i = 1..n$
    - Frekvencia–, és komplex frekvenciatartomány: $Y_i = U \quad i = 1..n$.

Példát lásd a következő pontban!

4. Mit jelent, és hogyan állítható elő a diszkrét idejű jelfolyam típusú és a Kirchhoff típusú hálózat egyenleteinek egy teljes rendszere az idő-, a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban? Illusztrálja egy-egy egyszerű példával!

Általánosságban, mind diszkrét, mind folytonos esetben úgy állítjuk elő a hálózati egyenletek teljes rendszerét, hogy felírjuk az elemkarakterisztikákat és az összekapcsolási kényszerek egyenleteit a megfelelő tartományban.

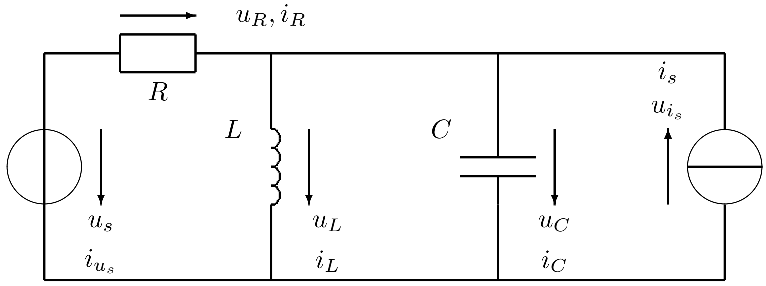
Diszkrét példa. Tekintsük az alábbi egyszerű diszkrét idejű hálózatot!



Időtartomány		Frekvenciatartomány	
Elemkarakterisztikák	Összekapcsolási kényszerek	Elemkarakterisztikák	Összekapcsolási kényszerek
$y_1[k] = u[k]$	$u_{21}[k] = y_1[k]$	$Y_1 = U$	$U_{21} = Y_1$
$y_2[k] = u_{21}[k] + u_{22}[k]$	$u_{22}[k] = y_5[k]$	$Y_2 = U_{21} + U_{22}$	$U_{22} = Y_5$
$y_3[k] = u_3[k-1]$	$u_3[k] = y_2[k]$	$Y_3 = U_3 e^{-j\vartheta}$	$U_3 = Y_2$
$y_{41}[k] = y_{42}[k] = u_4[k]$	$u_4[k] = y_3[k]$	$Y_{41} = Y_{42} = U_4$	$U_4 = Y_3$
$y_5[k] = mu_5[k]$	$u_5[k] = y_{41}[k]$	$Y_5 = mU_5$	$U_5 = Y_{41}$
$y[k] = u_6[k]$	$u_6[k] = y_{42}[k]$	$Y = U_6$	$U_6 = Y_{42}$

A frekvenciatartománybeli leírásból a komplex frekvenciatartománybeli leírás alakja $e^{-jr\vartheta} = z^{-r}$ helyettesítéssel nyerhető, mert a rendszer kauzális.

Folytonos példa. Tekintsük az alábbi egyszerű folytonos idejű hálózatot!



Az összekapcsolási kényszerek egyenletei a Kirchhoff-törvények alkalmazásával nyerhetők.

Időtartomány		Frekvenciatartomány	
Elemkarakterisztikák	Összekapcsolási kényszerek	Elemkarakterisztikák	Összekapcsolási kényszerek
$u_R = Ri_R$	$i_{u_s} = -i_R$	$u_R = Ri_R$	$i_{u_s} = -i_R$
$u_L = Li'_L$	$i_R + i_s = i_L + i_C$	$u_L = j\omega L i_L$	$i_R + i_s = i_L + i_C$
$i_C = Cu'_C$	$i_s = i_{u_s} + i_L + i_C$	$i_C = j\omega C u_C$	$i_s = i_{u_s} + i_L + i_C$
	$u_s = u_R + u_L$		$u_s = u_R + u_L$
	$u_L = u_C$		$u_L = u_C$
	$u_L = -u_{i_s}$		$u_L = -u_{i_s}$

A frekvenciatartománybeli leírásból a komplex frekvenciatartománybeli leírás alakja $j\omega = s$ helyettesítéssel nyerhető, mert a rendszer kauzális.

5. Mit jelent, és hogyan állítható elő a diszkrét idejű jelfolyam típusú és a Kirchhoff típusú hálózat egyenleteinek egy redukált rendszere az idő–, a frekvencia–, és a komplex frekvenciatartományban? Illusztrálja egy-egy egyszerű példával!

- Mindkét esetben működik: a hálózati egyenletek teljes rendszeréből kifejezgetünk annyi változót, amennyit csak lehet. Bár normális ember magától nem írja fel a hálózati egyenletek teljes rendszerét, úgyhogy ez a módszer felejthető.
- Diszkrét: rendszeregyenlet felírása.
- Folytonos: hurokáramok és csomóponti potenciálok módszere.

Diszkrét példa. Tekintsük az előbbi pont diszkrét idejű hálózatát!
Írjuk fel a rendszeregyenletet (időtartomány)!

1. Az összegző csompontra felírható egyenlet: $u[k] + my[k] = u_3[k]$.
2. A késleletető kararkerisztikája $u[k-1] = y[k]$, ezt alkalmazva az előző egyenletre: $u[k-1] + my[k-1] = y_3[k]$.
3. $y_3[k] = y[k]$.
4. Így tehát a rendszeregyenlet: $y[k] - my[k-1] = u[k-1]$.

A rendszeregyenletből könnyedén meghatározható az átviteli karakterisztika (frekvenciatartomány):

1. A rendszeregyenlet általános alakja: $\boxed{y[k] + \sum_{i=1}^{k} A_i y[k-i] = \sum_{i=0}^{k} B_l u[k-l]}$.
2. A rendszeregyenlet minden tagjára elvégezzük a következő átalakítást: $Cx[k-i] = CXe^{-ji\vartheta}$.
3. Ezt elvégezve a fenti rendszeregyenletből a következőt nyerjük: $Y - mYe^{-j\vartheta} = Ue^{-j\vartheta}$.
4. Kiemeljük Y-t, illetve U-t a két oldalról: $Y\left(1 - me^{-j\vartheta}\right) = Ue^{-j\vartheta}$.
5. „Keresztbe osztva” megkapjuk az átviteli karakterisztikát: $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \frac{Y}{U} = \frac{e^{-j\vartheta}}{1-me^{-j\vartheta}}$.

Folytonos példa. Tekintsük az előbbi pont folytonos idejű hálózatát!
A hálózat három csomópontjából az alsót tekintsük 0 potenciálúnak, a bal felső tehát ismert u_s potenciálú, a jobb felső legyen φ. Írjuk fel a 0 és a φ potenciálú csomópontra az egyenletet a komplex frekvenciatartományban!

$$\frac{\varphi - u_s}{R} + \frac{\varphi}{sL} + \varphi sC - i_s = 0$$

$$\frac{\varphi - u_s}{R} - \frac{\varphi}{sL} - \varphi sC + i_s = 0$$

A fenti két egyenlet egyikéből kifejezhető φ, a maradó egyenletből pedig bármi mást. (Megjegyzés: a fenti két egyenletből is látszik, hogy elég hülye példát sikerült kitalálnom, bocsánat.)

6. Hogyan állítható elő egy diszkrét idejű, jelfolyam típusú hálózat állapotváltozós leírása? Illusztrálja egy egyszerű példán!

Állapotváltozó a késleltető kimenete. Módszer: minden késleltető kimenetére felírjuk, hogy $x_i[k]$, bemeneteikre pedig, hogy $x_i[k+1]$. Ezek után az egyenleteket a következő alakban keressük:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T\underline{x}[k] + Du[k] \end{aligned}}$$

A 4. pont hálózatára ez úgy néz ki, hogy

$$x[k+1] = mx[k] + u[k]$$

$$y[k] = x[k]$$

7. Hogyan állítható elő egy jelfolyam típusú, diszkrét idejű hálózat rendszeregyenlete? Hasonlítsa össze a különböző eljárásokat! Illusztrálja ezeket egy-egy példán!

