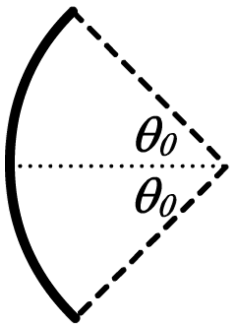
Elektromos térerősség

24.20



1. ábra.

Egyenletes λ töltéssűrűséggel feltöltött, $2\theta_0$ szög alatt látszódó, körívre hajlított vezető (lásd az ábrán) elektromos tere a kör középpontjában.

Számítsuk ki egy kicsiny, $\mathrm{d}\theta$ nyílászszögű körív járulékát! Meggondolva a rendszer szimmetriáját, ennek a járuléknak csak a szimmetriatengellyel (vagyis $2\theta_0$ szögfelezőjével) párhuzamos része számít, ugyanis bármelyik θ szöghöz tartozó kis „vezetődarab" járulékának a szögfelezőre merőleges részét „kioltja" a $-\theta$-nál lévő. Egy $\mathrm{d}\theta$-darabkát ponttöltésként kezelve ($q = \lambda R \mathrm{d}\theta$ töltéssel), melynek térerőssége $E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$:

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R \mathrm{d}\theta}{R^2}\cos\theta$$

A térerősséget az összes járulékot összeadva (vagyis integrálva) kapjuk:

$$E = \int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{R}\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}2\int\limits_{0}^{\theta_0}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\sin\theta_0}{R}$$

24.26

Két, egymástól d távolságra lévő $+Q$ nagyságú ponttöltést közé, az őket összekötő szakaszra $+q$ töltést helyezünk (a probléma 1 dimenziós, q nyilván $d/2$-nél egyensúlyban van). Mi történik, ha q-t kissé kimozdítjuk az egyensúlyából, x-nyire ($x \ll d$)?

Válasszuk a koordinátarendszer nullpontját a „bal oldali" Q töltés helyének, a pozitív irányt pedig ettől jobbra (rajzold le, ha nem tiszta)!

Ekkor a q-ra ható erő, ha azt az egyensúlyi helyzetből x-szel kitérítjük:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}Qq\left(\frac{1}{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}\right)$$

Ezt a kifejezést sorbafejtjük első rendig ($F(x) = F(0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} x + o(x^2)$), felhasználva, hogy: $\frac{1}{(a+x)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3}x + o(x^2)$

Így, a másodrendő tagokat elhagyva (hiszen $x \ll d$):

$$F \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{d}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{2}{\left(\frac{d}{2}\right)^3}\right) = -\frac{27qQ}{\pi\epsilon_0 d^3}x$$

Ezt összevetve a rezgősmozgásokra jellemző $F = -Dx$ erőtörvénnyel:

$$D = \frac{27qQ}{\pi\epsilon_0 d^3}$$

24.29

Egy elektron ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}C$, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}kg$) egy egyenes mentén mozog, legyen ez a koordinátarendszer x-tengelye! $E_x(x) = c_1(1 + c_2 x)$, ($c_1 = 4\frac{V}{m}$, $c_2 = 10^3$). Ha $v(x = 0) = v_0$, számítsuk ki, hol válik (vált) a részecske sebessége zérussá!
Írjuk fel a mozgásegyenletet ($F = m\dot{v}$):

$$qE_x = m\dot{v}$$

és mivel v a helykoordinátán keresztül függ az időtől: $v(t) = v(x(t))$, az idő szerinti deriváltja így írható:

$$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

Ezzel (E_x konkrét alakját behelyettesítve) egy szétválasztható differenciálegyenletet kapunk:

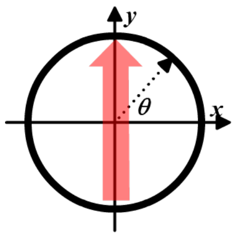
$$\frac{q}{m}c_1(1 + c_2 x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

melynek megoldása:

$$\frac{q}{m}c_1\int_0^{x^*}(1 + c_2 x)\,\mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v^*} v\mathrm{d}v \Rightarrow (v^*)^2 = (v_0)^2 + \frac{2qc_1}{m}\left(x^* + \frac{c_2(x^*)^2}{2}\right)$$