- A hálózati egyenletek teljes rendszerének redukálásával.
- Az átviteli karakterisztikából, illetve átviteli függvényből. Példa: $H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{5-3z^{-1}}{1-4z^{-1}+2z^{-2}} \Rightarrow Y(1-4z^{-1}+2z^{-2}) = U(5-3z^{-1}) \Rightarrow y[k] - 4y[k-1] + 2y[k-2] = 5u[k] - 3u[k-1]$.
- ...?

8. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer impulzusválasza hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze a különböző módszereket!

Diszkrét.

- A rendszeregyenletből $h_0[k]$ függvénnyel. Rendszeregyenlet általános alakja: $y[k]+\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{l=0}^{m} b_l u[k-l]$. $h_0[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k$, ahol c_i-k konstansok, amiket számítás közben kell meghatározni, λ_i-k a rendszermátrix sajátértékei. $h[k] = \sum_{l=0}^{m} b_l h_0[k-l]$.
- Az impulzusválasz az átviteli függvény inverz z-transzformáltja.
- Az állapotváltozós leírásból: $h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\underline{C}^T\underline{\underline{A}}^{k-1}\underline{B}$.
- ...?

Folytonos.

- Az impulzusválasz az ugrásválasz teljes deriváltja.
- Az impulzusválasz az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja.
- Állaptváltozós leírásból: $h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{B}$, ahol $e^{\underline{\underline{A}}t} = \sum_{i=1}^{N} \underline{\underline{L}}_i e^{\lambda_i t}$, ahol λ_i-k a rendszermátrix sajátértékei, és $\underline{\underline{L}}_i = \prod_{p=1;p\neq i}^{N} \frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_p \underline{\underline{I}}}{\lambda_i - \lambda_p}$
- ...?

9. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze, és egy-egy példán illusztrálja a különböző módszereket!

- Az átviteli függvényből $s = j\omega$, illetve $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel, ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis.
- Az átviteli karakterisztika az impulzusválasz Fourier-transzformáltja.
- Az állapotváltozós leírásból a deriválást $j\omega$-val, illetve a késleltetést $e^{j\vartheta}$-val való szorzással helyettesítve, majd az egyenleteket megfelelően rendezve.
- Az állapotváltozós leírásból: $H(j\omega) = \underline{C}^T \left(j\omega\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{B} + D$, és $H\left(e^{j\vartheta}\right) = \underline{C}^T \left(e^{j\vartheta}\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{B} + D$. Hát egészségére, aki így csinálja (a MATLAB-on kívül).
- Frekvenciatartománybeli hálózati egyenletekből közvetlenül.
- Diszkrét rendszer esetén a rendszeregyenletből közvetlenül, a késleltetést $e^{j\vartheta}$-val való szorzással helyettesítve.
- ...?

10. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze, és egy-egy példán illusztrálja a különböző módszereket!

- Az átviteli karakterisztikából, $j\omega = s$, illetve $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel, ha a rendszer kauzális.
- Az impulzusválasz Laplace, illetve z-transzformáltja az átviteli függvény.
- Az állapotváltozós leírásból a deriválást s-el, illetve a késleltetést z-vel való szorzással helyettesítve, majd az egyenleteket megfelelően rendezve.
- Az állapotváltozós leírásból: $H(s) = \underline{C}^T \left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{B} + D$, és $H(z) = \underline{C}^T \left(z\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{B} + D$.
- Komplex frekvenciatartománybeli hálózati egyenletekből közvetlenül.
- Diszkrét rendszer esetén a rendszeregyenletből közvetlenül, a késleltetést z-vel való szorzással helyettesítve.
- ...?

11. Hogyan rendelhető jelfolyam típusú, diszkrét idejű hálózat az adott állapotváltozós leíráshoz, rendszeregyenlethez vagy átviteli függvényhez? Mi az oka annak, hogy e feladatok megoldása Kirchhoff-típusú hálózattal bonyolultabb?

- Állapotváltozós leírás:
  1. Felrajzoljuk egymás alá az állapotváltozókat alkotó késleltetőket.
  2. Felrajzoljuk a késleltetőkhöz a visszacsatolásokat a megfelelő erősítés-értékekkel. (Például: $x_1[k+1] = ax_1[k] + bx_2[k]$-ből x_1-hez egy a értékű erősítőt tartalmazó ág lesz a visszacsatolás.)

3. Felrajzoljuk, hogy az egyes késleltetők kimenetei milyen erősítéseken keresztül jelennek meg a további késleltetők bemenetein. (A fenti példával: az x_2 késleletető kimenetét egy b értékű erősítőn keresztül az x_1 bemenetére kötjük.)
4. Felrajzoljuk, hogy melyik késleltető bemenetére milyen erősítőn át csatlakozik a forrás.
5. Felrajzoljuk, hogy melyik késleltető kimenetéről milyen erősítőn át vesszük a válaszjelet.
6. Kész vagyunk, örülünk.

- Rendszeregyenlet: átírjuk átviteli fügvényre.
- Átviteli függvény: a „létrás” módszer. Nézd meg valamelyik feltöltött 2. HF 3.5 feladatát!

Kirchhoff-típusú hálózatok esetében ez azért jóval bonyolultabb, mert...

- ...többféle elemből épülnek fel.
- ...jellemzően bonyolultabb, illetve többféle az azokat építő elemek karakterisztikája.
- ...könnyen előfordulhatnak benne olyan belső összefüggések (vezérelt források, csatolt kétpólusok, kétkapuk), amelyeket egy kész rendszerjellemző függvényben már alig lehet tetten érni.

12. Ismertesse a diszkrét idejű jelek időtartománybeli leírásának módjait, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb jeleket (egységugrás, Dirac impulzus), és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveleteket (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás)! Adjon a jelekre néhány osztályozási szempontot (pl. periodikus, páros, belépő stb.)!

Időtartománybeli leírás módjai. A jel megadható formulával, az értékeinek felsorolásával és ábrával.

Vizsgálójelek.

- Egységugrás ($\varepsilon[k]$): értéke 0, ha $k < 0$ és 1, ha $k \geq 0$.
- Dirac-impulzus ($\delta[k]$): értéke 1, ha $k = 0$, egyébként 0.

A jeleken végezhető lineáris műveletek. Az időtartományban nem igazán tudom, hogy mi ebben a kérdés. Azon kívül diszkrét idejű jeleknél mit keres a differenciálás a kérdésben?

Jelek osztályozása.

- Periodikus, ha $\exists K > 0$, hogy $\forall k$-ra $x[k] = x[k + K]$.
- Belépő, ha $k < 0$-ra a jel értéke 0.
- Páros, ha a jel időfüggvénye páros.

13. Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek frekvenciatartománybeli leírásának módját, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb speciális jeleket (egységugrás, Dirac impulzus), és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveletek (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás) megfelelőit a frekvencia tartományban! Adja meg a jel energiatartalmának definícióját és frekvencia tartománybeli kifejezését!

Vizsgálójelek.

- Egységugrás: diszkrét: $\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$, folytonos: $\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.
- Dirac-impulzus: $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$.

A jeleken végezhető lineáris műveletek.

- Összeadás, számmal szorzás a frekvenciatartományban is ugyanaz.
- Differenciálás: $\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega X(j\omega)$.
- Eltolás: diszkrét: $\mathcal{F}\{x[k-K]\} = X(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta K}$, folytonos: $\mathcal{F}\{x(t-T)\} = X(j\omega)e^{-j\omega T}$.

Jel energiatartalma az idő-, és frekvenciatartományban. Parseval–tétel.

- Diszkrét: $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta$.
- Folytonos: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$.

14. Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek komplex frekvenciatartománybeli leírásának módját, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb speciális jeleket (egységugrás, Dirac impulzus), és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveletek (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás) megfelelőit a komplex frekvencia tartományban!

Vizsgálójelek.

- Egységugrás: $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{z}{z-1}$, és $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$.
- Dirac-impulzus: $\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

A jeleken végezhető lineáris műveletek.

- Összeadás, számmal szorzás a komplex tartományban is ugyanaz.
- Differenciálás: $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s)$.
- Eltolás:
  - Diszkrét: $\mathcal{Z}\{\varepsilon[k-r]x[k-r]\} = z^{-r}\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]x[k]\}$.
  - Folytonos: $\mathcal{L}\{\varepsilon(t-\tau)x(t-\tau)\} = e^{-s\tau}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)x(t)\}$.

15. Ismertesse az inverz z-transzformáció és az inverz Laplace transzformáció részlettörtekre bontáson alapuló módszerét! Illusztrálja az eljárást másodfokú nevező esetére! Hogyan kezeljük a komplex értékű, illetve a többszörös pólusokat?

A részlettörtekre bontásos módszert akkor használjuk, amikor az inverz transzformálandó függvény racionális törtfüggvény formájában adott.

1. Ha a számláló és a nevező fokszáma megegyezik, el kell végezni egy lépésnyi polinomosztást, hogy valódi tört legyen. ($\frac{3s^2+7s+9}{s^2+8s+12} \to 3 - \frac{17}{s} + \frac{109}{s^2} \pm ...$)
2. A nevezőt $\prod(s-p_i)$ alakra kell hozni. ($3 + \frac{-17s-27}{s^2+8s+12} \to 3 + \frac{-17s-27}{(s+6)(s+2)}$)
3. A kifejezést a következő alakban keresem: $\sum \frac{C_i}{s-p_i}$.
4. „Letakarásos módszer”: a 2. pontban megkapott alakban letakarom $(s-p_i)$-t és a maradék kifejezés értékét kiszámítom $s = p_i$ helyettesítéssel, így megkapom C_i értékét. ($3 + \frac{-17s-27}{(s+6)(s+2)} \to 3 + \frac{-75/4}{s+6} + \frac{7/4}{s+2}$)
5. Kész vagyunk, innen már csak a transzformáció van hátra. ($3\delta(t) + \varepsilon(t)\left(-\frac{75}{4}e^{-6t} + \frac{7}{4}e^{-2t}\right)$)

- Komplex pólusok: mindenképpen komplex konjugált pár(ok) lesz(nek). Ugyanúgy számolunk velük, majd a transzformáció után cosinus-okká alakítjuk őket.
- Többszörös pólusok: $\frac{3s+2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+1}$.

16. Ismertesse a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű periodikus jel előállítását Fourier sorával! Van-e lényeges különbség a két eset között? A jel mely jellemzői határozhatók meg egyszerűen Fourier soros alakjából?

Diszkrét

Komplex

$$\boxed{u[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \bar{U}_i^C e^{ji\vartheta_0 k}}$$

ahol: K a periódusszám, megadja, hogy hány ütemenként periodikus a jel, ϑ_0 az alapharmonikus körfrekvencia. $K = \frac{2\pi}{\vartheta_0}$,

$$\bar{U}_i^C = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} u[k]e^{-ji\vartheta_0 k}$$

Matematikai

$$\boxed{u[k] = \sum_{i=0}^{\frac{K}{2}} \left[U_i^A \cos(i\vartheta_0 k) + U_i^B \sin(i\vartheta_0 k)\right]}$$

ahol: K és ϑ_0 ugyanaz, mint a komplex alak esetében,

$$U_i^A = \begin{cases} \bar{U}_i^C & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } i = \frac{K}{2} \\ 2\Re\left\{\bar{U}_i^C\right\} & \text{ha } 0 < i < \frac{K}{2} \end{cases}$$

$$U_i^B = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } i = \frac{K}{2} \\ -2\Im\left\{\bar{U_i^C}\right\} & \text{ha } 0 < i < \frac{K}{2} \end{cases}$$

Mérnöki

$$\boxed{u[k] = U_0 + \sum_{i=1}^{\frac{K}{2}} U_i^C \cos\left(i\vartheta_0 k + \varphi_i\right)}$$

ahol: K és ϑ_0 ugyanaz, mint a komplex alak esetében,

$$U_i^C = \begin{cases} \bar{U_i^C} & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } i = \frac{K}{2} \\ 2\left|\bar{U_i^C}\right| & \text{ha } 0 < i < \frac{K}{2} \end{cases}$$

$$\varphi_i = \arg\left(\bar{U_i^C}\right)$$

Folytonos

Komplex

$$\boxed{u(t) = U_0 + \sum_{i=-n}^{n} \bar{U_i^C} e^{ji\omega_0 t}}$$

ahol n a közelítés választott finomsága, T a periódusidő,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

$$\bar{U_i^C} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-ji\omega_0 t}dt$$

Matematikai

$$\boxed{u(t) = U_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[U_i^A \cos\left(i\omega_0 t\right) + U_i^B \sin\left(i\omega_0 t\right)\right]}$$

ahol: n, T, és U_0 ugyanaz, mint a komplex alak esetében,

$$U_i^A = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\left(i\omega_0 t\right)dt$$

$$U_i^B = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin\left(i\omega_0 t\right)dt$$

Mérnöki

$$\boxed{u(t) = U_0 + \sum_{i=1}^{n} U_i^C \cos\left(i\omega_0 t + \varphi_i\right)}$$

ahol: n, T, és U_0 ugyanaz, mint a matematikai alak esetében,

$$U_i^C = \sqrt{{U_i^A}^2 + {U_i^B}^2} = 2|\bar{U_i^C}|$$

$$\varphi_i = -\arctan \frac{U_i^B}{U_i^A} = \arg\left(\bar{U_i^C}\right)$$

Tulajdonságok

Különbség. Míg diszkrét Fourier–sor pontosan előállítja a kívánt jelet, addig a folytonos esetben tetszőlegesen sok tag figyelembe vételével is csak közelítő értékeket kapunk.

A jel Fourier–sorából egyszerűen meghatározható jellemzői.

- A jel értékének időbeli átlaga: U_0, az „egyen-összetevő”, vagy „DC–offset”.
- A legnagyobb amplitúdó: mindig az első sinus vagy cosinus a legnagyobb amplitúdójú harmonikus, tehát ezeknek az együtthatója határozza meg a jelben a legnagyobb amplitúdójú komponenst. További tagok figyelembevételekor az amplitúdó csökken, a frekvencia pedig nő.
- Paritás: ha a jel páros, csak cosinus-os komponensekből áll, ha páratlan, akkor csak sinus-okból. Ha se nem páros, se nem páratlan, akkor sinus-ok és cosinus-ok is vannak benne.
- Az eredeti jel folytonossága:
  - Ha az eredeti jelnek szakadásai vannak, akkor az n. harmonikus amplitúdója $\frac{1}{n}$-ként aránylik az alapharmonikus amplitúdójához.
  - Ha az eredeti jel folytonos, de a deriváltjának szakadásai vannak, akkor az n. harmonikus amplitúdója $\frac{1}{n^2}$-ként aránylik az alapharmonikus amplitúdójához.

17. Mit jelent a sávkorlátozott folytonos idejű jel? Adja meg a folytonos idejű jel és a mintáiból alkotott diszkrét idejű jel Fourier transzformáltja közötti kapcsolatot! Milyen feltételek mellett, és hogyan lehet kifejezni a folytonos idejű jel időfüggvényét mintái ismeretében?

Definíció. Véges energiájú jelek amplitúdóspektruma a körfrekvencia növekedésével csökken, egy bizonyos határ felett elhanyagolható, tehát $|F(j\omega)| = 0$, ha $|\omega| > \Omega$, ahol Ω a sávkorlát. Az ilyen jelek a sávkorlátozott jelek.

Nyquist–tétel. (Vagy más néven Nyquist–Shannon mintavételezési törvény.) A folytonos idejű, véges energiájú, Ω sávkorlátú sávkorlátozott $x(t)$ jel rekonstruálható $x(pT)$ mintái ismeretében ($T = \frac{\Omega}{\pi}$ a mintavételi periódusidő):

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(pT) \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - p\right)}$$

A sávkorlátozott jel mintáiból visszaállítható, ha a mintavételi frekvencia a jelben előforduló legnagyobb frekvencia kétszerese. *Másképp megfogalmazva:* Ha egy $x(t)$ jel nem tartalmaz Ω[Hz]-nél nagyobb frekvenciákat, akkor egyértelműen előállítható $\frac{1}{2\Omega}$ secundumonként vett mintáiból.