Látható, hogy a $v^* = 0$ esetben egy másodfokú egyenletet kapunk, melynek (tessék ellenőrizni) két megoldása van. Ez könnyen érthető, hiszen x növekedésével egyrészt lelassul a töltés, és valamilyen pozitív x-értékre nullával lesz egyenlő. Emellett, ha $x < -0.001$, az elektromos térerősség előjelet vált, s így lassítani fogja a $-x$ irányba haladó részecskét - egészen addig, míg sebessége 0 nem lesz.

24.37



2. ábra.

Vékony, R sugarú nem vezető gyűrűben a töltéssűrűség: $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin\theta$. *Milyen irányú és nagyságú az elektromos térerősség-vektor (az ábrán feltüntetett koordinátarendszerben)?*

A piros nyíl mutatja a térerősség-vektor „megsejtett” irányát: ugyanis a töltéssűrűség az y-irányban maximális (λ_0) és a $-y$-irányban minimális ($-\lambda_0$), hiszen θ a pozitív x-től mért forgásszög.

Gondolkodjunk hasonló módon, mint a **24.20**-as példa esetében: kis $\mathrm{d}\theta$-hoz tartozó térerősség járulékokat adunk össze, ám most nem olyan triviálisak a szimmetria-megfontolások. Így általánosan egy kicsiny járulék:

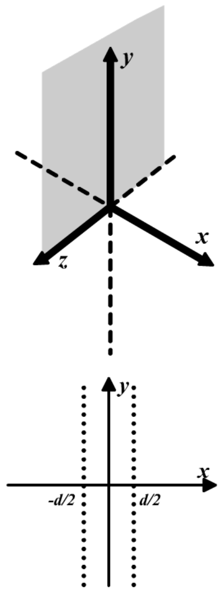
$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(\theta)R\mathrm{d}\theta}{R^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

, ahol a vektor első komponense az x, második az y iránybű $\mathrm{d}\mathbf{E}$-vetület, adott θ szög esetén. Behelyettesítve a töltéssűrűség alakját, és összegezve minden θ-ra:

$$\mathbf{E} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 R}\begin{pmatrix}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\ \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\end{pmatrix} = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Vagyis valóban, $\mathbf{E}$ y-irányba mutat.
(Az integrálokat egyszerű trigonometrikus átalakítások után könnyen kiértékelhetjük, az „alsóra” π adódik.)

25.7



3. ábra.

Az $y-z$ síkban végtelen kiterjedésű, az x-irányban d vastagságú lemez (lásd az ábrákon) egyenletesen van feltötlve, vagyis $\rho = \rho_0$, amíg $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$, egyébként 0. Meghatározzuk a térerősséget az egész térre.

Az elrendezés igen magas szimmetriával bír. Mivel a töltéssűrűség x-re szimmetrikus, a térerősség-mező is az lesz (vagyis $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ - tükörszimmetrikus). A lemez végtelen kiterjedése miatt az origót az $y-z$ síkban tetszőlegesen választhatjuk, így $\mathbf{E}$ csak erre a síkra merőleges (x-irányú) és csak x-függése lehet. Sikerült tehát a problémát „egy dimenzióssá" redukálnunk, hiszen a térerősség egyváltozós függvény.
Vegyünk most egy x-tengellyel párhuzamos x-magasságú, négyzet alapú hasábot (A alapterülettel), és helyezzük a koordinátarendszerbe az origóra szimmetrikusan: a két alaplap $-x$-nél és x-nél legyen. Nézzük először az $x \geq \frac{d}{2}$ esetet!
A Gauss-tétel ($\oint\limits_{\partial D} \mathbf{E}(\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{A} = \int\limits_{D} \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V$) felületi integrálja nagyon leegyszerűsödik, hiszen a térerősség az oldallapokkal párhuzamos, ezeken a felületi integrálja nulla (hiszen minden pontban merőleges a felület normálisvektorára), csak az alaplapokon ad egyenként $E(x)A$-nyi járulékot.
Így tehát:

$$2AE(x) = \frac{Ad\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\frac{d}{2}$$

azaz konstans, értéke a lemeztől végtelen messzeségben is ennyi. Ez nem meglepő, hiszen - pontosan a lemez végtelen kiterjedése miatt - az elrendezés x-irányban tetszőlegesen átskálázható. Az x-skála „összenyomásával" a lemez térfogati töltése is egyre „sűrűbb", de szorzatuk állandó, hoszen a rendszer össztöltése ettől a transzformációtól nem változhat meg. Így „bármilyen messziről" nézzük, ugyanolyan az elrendezés, logikus tehát, hogy a lemezen kívül E konstans.
De mi a helyzet, ha $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$? Ekkor a szimmetrikus hasáb a lemez belsejében van, ám a már említett szimmetriák és a lemezen lévő tölteseloszlás homogenitása miatt E itt is csak x-irányú lehet. Az előbbi egyenlet erre az esetre így módosul:

$$2AE(x) = \frac{A2x\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}x$$

Jól láthatóan az összefüggés a lemez határán folytonosan változik.

25.10

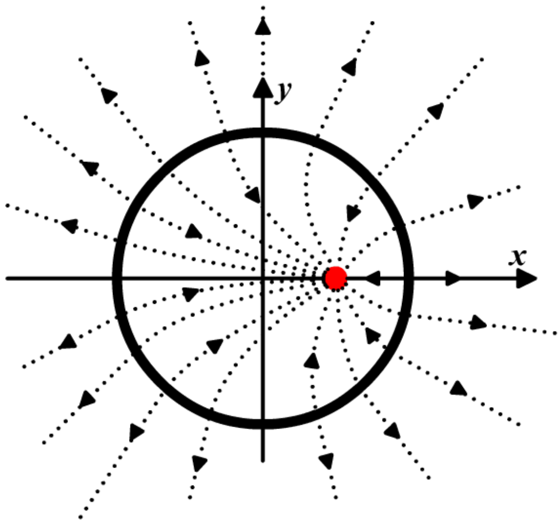
$R = 10cm$ sugarú, üreges fémgömbön $Q = 10\mu C$ öltés van. Az koordinátarendszer origóját a gömb középpontjába helyezve, az $x = 5cm$ helyen egy $q = -3\mu C$ nagyságú ponttöltés van. Felvázoljuk az elektromos teret (az **E***-vonalakat), és kiszámítjuk E_x értékét a gömbön kívül, az x-tengely mentén.*

A következőt kell megfontolnunk: vezető felület jelenléte az elrendezésben úgy jelenik meg, mint az **E** irányára tett megkötés. Nevezetesen az **E** vektromező olyan, hogy merőleges a gömbfelületer. Ha nem így lenne, elmozdítaná a vezetőben lévő töltéshordozókat (így nem beszélhetnénk elektrosztatikus elrendezésről) mindaddig, míg el nem tűnik a felülettel párhuzamos komponens.
(Más részről úgy gondolunk a vezetőkre, mint ekvipotenciális felületekre, s mivel a térerősség a potenciál gradiensének irányába mutat, az ekvipotenciális felületekre merőleges.)

Az térerősség kiszámítása a teljes térre nem lenne egyszerű feladat, viszont az E_x-et nehézség nélkül meghatározhatjuk az $x > R$ esetben. Az x-tengely ugyanis az elrendezés szimmetriatengelye: erre hengeresen szimmetrikus. Így biztos, hogy itt csak x-irányú térerősséggel kell számolnunk, ami a gömb és a benne lévő ponttöltés terének egyszerű szuperpozíviójaként adódik:

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q+q}{x^2}$$

(Megjegyzés: E_x az $x \leq R$ esetben is kiszámítható az x mentén, az ún. „tükörtöltés" módszerrel: a gömb és a ponttöltés együttesét két, megfelelően megválasztott ponttöltésre (az eredetire és „gömbi tükörképére" kell cserélni...))