18. Ismertesse a csomóponti potenciálok és a hurokáramok módszerét Kirchhoff típusú hálózatok számítására a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban! Térjen ki a különböző hálózati komponensekre! Illusztrálja az eljárást egy egyszerű hálózaton!

Cél egy olyan egyszerű hálózati egyenletrendszer szisztematikus előállítása, amelynek megoldásával meg tudjuk határozni a hálózatban az áramokat és feszültségket, vagy ilyenek hányadosát.

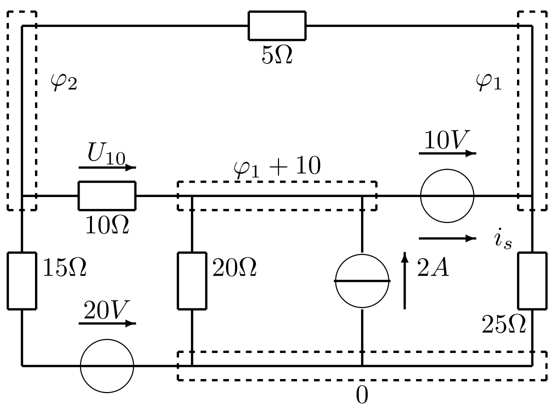
Csomóponti potenciálok

Elméleti alap. Kirchhoff-féle áramtörvény, vagy csomóponti törvény: egy csomópontba befolyó áramok összege egyenlő a kifolyó áramok összegével, vagyis a csomópontban nem halmozódik fel töltés.

Módszer.

1. A hálózat egy kényelmesen választott csomópontját kijelöljük, mint 0 potenciált.
2. A többi csomópontra, egyesével felírjuk a be és kifolyó áramokat.
   - Konvenció: a kifelé folyó áramokat tekintjük pozitívnak.
   - Hogy ne tévesszük el az előjelet, igyekezzünk minden ágáramot olyan formában felírni, hogy $\frac{\text{saját csomópont potenciálja} - \text{az aktuális ágon szomszédos csomópont potenciálja}}{\text{a két csomópont között lévő impedancia}}$.
   - Amennyiben forrás van az aktuális ágban, a fenti formát nem tudjuk használni. Ha áramforrás, akkor nincs probléma, hiszen az épp felírt csomóponti egyenletben csupán előjelhelyesen szerepeltetnünk kell a forrásáramot. Ha viszont feszültségforrásról van szó, akkor a hálózat további részei alapján kell összefüggést találnunk az adott ág áramára, vagy egy segédváltozót kell bevezetnünk.
3. Amennyiben előállt a kellő számú egyenlet, a hálózat bármely áramát vagy feszültségét meghatározhatjuk az egyenletrendszer szisztematikus redukciójával.

Példa. Tekintsük az alábbi egyszerű hálózatot! $U_{10} =?$, $P_{U_{10}} =?$



Az ábrán szaggatott vonallal vannak körbekerítve a csomópontok és fel vannak tüntetve a potenciáljaik. Írjuk fel a kijelölt kérdésekre a válaszokat!

$$U_{10} = \varphi_2 - (\varphi_1 + 10) \qquad P_{U_{10}} = \frac{[\varphi_2 - (\varphi_1 + 10)]^2}{10}$$

A csomóponti egyenletrendszer, amelyből a fentiek számértékét meg lehet határozni:

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1): &\quad \tfrac{\varphi_1}{25} + \tfrac{\varphi_1-\varphi_2}{5} - i_s = 0 \\
(\varphi_1+10): &\quad i_s - 2 + \tfrac{\varphi_1+10}{20} + \tfrac{\varphi_1+10-\varphi_2}{10} = 0 \\
(\varphi_2): &\quad \tfrac{\varphi_2-(\varphi_1+10)}{10} + \tfrac{\varphi_2-\varphi_1}{5} + \tfrac{\varphi_2-20}{15} = 0
\end{aligned}
$$

A válaszok számértékének megismerésétől már csak az algebrai tehetségünk választ el.

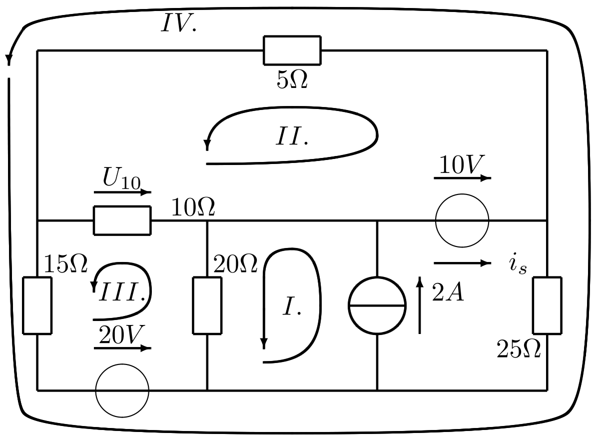
Hurokáramok

Elméleti alap. Kirchhoff-féle feszültségtörvény, vagy huroktörvény: egy zárt hurok mentén a feszültségek előjelhelyes összege zérus.

Módszer.

1. Felveszünk a hálózatban $b-n+1$ áramhurkot, ahol b az ágak száma, n pedig a csomópontok száma, a következő szabályok szerint:
   - Áramforrások csak egy áramhurok mehet át.
   - Két áramforrás nem szerepelhet egy hurokban.
   - A hálózat minden ágát le kell fedni hurokkal.
   - A hurkok nem lehetnek teljesen függetlenek.
2. Miután ez megvan, a feszültségtörvény értelmében össze kell írni a hurkok mentén a feszültségeséseket, amiket az impedanciák és a hurokáram előjeles összegének szorzata ad meg. A forrásokkal itt kevesebb probléma van, mint a csomóponti potenciáloknál, ugyanis a feszültségforrásnak egyszerűen a feszültségét kell beírni az egyenletbe, az áramforrásról pedig kijelentettük, hogy csak egy hurokban van benne, illetve egy hurokban nem lehet egynél több áramforrás, tehát annak az egy huroknak az értéke megegyezik a forrásárammal.
3. Amennyiben előállt a kellő számú egyenlet, a hálózat bármely áramát vagy feszültségét meghatározhatjuk az egyenletrendszer szisztematikus redukciójával.

Példa. Tekintsük ugyanazt a hálózatot, mint az előbb és oldjuk meg a hurokáramok módszerével is! U_{10} =?, $P_{U_{10}}$ =?



Az görbe vonallal vannak bejelölve a hurokáramok és meg vannak számozva. Írjuk fel a kijelölt kérdésekre a válaszokat!

$$U_{10} = 10\,(J_{II.} - J_{III.}) \qquad P_{U_{10}} = 10\,(J_{II.} - J_{III.})^2$$

A hurokegyenletrendszer, amelyből a fentiek számértékét meg lehet határozni:

$$\begin{array}{rl} J_{I.}: & J_{I.} = 2A \\ J_{II.}: & 5(J_{II.} + J_{IV.}) + 10(J_{II.} - J_{III.}) + 10 = 0 \\ J_{III.}: & 10(J_{III.} - J_{II.}) + 15(J_{III.} + J_{IV.}) + 20(J_{III.} - J_{I.}) + 20 = 0 \\ J_{IV.}: & 25J_{IV.} + 5(J_{IV.} + J_{II.}) + 15(J_{IV.} + J_{III.}) + 20 = 0 \end{array}$$

19. Ismertesse a lineáris, invariáns Kirchhoff típusú hálózatok periodikus állapotának számítását a Fourier soros felbontás felhasználásával! Ismertesse a pillanatnyi és a hatásos teljesítmény fogalmát és számításuk módszereit!

Periodikus gerjesztésre adott válasz. *(Nem tudom, hogy pontosan erre gondoltak-e?)*

1. A periodikus gerjesztőjel (célszerűen mérnöki alakú) Fourier-sorának meghatározása kellő pontosságig.
2. A hálózat átviteli karakterisztikájának meghatározása.
3. Átviteli karakterisztika értékének kiszámítása a Fourier-sor által meghatározott frekvenciákon.
4. *A* táblázat felírása. (Fejléc: $\omega \mid |U| \mid \varphi_U \mid |H| \mid \varphi_H \mid |Y| \mid \varphi_Y \mid$) A gerjesztőjel mérnöki alakjának Fourier-sorából automatikusan adódik a különböző frekvenciájú komponensek komplex amplitúdója, a különböző átviteli tényezőket is kiszámoltuk az előbb, tehát nincs más hátra, mint...
5. ...a válasz komplex amplitúdójának meghatározása: $|Y| = |H| \cdot |U|$, $\varphi_Y = \varphi_H + \varphi_U$.
6. A válasz egyes tagjainak komplex amplitúdóiból automatikusan adódik a válasz Fourier-sora.