4. ábra.

25.18

R sugarú gömbben az elektromos tér sugárirányú (és az origótól „elfelé” mutat): $\mathbf{E} = E_0\mathbf{e_r}$. *Milyen a töltéssűrűség?*

Először is kihasználjuk az elrendezés gömbszimmetriáját: $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$ kell legyen. Írjuk fel a Gauss-törvényt egy $r \leq R$ sugarú gömbrartományra (G_r):

$$\oint_{\partial G_r} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{G_r} \rho(r)\mathrm{d}V$$

A bal oldalból a térerősség speciális alakja miatt: $\oint_{\partial G_r} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = E_0 4\pi r^2$
A jobb oldalon végezzük el az integrálást gömbi koordinátákkal:

$$\int_{G_r} \rho(r)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(r')(r')^2 \sin\theta \mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi \int_0^{r} \rho(r')(r')^2\mathrm{d}r'$$

A két oldalt egyenlővé téve, majd r-szerint differenciálva:

$$2E_0 r = \rho(r)r^2 \Rightarrow \rho(r) = \frac{2E_0}{r}$$

Az ez elrendezés problémás, hiszen $\lim_{r\to 0} \rho(r) = \infty$, ami egyben azzal jár, hogy a véges térfogatú gömb össztöltése végtelen. Ilyen töltéselrendezés nem létezik a természetben.

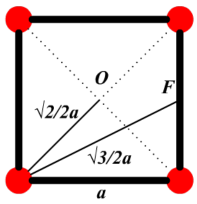
Elektromos potenciál

Az elektromos potenciál egy pozitív q próbatöltés potenciális energiájának különbségét adja meg adott elektromos tér két pontja között. Definíció szerint a *phi* potenciálfüggvény: $-\nabla\phi = \mathbf{E}$, jól láthatóan egy konstans erejéig szabadon választható mennyiség.
Egyszerű eseteben ez a következő megfogalmazással ekvivalens:

$$\phi(x) = \phi(x_0) - \int_{x_0}^{x} E(x')\mathrm{d}x'$$

ahol az x_0-t célszerű referencia (vagy null)szintnek választani: $\phi(x_0) = 0$ módon.

26.6



5. ábra.

Az ábrán látható négyzet sarkaiban egy-egy $q > 0$ nagyságú töltés van. Kiszámítjuk a potenciált az O és az F pontban.

A ponttöltések potenciálja, ha a nullpontot (ahol ϕ nulla) a végtelenbe toljuk: $\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x}$. Több ponttöltés esetén a potenciálokat egyszerűen össze kell adnunk, így:

$$\phi_F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}\frac{a}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}\frac{a}{2}}\right) = \frac{q}{\epsilon_0 \pi a}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

$$\phi_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}4\frac{1}{\sqrt{2}\frac{a}{2}} = \frac{q}{\epsilon_0\pi a}\sqrt{2}$$

A potenciál az F pontban nagyobb. (Ez nem csoda, hiszen ha az elrendezést kétdimenziósnak tekintjük, az O stabil egyensúlyi pont, ahol a potenciális energiának minimuma van.)

26.10

Töltött vezető gömb felszínén a potenciál: $\phi(R) = 200V$, míg $\phi(r = 10cm) = 150V$. Mekkora R, és a gömb Q töltése?