Ezt az egész dolgot a rendszer linearitása miatt lehet így csinálni. A módszer *gyakorlati* megvalósítása az lenne, ha az eredeti periodikus jelet előállító forrás helyett a Fourier-felbontásnak megfelelő számú, annak egy-egy komponensét külön előállító forrást helyeznénk a hálózatba és a szuperpozíció elvét alkalmazva összegeznénk hatásaikat.

A villamos teljesítmény típusai. Akkor már ideírom az összeset, hogy egy helyen legyenek. Jelölések:

- $u(t) = [U\cos(\omega t + \varphi)]\,\mathrm{V}$
- $i(t) = [I\cos(\omega t + \rho)]\,\mathrm{A}$
- $\alpha = \varphi - \rho$

A teljesítmény típusai a fenti jelölésekkel tehát:

- **Pillanatnyi:** $p(t) = u(t)i(t)$
- **Hatásos:** $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{2}UI\cos\alpha$ – a pillanatnyi teljesítmény egy periódusra vett átlaga. $[P] = \mathrm{W}$ (Watt).
- **Meddő:** $Q = \frac{1}{2}UI\sin\alpha$ – a teljesítménynek ez a része nem végez hasznos munkát, de hőterhelés formájában megjelenik a rendszerben. $[Q] = \mathrm{var}$ (volt-amper reaktív).
- **Komplex:** $\bar{S} = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{I}^* = P + jQ$. $[\bar{S}] = \mathrm{VA}$ (volt-amper).
- **Lászlólagos:** $S = |\bar{S}| = \frac{1}{2}UI$. $[S] = \mathrm{VA}$ (volt-amper).

20. Ismertesse a diszkrét idejű rendszer fogalmát! Adjon áttekintést a rendszerek osztályozási szempontjairól (a változók száma, jellege, kapcsolatuk típusa stb.)! Mit jelent a lineáris, az invariáns, illetve a stabilis jelző?

Diszkrét idejű rendszer. A tantárgy keretein belül a diszkrét idejű, folymatos értékű gerjesztésű, diszkrét idejű, folymatos értékű válaszú rendszereket értjük ide. Ez azt jelenti, hogy a rendszer gerjesztésének és válaszának értékét is csak meghatározott időpillanatokban, szabályos időközönként vehetjük figyelembe, azonban mind a gerjesztés, mind a válasz tetszőleges valós értéket felvehet.

A rendszerek osztályozása.

- A változók száma alapján: egy / több gerjesztésű / válaszú.
- Az értelmezési tartomány alapján: folytonos / diszkrét idejű gerjesztésű / válaszú.
- Az értékkészlet alapján: folytonos / diszkrét értékű gerjesztésű / válaszú.

A rendszerek tulajdonságai.

- Lineáris: Ha $u_1[k] \to y_1[k]$ és $u_2[k] \to y_2[k]$ akkor $c_1u_1[k] + c_2u_2[k] \to c_1y_1(t) + c_2y_2[k]$.
- Invariáns: Ha $u[k] \to y[k]$, akkor $u[k+\kappa] \to y[k+\kappa]$.
- Stabilis: A hálózat stabilis, ha az általa reprezentált rendszer gerjesztés-válasz stabilis.
  - Gerjesztés–válasz stabilitás: korlátos gerjesztésre korlátos válasz. Akkor és csak akkor, ha az impulzusválasz abszolút integrálható.
- Aszimptotikus stabilitás: a gerjesztés kikapcsolása után az állapotváltozók és a válasz 0-hoz tartanak. Akkor és csak akkor, ha a rendszermátrix sajátértékeinek valós része negatív.

21. Ismertesse a diszkrét idejű rendszer rendszeregyenletének fogalmát, általános alakját, és a megoldásához szükséges adatokat! Milyen típusú rendszerekre érvényes a megadott alak?

Definíció. A rendszeregyenlet a vizsgált rendszer gerjesztés–válasz kapcsolatának egy implicit alakja.

Érvényessége és általános alakja. Diszkrét idejű, egy bemenetű – egy kimenetű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer rendszeregyenlete:

$$\boxed{y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i] = \sum_{l=1}^{m} b_i u[k-i]}$$

A megoldáshoz szükséges adatok.

- Az a_i és b_i konstansok értékei, ezeket a hálózatban található erősítők szabják meg.
- A gerjesztés időfüggvénye.
- A gerjesztés belépő legyen.
- ...?

22. Ismertesse a diszkrét idejű rendszeregyenlet megoldására szolgáló módszereket az idő-, a frekvencia és a komplex frekvencia tartományban! Illusztrálja a módszereket egy egyszerű példával!

Időtartomány

„Step-by-step" módszer

A megoldandó rendszeregyenlet legyen: $y[k] + 0.8y[k-1] + 0.15y[k-2] = 4u[k] - 2u[k-2]$.

Ez a „step-by-step" elég komolytalan módszer, nem adja meg a válasz zárt alakját cserébe sokat kell számolni. Egyszerűen fel kell írni egymás mellé k-nak és u-nak a megfelelő értékeit egy táblázatba, majd ezek mellé, minden egyes sorba kézzel kiszámolni y értékét. Így kijön, hogy $k = 0$-ra $y = 4$, 1-re -3.2, 2-re -0.04, stb.

Általános megoldás (az impulzusválasz számítása)

Az előbbi példánál maradva:

Határozzuk meg a $h_0[k]$ „segéd-impulzusválasz" függvényt úgy, hogy a rendszeregyenletben a gerjesztést $\forall k$-ra 0-nak tekintjük és felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$c\lambda^k + 0.8c\lambda^{k-1} + 0.15c\lambda^{k-2} = 0$$

$c\lambda^{k-2}$ kiemelhető, és mivel az nem lehet 0 (ez triviális megoldás lenne), az egyenlet elosztható vele, így marad:

$$\lambda^2 + 0.8\lambda + 0.15 = 0$$

Innen $\lambda_1 = -0.5$ és $\lambda_2 = -0.3$. A $h_0[k]$ függvény általános alakja:

$$\boxed{h_0[k] = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i^k}$$

Tehát ebben az esetben:

$$h_0[k] = \left[c_1(-0.5)^k + c_2(-0.3)^k\right]\varepsilon[k]$$

c_1 és c_2 meghatározásához helyettesítsünk be a $h_0[k]$ függvénybe 0-t és -1-et, így a következő egyenletrendszer adódik:

$$h_0[0] = 1 = c_1 + c_2$$

$$h_0[-1] = 0 = \frac{c_1}{-0.5} + \frac{c_2}{-0.3}$$

Innen $c_1 = 2.5$ és $c_2 = -1.5$, tehát

$$h_0[k] = \left[2.5(-0.5)^k - 1.5(-0.3)^k\right]\varepsilon[k]$$

Az impulzusválasz megkapható a következőképpen:

$$h_0[k] = \sum_{l=0}^{m} b_l h_0[k-l]$$

ahol b_l értékei a rendszeregyenletben gerjesztés (a „jobb oldal") együtthatói. Esetünkben tehát:

$$h[k] = 4h_0[k] - 2h_0[k-2] = \left[10(-0.5)^k - 6(-0.3)^k\right]\varepsilon[k] - \left[5(-0.5)^{k-2} - 3(-0.3)^{k-2}\right]\varepsilon[k-2]$$

A 0. és 1. ütemeket külön írva:

$$h[k] = 4\delta[k] - 3.2\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left[-2.5(-0.5)^{k-2} + 2.46(-0.3)^{k-2}\right]$$

Az impulzusválasz ismeretében tetszőleges gerjesztésre számítható a rendszer válasza konvolúcióval:

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i]}$$

(Az összegzés alsó határa 0, ha a gerjesztés belépő, a felső határa pedig k, ha a rendszer kauzális.)

Megoldás összetevőkre bontással

Másik példa: $y[k] + 0.6y[k-1] - 0.16y[k-2] = 3u[k] - 2u[k-1]$, a gerjesztés legyen $u[k] = 6 \cdot 0.5^k \varepsilon[k]$.

A válasz felbontható szabad-, és gerjesztett összetevőre. A gerjesztett összetevő a gerjesztés alakjában keresendő:

$u[k]$	$y_g[k]$
$\delta[k]$	0
$A\varepsilon[k]$	B
$Aa^k\varepsilon[k]$	Ba^k
$A\cos(\vartheta k)$	$B\cos(\vartheta k + \varphi)$

Tehát a megadott gerjesztéshez tartozó gerjesztett választ a $B \cdot 0.5^k$ alakban keressük. Helyettesítsük ezt és a gerjesztést a rendszeregyenlet kifejezésébe!

$$B \cdot 0.5^k + 0.6 \cdot B \cdot 0.5^{k-1} - 0.16 \cdot B \cdot 0.5^{k-2} = 3 \cdot 6 \cdot 0.5^k - 2 \cdot 6 \cdot 0.5^{k-1}$$

0.5^{k-2} kiemelhető:

$$B \cdot 0.5^2 + 0.6 \cdot B \cdot 0.5 - 0.16 \cdot B = 3 \cdot 6 \cdot 0.5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 0.5$$

Innen $B = -3.85$. Most akkor nézzük a szabad összetevőt, ami $\sum_i D_i \lambda_i^k$ alakban keresendő. A $h_0[k]$-zós módszert követve meghatározzuk a λ-kat:

$$c\lambda^k + 0.6c\lambda^{k-1} - 0.16c\lambda^{k-2} = 0$$

$$c\lambda^{k-2}(\lambda^2 + 0.6\lambda - 0.16)$$

Innen $\lambda_1 = -0.8$ és $\lambda_2 = 0.2$.

A válasz kifejezése tehát a következőképpen fog alakulni:

$$y[k] = D_1(-0.8)^k + D_2 \cdot 0.2^k - 3.85 \cdot 0.5^k$$

„Step-by-step”-eljünk egy kicsit, hogy kiderüljenek a konstansok:

k	$u[k]$	$y[k]$
-1	0	0
0	6	18
1	3	-13.8

Tehát:

$$18 = D_1 + D_2 - 3.85$$

$$-13.8 = -0.8D_1 + 0.2D_2 - 3.85 \cdot 0.5$$

Innen $D_1 = 16.245$ és $D_2 = 5.605$, tehát a válasz kifejezése:

$$y[k] = 16.245(-0.8)^k + 5.605 \cdot 0.2^k - 3.85 \cdot 0.5^k$$

Frekvencia– és komplex tartomány

Hát mindezen időtartománybeli marháskodásoknál sokkal egyszerűbb, ha a következőképpen járunk el. Először is csináljunk a rendszeregyenletből átviteli függvényt:

$$y[k] + 0.6y[k-1] = 3u[k] \to Y(1 + 0.6z^{-1}) = 3U \to H(z) = \frac{Y}{U} = \frac{3}{1 + 0.6z^{-1}}$$

A gerjesztőjel időfüggvényét z-transzformáljuk:

$$u[k] = 6 \cdot 0.5^k \varepsilon[k] \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{6}{1 - 0.5z^{-1}}$$

A kettőt összeszorozzuk:

$$Y(z) = \frac{3}{1 + 0.6z^{-1}} \frac{6}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{18z^2}{z^2 + 0.1z - 0.3}$$

Majd ezt inverz z-transzformálva megkapjuk a válasz időfüggvényét.

$$y[k] = \varepsilon[k] \left[8.18 \cdot 0.5^k + 9.82(-0.6)^k\right]$$

23. Ismertesse a lineáris, invariáns, kauzális diszkrét idejű rendszerre az állapotváltozó fogalmát, az állapotváltozós leírás normál alakját!

Definíció. Az állapotváltozók olyan változók, melyekre a következők igazak. Amennyiben ismerjük a rendszer működését jellemző egyenleteket és a gerjesztéseket, valamint az összes állapotváltozó egy bizonyos k pillanatbeli értékét, akkor:

- ezekből meg tudjuk határozni az összes állapotváltozó $K > k$ pillanatbeli értékeit, és
- meg tudjuk határozni valamennyi válasz k pillanatbeli értékét.

Diszkrét idejű rendszer esetében az állapotváltozók a késleletetők kimeneti változói.

Normál alak.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{x}[k+1] &= \underline{\underline{A}}\,\underline{x}[k] + \underline{B}u[k] \\ y[k] &= \underline{C}^T \underline{x}[k] + Du[k] \end{aligned}}$$

24. Ismertesse a lineáris, invariáns, kauzális diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírásának megoldására szolgáló módszereket!

Megoldás összetevőkre bontással. Alap: az állapotváltozó időfüggvénye felbontható szabad-, és gerjesztett összetevőkre.

1. Rendszermátrix sajátértékeinek meghaátrozása: $\det(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0$.
2. Sajátvektorok meghatározása: $(\lambda \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\underline{m} = 0$.
3. A szabad összetevő meghatározása: $x_f[k] = \sum_{i=1}^{N} K_i \underline{m}_i \lambda_i^k$, ahol K_i-ket a kezdeti feltételek szabnak meg.
4. A gerjesztett összetevőt a gerjesztőjel alakjában keressük. („Próbafüggvény-módszer”.) A próbafüggvényben szereplő együtthatók meghatározásához azt behelyettesítjük az eredeti állapotegyenletbe, felírjuk a különböző típusú függvények együtthatóinak egyenlőségét és megoldjuk az adódó egyenletrendszert.
5. A gerjesztett-, és a szabad összetevő összege adja az állapotváltozó időfüggvényét.

Megoldás mátrixfüggvényekkel. $\underline{x}[k] = \underline{\underline{A}}^k \underline{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{\underline{A}}^{k-1-i} \underline{B} \underline{u}[i]$.

25. Értelmezze a diszkrét idejű rendszer impulzusválaszát! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az impulzusválasz ismeretében? Hogyan ábrázolható az impulzusválasz?

Definíció. A diszkrét idejű rendszer impulzusválasza a rendszer $\delta[k]$ gerjesztésre adott válasza.

Konvolúció. Tetszőleges gerjesztéshez tartozó válasz előáll a gerjesztőjel és az impulzusválasz konvolúciójaként:

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i]u[i]}$$

Ábrázolás. *(Ebben mi a kérdés?)* Az impulzusválaszt az idő függvényében lehet ábrázolni bot-diagramon, mert ez szemlélteti a diszkrét időléptéket.

26. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer impulzusválasza az állapotváltozós leírás ismeretében?

Diszkrét idejű rendszerekre:

$$\boxed{h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1} \underline{B}}$$

Folytonos idejű rendszerekre:

$$\boxed{h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t} \underline{B}}$$

27. Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikáját! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az átviteli karakterisztika ismeretében? Hogyan ábrázolható az átviteli karakerisztika?

Definíció. A diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája a rendszer átviteli együtthatója, mint a frekvencia függvénye, mely előáll a válasz és a gerjesztés komplex amplitúdóinak hányadosaként.

Válaszszámítás. Fentről lefelé egyre elvetemültebbeknek szóló módszerek olvashatók.

- Az átviteli karakterisztikából $z = e^{j\vartheta}$, illetve $s = j\omega$ helyettesítéssel nyerhető az átviteli függvény, ha a rendszer kauzális. $\rightarrow$ A gerjesztés időfüggvényének z-, illetve Laplace-transzformálása $\rightarrow$ $Y(z) = H(z)U(z)$, illetve $Y(s) = H(s)U(s)$ $\rightarrow$ Inverz transzformáció.
- Az aperiodikus gerjesztőjel Fourier-transzformációja $\rightarrow$ $Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta})U(e^{j\vartheta})$, illetve $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$ $\rightarrow$ Inverz Fourier-transzformáció.
- A periodikus gerjesztőjel Fourier-sorba fejtése $\rightarrow$ Az átviteli tényező meghatározása a szükséges frekvenciákra $\rightarrow$ A gerjesztőjel és az átviteli tényező amplitúdóinak szorzása, illetve szögeik összegzése adja a válasz komplex amplitúdóit $\rightarrow$ Triviális visszaalakítás időfüggvénnyé.
- Átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformációja $\rightarrow$ Az így nyert impulzusválasznak és a gerjesztés időfüggvényének a konvolúciója.