Kihasználva, hogy a gömb elektromos tere kvázi egydimenziós, hiszen csak r-től függ, könynyen adódik, hogy $\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$, amennyiben $r \geq R$, egyébként konstans (hiszen a gömb belsejében nincs elektromos tér).
Azaz a gömb úgy viselkedik, mint egy ponttöltés, ha „kívül" vagyunk (ebből rögtön látszik, hogy a potenciál monoton csökken, ha távolodunk, így az $r = 10cm$ biztosan kívül van a gömbből.)
Egyrészt:

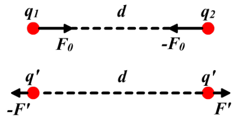
$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \Rightarrow Q = \phi(r)4\pi\epsilon_0 r$$

Így:

$$R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\phi(R)} = \frac{\phi(r)}{\phi(R)}r = 10cm \cdot \frac{150}{200} = 7,5cm$$

Ahonnan a töltés: $Q = 4\pi\epsilon_0 \cdot 150V \cdot 10cm \approx 0.16\mu C$

26.12



6. ábra.

Kis egyforma, töltött fémgömb (az ábra tetején q_1 , q_2) egymástól $d = 1m$ távol $F_0 = 9 \cdot 10^{-3} N$ nagyságú erővel vonzza egymást. Majd összeérintjük őket, és újra eltávolítjuk a kezdeti helyzetbe. Ekkor $F' = 2 \cdot 10^{-3} N$ nagyságú taszító erőt tapasztalunk. Mekkora a gömbök kezdeti töltése?

A kezdeti helyzetre alkalmazva a Coulomb-törvényt (hiszen a gömbök távolról ponttöltésként működnek): $F_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$.
A gömbök összeérintésekor kiegyenlítődik rajtuk a töltésmennyiség (hiszen fémből vannak), persze a töltésmegmaradást „tiszteletben tartva”: $2q' = q_1 + q_2$.
Emellett tudjuk, hogy az ekkor ható erő: $F' = \frac{(q')^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$.
Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$q_1 q_2 = 4\pi\epsilon_0 d^2$$

$$q_1 + q_2 = 4\sqrt{\pi\epsilon_0 F'} d$$

Láthatóan ez q_1-ben és q_2-ben szimmetrikus (mindegy, melyik töltést vesszük kezdetben pozitívnak.) Így a megoldás:

$$q_1 = 2d\sqrt{\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{F'} + \sqrt{F' - F_0}\right) \approx 14.89mC$$

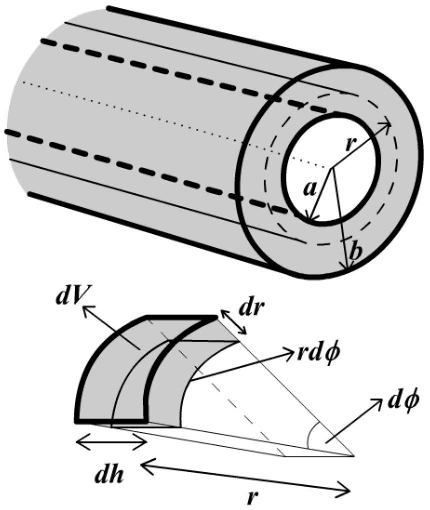
$$q_1 = 2d\sqrt{\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{F'} - \sqrt{F' - F_0}\right) \approx -6.02mC$$

Megjegyzendő, hogy a fenti két összefüggést a *jobb oldali* töltésre írtuk fel, vagyis F_0 negatív, F' pedig pozitív előjelű (értelem szerűen fordított esetben is kihozható az eredmény, de ott a gyökjel alatt $F_0 - F'$ szerepelne.)

26.16

Képzeljünk el két, közös szimmetriatengelyű, végtelen hengerpalástot, a külső sugara legyen b, míg a belsőjé a ($b > a$). A hengerpalástok között a következő töltéssűrűség szerint oszlanak el a töltések: $\rho(r) = \frac{k}{r}$, ha $a \leq r \leq b$ (r a szimmetriatengelytől mért távolság), k konstans. Ezen kívül nincsenek töltések. Vizsgáljuk meg a rendszer térerősségét és potenciálját az egész térben!

Mint az előbbiekben, most is egy magas szimmetriákkal bíró elrendezéssel van dolgunk: egyrészt a szimmetriatengely irányában vett eltolásokra invariáns (végtelen kiterjedésű), tehát elegendő egy körmetszetével foglalkozni. Másrészt a szimmetriatengely körüli forgásinvariancia miatt (ρ csak az r függvénye) a probléma tulajdonképpen egy dimenziós. Ebből következik, hogy a térerősség mindig sugárirányba mutat, elegendő annak $E(r)$ nagyságát vizsgálnunk.



7. ábra.

Alkalmazzuk a Gauss-tételt! Vegyünk egy h magasságú hengerpalástot, aminek szimmetriatengelye az elrendezésével közös, sugara pedig r (legyen ez H). Három esetet kell megvizsgálnunk:

Ha $r < a$, ekkor a H tartományban nincsenek töltések, tehát $E(r) \equiv 0$. A potenciál ezért itt konstans ($\phi_1(r) = c_1,\ r < a$), értékének meghatározásához a többi esetet is meg kell vizsgálnunk.

Ha $a \leq r \leq b$, a Gauss-törvény bal oldala (a térerősség felületi integrálja): $\oint\limits_{\partial H} E(r)\mathrm{d}A = E(r)2\pi h$. A jobb oldal (a töltéssűrűség térfogati integrálja osztva ϵ_0-lal):

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_H \rho(r)\mathrm{d}V = \frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_0^h\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r \rho(r')r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi\mathrm{d}h = \frac{2\pi h}{\epsilon_0}\frac{r^2}{2}$$

ahol r, ϕ és h a megfelelő hengerkoordináták (lásd az ábrán), és $\mathrm{d}V = r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi\mathrm{d}h$ a térfogatelem (ami függ attől, milyen messze vagyunk a szimmetriatengelytől). Így végül: $E(r) = \frac{k}{2\epsilon_0}r$.

A potenciált integrálással kapjuk: $\phi_2(r) = -\frac{k}{\epsilon_0}r^2 + c_2$ Az $r > b$ esetben a teljes h széles szeletben lévő töltés a H tartományban van:

$$2\pi h E(r) = \frac{2\pi h k}{\epsilon_0}\frac{b^2}{2} \Rightarrow E(r) = \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

A potenciál itt: $\phi_3(r) = -\frac{kb^2}{2\epsilon_0}\ln r + c_3$.

A konstansokat a következő feltételből indulva határozzuk meg: tegyük fel, hogy a potenciál egy adott $d \gg b$ értékre nulla. Vagyis: $c_3 = \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\ln d$. Megköveteljük, hogy a potenciál folytonosan menjen át az egyes tartományok között, így:

$$\phi_2(b) = \phi_3(b) \Rightarrow c_2 = -\frac{k}{\epsilon_0} + c_2 = \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{d}{b}$$

Hasonlóan $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ egyenletből a c_1 konstanst kapjuk. Az eredményeket összefoglalva:

$$E(r) = \begin{cases} 0; & r < a \\ \frac{k}{2\epsilon_0}r; & a \leq r \leq b \\ \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}; & b < r \end{cases} \qquad \phi(r) = \begin{cases} \frac{k}{\epsilon_0}\left(b^2 - a^2\right) + \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{d}{b}; & r < a \\ \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\left(2 - 2r^2 + \ln\frac{d}{b}\right); & a \leq r \leq b \\ \frac{kb^2}{2\epsilon_0}\ln\frac{d}{r}; & b < r \end{cases}$$