Ábrázolás.

- Bode-diagram: az átviteli karakterisztika amplitúdóját és fázisát adják meg a frekvencia függvényében.
  - Diszkrét esetben a frekvencia és a fázis természetes egységben, lineáris léptékkel adott, mert a frekvenciát csak a $0 \leq \vartheta \leq \pi$, a fázist pedig legfeljebb egy 2π széles tartományon kell ábrázolni. Az amplitúdó viszont logaritmikus egységben (jellemzően dB-ben), lineáris léptékkel adott.
  - Folytonos esetben a frekvencia is természetes egységben, ám logaritmikus léptékkel adott, mivel a különböző frekvenciák nagyon széles tartománya előfordulhat. Az amplitúdó és a fázis a diszkrét esethez hasonlóan vannak ábrázolva.
- Nyquist-diagram: olyan diagram a komplex síkon, melynek pontjait az átviteli karakterisztika egy-egy rögzített frekvenciához tartozó értékei adják.

28. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája az állapotváltozós leírás ismeretében? Illusztrálja egyszerű példával!

Van egy ilyen, hogy $H(j\omega) = \underline{C}^T(j\omega\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{B} + D$, illetve $H(e^{j\vartheta}) = \underline{C}^T(e^{j\vartheta}\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{B} + D$, de ez így papíron ceruzával annyira nem tűnik ínycsiklandónak.

Diszkrét példa. Állapotváltozós leírás legyen:

$$x_1[k+1] = u[k]$$

$$x_2[k+1] = 0.7x_1[k] + 0.5x_2[k]$$

$$y[k] = 0.3x_2[k]$$

Áttérés a frekvenciatartományba:

$$X_1 e^{j\vartheta} = U$$

$$X_2 e^{j\vartheta} = 0,7X_1 + 0,5X_2$$

$$Y = 0,3X_2$$

Egyenletek rendezése:

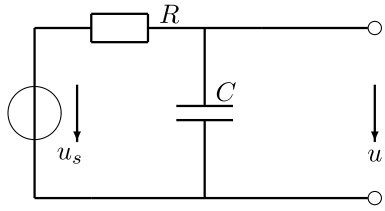
$$X_1 = \frac{U}{e^{j\vartheta}}$$

$$X_2 = \frac{\frac{0,7U}{e^{j2\vartheta}}}{\frac{1-0,5}{e^{j\vartheta}}}$$

$$Y = \frac{0,21U}{e^{j2\vartheta} - 0,5e^{j\vartheta}}$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y}{U} = \frac{0,21}{e^{j2\vartheta} - 0,5e^{j\vartheta}}$$

Folytonos példa. Tekintsük az alábbi egyszerű u_s gerjesztésű, u válaszú hálózatot!



$$U = U_s \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{U}{U_s} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

(*Megjegyzés:* ezt a példát ugye bármelyikünk négyéves kishúga is meg tudná oldani, olyan egyszerű, azonban azt érdemes észben tartani, hogy sokszor az átviteli függvény vagy -karakterisztika csak egy pár feszültség- vagy áramosztásra van tőlünk. *Tanulság:* ne essünk neki csomópontival rögtön!)

29. Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszer átviteli függvényét! Hogyan számítható az adott gerjesztéshez tartozó válasz az átviteli függvény ismeretében? Hogyan ábrázolható az átviteli függvény?

Diszkrét. A lineáris, invariáns, kauzális rendszer átviteli függvénye a belépő gerjesztéshez tartozó belépő válasz z-transzformáltjának hányadosa:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Az átviteli függvény ismeretében csak belépő választ tudunk számítani, de nem kell kikötni a rendszer stabilitását.

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H(z)\mathcal{Z}\{u[k]\}\right\}$$

Folytonos. A lineáris, invariáns, kauzális rendszer átviteli függvénye a belépő gerjesztéshez tartozó belépő válasz Laplace-transzformáltjának hányadosa:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Az átviteli függvény ismeretében csak belépő választ tudunk számítani, de nem kell kikötni a rendszer stabilitását.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\right\}$$

Ábrázolás. Az átviteli függvényt szokásosan a pólus-zérus elrendezéssel ábrázoljuk. Nagyon könnyű elkészíteni, úgy néz ki, hogy a komplex síkra a pólusok helyére kis x-et, a zérusok helyére kis o-t kell rajzolni.

30. Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye az állapotváltozós leírás ismeretében?

Ugyanúgy, mint az átviteli karakterisztika, csak $j\omega$ és $e^{j\vartheta}$ helyett s-el illetve z-vel.

31. Értelmezze a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű lineáris invariáns rendszer gerjesztés–válasz stabilitásának fogalmát, adja meg teljesülésének feltételeit! Mely feltételek szükségesek, melyek elégségesek?

Diszkrét. A lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha bármilyen korlátos gerjesztéshez tartozó válasza korlátos. Ennek szükséges és elégséges feltétele, ha a rendszer impulzusválasza abszolút összegezhető:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] < \infty$$

A rendszeregyenletével leírt diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer biztosan gerjesztés–válasz stabilis, ha minden sajátértékére teljesül, hogy $|\lambda_i| < 1$.

Folytonos. A lineáris, invariáns rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha bármilyen korlátos gerjesztéshez tartozó válasza korlátos. Ennek szükséges és elégséges feltétele, ha impulzusválasza abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt < \infty$$

Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, akkor gerjesztés-válasz stabilis is (fordítva nem igaz).

32. Értelmezze a diszkrét idejű lineáris, invariáns rendszer aszimptotikus stabilitásának fogalmát, adja meg teljesülésének feltételeit! Mely feltételek szükségesek, melyek elégségesek?

Diszkrét. A diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha a gerjesztetlen („magára hagyott") rendszer minden állapotváltozója bármely kezdeti állapot esetén nullához tart az idő előrehaladtával. Az aszimptotikusan stabilitás szükséges és elégséges feltétele, ha a rendszermátrixának minden sajátértéke abszolút értékben kisebb 1-nél, a komplex számsíkon az egységsugarú körön belül helyezkedik el. $|\lambda_i| < 1$.

Folytonos. Lineáris, invariáns rendszer aszimptotikusan stabilis, ha a gerjesztetlen rendszer minden állapotváltozója nullához tart bármely kezdeti állapot esetén. A lineáris, invariáns, kauzális rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha a rendszermátrixának minden λ_i sajátértékének valós része negatív. $\Re\{\lambda_i\} < 0$. A gerjesztés-válasz stabilitás az aszimptotikus stabilitás szükséges, de nem elegendő feltétele.

33. Hogyan határozható meg egy lineáris, invariáns rendszer szinuszos vagy periodikus gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasza diszkrét idejű, illetve folytonos idejű esetben? Milyen feltételek mellett van a gerjesztett válasznak fizikai tartalma?

Periodikus gerjesztett válasz meghatározása. „Táblázatos" módszer: minden felmerülő frekvenciára kiszámítjuk a gerjesztés komplex amplitúdóját és az átviteli tényezőt, amplitúdókat szorzunk, fázisszögeket összegzünk.

Gerjesztett válasz fizikai tartalma. Akkor van a gerjesztett válaszjelnek fizikai tartalma, ha a rendszer gerjesztés–válasz stabilis.

34. Értelmezze a rendszerjellemző függvényt! Értelmezze a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszerek rendszerjellemző függvényeinek kapcsolatát! Mik az egyes rendszerjellemző függvények előnyei és hátrányai? Milyen rendszertulajdonságok határozhatók meg az egyes rendszerjellemző függvények ismeretében közvetlenül?

A lineáris, invariáns rendszer rendszerjellemző függvényének egy olyan függvényt nevezünk, amelynek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározható.

Diszkrét.