27.12

Becsüljük meg, maximum mekkora potenciálra lehet feltölteni egy $R = 5cm$ sugarú fémgömböt úgy, hogy száraz levegőben ne keletkezhessen körülötte kisülés. Az a tapasztalat, hogy ha két, száraz levegőben lévő elektróda között az elektromos térerősség nagysága túllépi a kb. $E_{max} \approx 1000 \frac{V}{mm} = 10^6 \frac{V}{m}$-es értéket, kisülés jön létre (ekkora elektromos tér már képes „elszakítani" az elektronokat a molekulák törzsétől). A becslésben tehát a gömb felületén vizsgáljuk a potenciál nagyságát (a nullpontot végtelen távolinak tesszük föl: $\phi(\infty) = 0$).
A gömbszimmetriát kihasználva, és azt, hogy a töltött gömb középpontjától $r > R$-nyire eltávolodva ponttöltésként kezelhető, ekkor ismert a következő két összefüggés:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,; \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Ezekből adódik, hogy $\phi(r) = E(r)r$. Ebbe behelyettesítve a maximális értéket, adódik: $\phi_{max} \approx 50000V$
(Érdemes megjegyezni, hogy az ún. *csúcshatás* az előbbi képletünknek köszönhető: minél jobban görpül adott potenciálon lévő felület - vagyis minél kisebb a körbületi sugara - annál nagyobb ott az elektromos tér erőssége, így annál valószínűbb ott a kisülés.)

Kondenzátorok

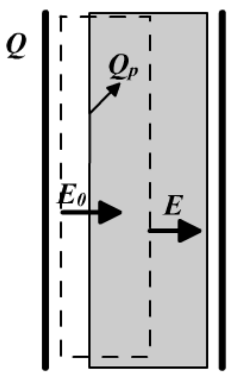
Két egymással szembefordított, sík fémlemezről van szó, közöttük vákuum, levegő vagy egyéb szigetelő anyag (legalábbis most nem foglalkozunk ennél bonyolultabbal). Ekkor, ha töltést viszünk az egyik lemezre, a másikon ellentétes előjelű jelenik meg. Nem a semmiből: vagy földelt a lemez, vagy összekötöttük a másikkal, és megváltoztattuk valamelyik potenciálját.
A lemezek közötti potenciálkülönbség (U) és az egyiken lévő Q (a másikon $-Q$) töltés egymással arányosak: $C = \frac{Q}{U}$, ahol C a kondenzátor kapacitása Ahogyan azt az ismert strófa tartja: „Coulomb mondja méla búval, cé egyenlő kú per ú-val...".
Érdemes még megjegyezni a mi esetünkben tárgyalt síkkondenzátorok kapacitását a lemezek közti d távolsággal, azok A felületével és a köztük lévő anyag ϵ_r relatív dielektromos állandójával összekötő képletet: $C = \epsilon\epsilon_r \frac{A}{d}$.

27.30

A $C = 0.1\mu F$-os kondenzátor lemezei $A = 0.75m^2$ területűek, a köztük lévő szigetelő réteg relatív dielektromos állandója $\epsilon_r = 2.5$. A kondenzátort $U = 600V$-ra töltjük. Vizsgáljuk meg, hol mennyi töltés jelenik meg!

Először is pár szót ejtsünk arról, mi történik, ha a síkkondenzátorba szigetelőt (dielektrikumot) helyezünk! Úgy képzelhetjük el egyszerűen, hogy a szigetelőben nincsenek szabad töltéshordozók, viszont a molekulái piciny dipólusok (vagyis olyan „izék”, amiknek az egyik vége inkább pozitív, a másik inkább negatív töltésű). Persze a szigetelőnek nincsen eredő elektromos tere, hiszen benne a dipólusok össze-vissza állnak. Viszont ha külső elektromos térbe (most: kondenzátorba) helyezzük, a dipóusok irányba állnak, mégpedig a külső térrel ellentétesbe (abban az értelemben, hogy a saját kis elektromos terük ellentétes irányú a külsővel), így minimalizálva az energiájukat (így kerülnek stabil egyensúlyba). Így a szigetelő „lerontja” a kondenzátorban lévő elektromos teret, megnövelve a kapacitást: a szigetelő felületén felhalmozódó ún. *polarizációs töltés* ugyanis „semlegesíti” a lemezeken lévő egy részét, így egyszerűen „több fér el” a kondenzátorban, mint ha a lemezek közt csak vákuum lenne.
Egyszerű modellünkben a szigetelő anyagot az ϵ_r konstans jellemzi. Ez azt mutatja meg, hogy a szigetelővel kitöltött kondenzátor kapacitása hányszorosa a vákuummal kitöltöttének (aholis $\epsilon_r = 1$), vagyis $\epsilon_r = \frac{C}{C_0}$, ahol C_0 a szigetelő nélküli eset. Látható, hogy a dielektrikumot alkalmazva a $Q_0 = C_0U$ mennyiségű töltés helyett $Q = \epsilon_r C_0 U = \epsilon_r Q_0$, azaz ϵ_r-szer annyi fér a lemezekre.
Esetünkben a lemezeken $Q = CU = 0.1\mu F \cdot 600V = 60\mu C$ töltés van. „Vákuumos” esetben ez ϵ_r-ed ennyi lenne. A kettő különbsége mutatja, mennyi (milyen nagyságú) töltés származik a polarizációból (ez a dielektrikum felületén van):

$$Q_p = Q - Q_0 = (\epsilon_r - 1)\, C_0 U = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} CU = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q = 36\mu C$$



8. ábra.

A szigetelőben lévő térerősség (E) egyrészt ezek által, másrészt a lemezeken lévő szabad töltések által keltett. Így a Gauss-tételt az egyik lemez közelében felírva (lásd az ábrán) kapjuk: $EA - E_0 A = \frac{Q_p}{\epsilon_0}$. A vákuumban lévő E_0 térerősségről pedig tudjuk (könnyen belátható, - végtelen - sík lemez terének az összege), hogy $E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$. Így $E = \frac{Q+Q_p}{\epsilon_0 A}$ vegyük figyelembe, hogy a lemezen lévő töltések és a közelben lévő polarizációs töltések ellentétes előjelűek:

$$E = \frac{|Q| - |Q_p|}{\epsilon_0 A} = \frac{Q}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right) = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

Esetünkben $E_0 \approx 9.04 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$, $E \approx 3.62 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$

27.24

Két párhuzamosan kapcsolt síkkondenzátorról (ez azt jelenti, hogy a megfelelő lemezeiket összekötjük) a következőt tudjuk: $C_2 = 3\mu F$, $C_1 = 10\mu F$ *ugyan olyan geometriájú, de lemezei között szigetelő anyag is van. Az összekötött kondenzátorra* $U = 150V$ *feszültséget adunk. Számítsuk ki az egyes kondenzátorokon lévő töltést és a bennük tárolt energiát!*
Mivel összekötöttük a megfelelő lemezeket (párhuzamos kapcsolás), a kapacitásokat össze kell adnunk (hiszen azok arányosak a lemezek felületével, ami így összeadódott), és egy új, $C_1 + C_2$ kapacitású kondenzátorral számolnunk. Ennek össztöltése: $Q = (Q_1 + Q_2)\,U = 1.95mC$. Ez a következőképpen oszlik meg: $Q_1 = C_1 * U = 1.5mC$ és $Q_2 = C_2 * U = 0.45mC$. Az energiák: $E_1 = \frac{1}{2}C_1U^2 = 0.1125J$, $E_2 = \frac{1}{2}C_2U^2 = 0.03375J$.
Mi a helyzet abban az esetben, ha az egyes kondenzátor lemezei közül kihúzzuk a dielektrikumot?

A rendszerből töltés nem került ki, tehát $Q = Q_1' + Q_2' = (C_1' + C_2')\,U' = 2C_2U'$, kihasználva, hogy a szigetelő nélkül az egyes kondenzátor ugyanolyan, mint a kettes. Innen $U' = \frac{C_1+C_2}{2C_2}U = 325V$. Ezekkel az értékekkel a kondenzátorok energiája: $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}C_2U'^2 \approx 0.16J$.
Ez láthatóan nagyobb érték, mint az első esetben. Ennek oka, hogy a dileketrikumon az elektromos tér munkát végez, így állítva irányba a képzeletbeli dipólusokat, így mikor betesszük a szigetelőt, az csökkenti a kondenzátor energiáját (tehát ha kivesszük, növeli).