- Impulzusválasz: $h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\vartheta})\}$ – általános jellemző. A rendszer hálózati reprezentációjából közvetlenül nem meghatározható, először a hálózat állapotváltozós leírását, átviteli karakterisztikáját vagy átviteli függvényét kell meghatározni.
- Átviteli karakterisztika: $H(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{h[k]\}$ – csak gerjesztés-válasz stabilis rendszerekre.
- Átviteli függvény: $H(z) = \mathcal{Z}\{h[k]\}$ – csak kauzális rendszerekre.

Folytonos.

- Impulzusválasz: $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = g'(t)$ – általános jellemző. A rendszer hálózati reprezentációjából közvetlenül nem meghatározható, először a hálózat állapotváltozós leírását, átviteli karakterisztikáját vagy átviteli függvényét kell meghatározni.
- Átviteli karakterisztika: $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ – csak gerjesztés–válasz stabilis rendszerekre. Egy rendszer átviteli karakterisztikájának számítása elvileg egyszerű akár pontonként, akár függvényként. Előzetesen ellenőrizni kell azonban a hálózat stabilitását, mert formailag a nem stabilis hálózatra is kapunk látszólag helyes eredményt. (Ha a forrásra kapcsolt kétpólus passzív, akkor az ellenőrzés többnyire mellőzhető). Célszerű eljárás: először a hálózat alapján az átviteli függvényt meghatározni, ellenőrizni a stabilitást, majd ha stabil, $s = j\omega$ helyettesítést alkalmazni.
- Átviteli függvény: $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ – csak kauzális rendszerekre.

35. Ismertessen néhány speciális tulajdonságú rendszert (pl. véges impulzus-válaszú, mindent áteresztő, minimálfázisú)! Milyen tulajdonságúak ezek rendszer-jellemző függvényei? Ismertesse Bode tételeit!

Véges impulzusválaszú rendszerek (FIR – Finite Impulse Response). A diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszerek egy speciális csoportja.

- A rendszer impulzusválasza belépő és értéke nulla valamilyen véges időpont után.
- Az impulzusválasz L ütem hosszúságú.
- Stabilis rendszer (egyetlen $L-1$-szeres pólusa az origóban van).
- Van olyan hálózati realizációja, amely $L-1$ számú késleltetőt és maximum L számú erősítőt tartalmaz: $h[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i]\delta[k-i]$.

Mindent áteresztő. Olyan kauzális, lineáris, invariáns, gerjesztés-válasz stabilis rendszer, amelynek amplitúdókarakterisztikája állandó.

- A szinuszos gerjesztés amplitúdóját a rendszer minden frekvencián azonos erősítéssel „engedi át”, de a fázisok kapcsolatára nincs előírás.
- A pólusok a bal félsíkon, a zérusok a jobb félsíkon helyezkednek el, a képzetes tengelyre tükrös párokat alkotnak.

Minimálfázisú.

- *Diszkrét:* Olyan lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés–válasz stabilis rendszer, amelyre az átviteli függvény egyetlen zérusa sincs az egységsugarú körön kívül.
- *Folytonos:* Olyan lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés–válasz stabilis rendszer, amelyre az átviteli függvény minden pólusa a bal félsíkon helyezkedik el és egyetlen zérusa sincs a jobb félsíkon.

Tulajdonságok:

- Az azonos amplitúdókarakterisztikájú rendszerek közül a minimálfázisúnak a legkisebb a fáziskarakterisztikája (innen az elnevezés).
- Szigorúan minimálfázisú: ha a folytonos idejű rendszer átviteli függvénynék minden zérusa a bal félsíkon található. Ebben az esetben a $K(\omega)$ amplitúdókarakterisztika maga is rendszerjellemző függvény.

Bode–tétel. A szigorúan minimálfázisú, folytonos idejű rendszer fáziskarakterisztikája meghatározható az amplitúdókarakterisztikával a következőképpen:

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^\infty \frac{\ln K(\lambda) - \ln K(\omega)}{\lambda - \omega} d\lambda$$

36. Ismertesse a folytonos idejű rendszer diszkrét idejű szimulációjának néhány módszerét! Mi a célja a szimulációnak? Illusztrálja az eljárásokat egy egyszerű folytonos idejű rendszerre!

Adott egy folytonos idejű rendszer. Feladatunk olyan diszkrét idejű rendszer meghatározása, amelynek viselkedése „hasonló” a folytonos idejű megfelelőjéhez, vagyis szimulálja annak viselkedését.

Az impulzusválasz szimulációja. A $h_c(t)$ impulzusválaszú lineáris, invariáns, kauzális, folytonos idejű rendszernek az $u_c(t)$ belépő gerjesztéshez tartozó válaszának kifejezése a konvolúcióval:

$$y_c(t) = \int_{-0}^{t} h_c(\tau) u_c(t-\tau) d\tau$$

Az impulzusválasz a következő alakban adott:

$$h_c(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t) f(t)$$

ahol $f(t)$ egy folytonos idejű függvény.

Válasszunk egy T mintavételi periódusidőt, majd a fenti két egyenlet felhasználásával fejezzük ki a választ a $t = kT$ időpontokban ($k \in \mathbb{N}$). Behelyettesítve, az integrált elvégezve a következő szimulációs szabály adódik:

$$\boxed{h_c(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t) f(t) \Rightarrow h_d[k] = D\delta[k] + T\varepsilon[k-1] f(kT)}$$

Az átviteli függvény szimulációja. Adott egy kauzális folytonos idejű rendszer $H_c(s)$ átviteli függvénye. Célunk a diszkrét idejű szimuláló rendszer olyan $H_d(z)$ átviteli függvényének előállítása, hogy bármilyen frekvenciájú szinuszos gerjesztésre a szimuláció hibamentes legyen, vagyis a szimulátor gerjesztett válasza egyezzék meg a folytonos idejű rendszer gerjesztett válaszának mintáival. Ennek feltétele:

$$H_d(z) = H_c(s)|_{s=\frac{\ln z}{T}}$$

azonban ez a megoldás nem használható, mivel nem racionális átviteli függvényű szimulátort eredményez, ilyet pedig erősítőkkel és késleltetőkkel nem tudunk építeni. Keresni kell tehát egy olyan megoldást, amely racionális átviteli függvényt eredményez, jól közelíti a fenti, nem racionális megoldást és megőrzi a szimulálandó rendszer stabilitási tulajdonságait. Igazolható, hogy a bilineáris transzformáció rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal:

$$s = \frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{1+\frac{sT}{p}}{1-\frac{sT}{p}} \quad 0 < p \leq 2$$

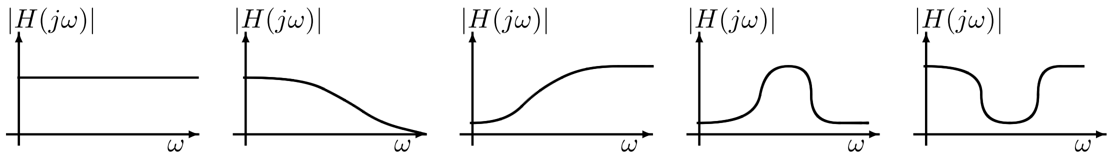
Fentivel tehát a következő szimulációs szabály adódik:

$$\boxed{H_d(z) = H_c(s)|_{s=f(z)}, \text{ ahol } f(z) = \frac{p}{T}\frac{z-1}{z+1}, \text{ ahol } 0 < p \leq 2}$$

37. Ismertesse az átviteli karakterisztika és a jel sávszélességének fogalmát! Mi az alakhű jelátvitel fogalma és feltétele? Mit jelent az aluláteresztő, a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró rendszer?

- Sávszélesség: egy jel sávszélessége az a frekvenciaintervallum, amelyen kívül a jel spektruma elhanyagolható.
- Alakhű átvitel: a jel időfüggvénye (alakja) nem torzul el, azaz csak lineáris változást szenved, ez akkor biztosított, ha a rendszer sávszélessége magába foglalja a jel sávszélességét

Rendszerek osztályozása az amplitúdókarakterisztika alapján:



Mindent áteresztő   Aluláteresztő   Felüláteresztő   Sáváteresztő   Sávzáró